GIORGIO LETTA

Un exemple de processus mesurable adapté non-progressif

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 449-453
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__449_0>

UN EXEMPLE DE PROCESSUS MESURABLE ADAPTE NON PROGRESSIF

Giorgio Letta
Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
Via Buonarroti 2, I-56100 Pisa

Résumé - Sur un espace probabilisé, muni d'une filtration vérifiant les conditions habituelles, on considère un processus de la forme $X_t = \int_0^t H_s ds$, où H est mesurable adapté. Il est connu qu'on peut construire un processus progressif (même prévisible), dont chaque trajectoire soit équivalente (pour la mesure de Lebesgue) à la trajectoire correspondante de H; par conséquent, X est adapté. Dans le présent article, on montre d'abord que ces résultats deviennent faux dans un cadre "sans probabilité". On se place ensuite dans un cadre "avec probabilité", et l'on démontre une version affaible des résultats précédents, qui est valable sans les conditions habituelles (et qui se réduit à la version précédente lorsque ces conditions sont remplies).

1. INTRODUCTION.

Il est bien connu (cf. [1], 3.3) que l'intégrale stochastique par rapport à une martingale M de carré intégrable peut être définie pour une classe de processus en peu plus large que celle des processus prévisibles intégrables, pourvu que la mesure de Doléans du processus M^2 soit absolument continue par rapport à la restriction de $\lambda \otimes P$ à la tribu prévisible (λ désignant la mesure de Lebesgue sur $]0,\infty[$). Cette extension repose sur des résultats de théorie "générale", qui ne semblent pas être très populaires. On peut se servir, par exemple, de la proposition suivante (cf. [1], 3.3 et 3.4):

Soit H *un processus mesurable adapté, tel que l'on ait*

$$\int_0^t |H(s,\omega)| ds < \infty \quad \textit{pour tout couple } (t,\omega). \tag{1.1}$$

Considérons le processus X *défini par*

$$X(t,\omega) = \int_0^t H(s,\omega) ds . \tag{1.2}$$

Alors:

(a) Il existe un processus prévisible K, dont chaque trajectoire est équivalente (pour la mesure de Lebesgue) à la trajectoire correspondante de H.

(b) Le processus X est adapté (ou, ce qui revient au même, prévisible).

Pour démontrer ces assertions, on se place couramment dans les "hypothèses habituelles" pour la filtration, et on utilise les notions de tribu optionnelle e de projection optionnelle.

Dans le présent article, nous nous plaçons d'abord dans un cadre "sans probabilité": nous démontrons que, dans ce cadre, les deux assertions précédentes deviennent fausses (voir Exemple (2.2)).

Nous nous plaçons ensuite dans le cas où l'espace Ω est muni d'une loi P (mais sans imposer à la filtration de satisfaire aux conditions habituelles). Dans ce cadre, nous démontrons les deux assertions suivantes (plus faibles que (a), (b)):

(a') Il existe un processus prévisible K équivalent à H pour la mesure $\lambda \otimes P$.

(b') X est indistinguable d'un processus prévisible.

Nous démontrons ces assertions de manière élémentaire, sans faire appel à la notion de tribu optionnelle, en utilisant seulement un argument d'orthogonalité et le théorème de dérivation de Lebesgue.

On remarquera que les assertions (a'), (b') sont équivalentes aux assertions (a), (b) dans le cas où la filtration vérifie les conditions habituelles (ou, de façon plus générale, dans le cas où tout ensemble négligeable pour la loi P appartient à chacune des tribus de la filtration).

2. RESULTATS SANS PROBAILITE.

On se place sur un espace probabilisable $(\Omega,\mathcal{A})$. Tous les processus considérés sont définis sur $]0,\infty[\times\Omega$ (et sont réels, sauf mention expresse du contraire). Un processus est dit mesurable s'il est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{B}(]0,\infty[)\otimes\mathcal{A}$. On suppose que l'espace $(\Omega,\mathcal{A})$ est muni d'une filtration $(F_t)_{0<t<\infty}$: les notions de processus adapté, progressif, prévisible sont toujours relatives à cette filtration.

(2.1) PROPOSITION. Soit H un processus mesurable, vérifiant la condition (1.1), et considérons le processus X défini par (1.2).
Les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) Il existe un processus prévisible K, tel que, pour tout ω, la trajectoire $K(\cdot,\omega)$ soit équivalente à $H(\cdot,\omega)$ pour la mesure de Lebesgue.

(b) Il existe un processus progressif K, tel que, pour tout ω, la trajectoire $K(\cdot,\omega)$ soit équivalente à $H(\cdot,\omega)$ pour la mesure de Lebesgue.

(c) X est adapté (ou, ce qui revient au même, prévisible).

Démonstration. Il est évident que (a) entraîne (b) et que (b) entraîne (c). Pour prouver que (c) entraîne (a), supposons la condition (c) remplie, et posons

$$K(t,\omega) = \lim_n \left[X(t,\omega)-X\left(\frac{n}{n+1}\, t,\omega\right)\right] \left(t - \frac{n}{n+1}\, t\right)^{-1}$$

pour tout couple (t,ω) tel que la limite en question existe et soit finie; posons en outre $K(t,\omega)=0$ pour les autres couples (t,ω).
Puisque le processus X est prévisible, il en est de même de K. En outre, le théorème de dérivation de Lebesgue assure que chaque trajectoire de K est équivalente, pour la mesure de Lebesgue, à la trajectoire correspondante de H.

(2.2) EXEMPLE. Nous nous proposons maintenant de démontrer que l'espace (Ω,A) et la filtration $(F_t)_{0<t<\infty}$ peuvent être choisis de telle manière qu'il existe un processus H, mesurable et adapté, ne remplissant pas les conditions équivalentes (a), (b), (c) de la proposition précédente (donc, en particulier, non progressif).

A cet effet, désignons par Ω l'ensemble de toutes les fonctions réelles ω semicontinues inférieurement sur $]0,\infty[$, avec $\int_0^t |\omega(s)|ds<\infty$ pour tout nombre réel $t>0$. Posons $H(t,\omega)=\omega(t)$ et désignons par A la tribu engendrée par les fonctions de la forme $\inf_{s\in J} H_s$, avec J intervalle compact contenu dans $]0,\infty[$. Désignons enfin par (F_t) la filtration naturelle du processus H. On voit immédiatement que H est mesurable: il suffit en effet de remarquer que, pour tout nombre réel c, l'ensemble $\{H>c\}$ est la réunion des ensembles de la forme

$$J \times \{\inf_{s\in J} H_s > c\} ,$$

avec J intervalle compact, à extrémités rationnelles, contenu dans $]0,\infty[$.

Cependant le processus X défini par (1.2) n'est pas adapté. Pour le voir, fixons $t>0$ et supposons, en raisonnant par l'absurde, que la variable aléatoire X_t soit mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_t$. Il existe alors une partie dénombrable S de $]0,t]$, telle que X_t prenne la même valeur sur deux éléments ω,ω' de Ω ayant une même restriction à S. Mais ceci est impossible, comme on le voit en prenant ω égal à la constante 1, et ω' égal à l'indicatrice dans $]0,\infty[$ d'un ensemble ouvert contenant S et de mesure (au sens de Lebesgue) inférieure à t.

3. RESULTATS AVEC PROBABILITE.

Revenons au cas général, mais supposons maintenant l'espace $(\Omega,\mathcal{A})$ muni d'une loi P.

On a alors la proposition suivante:

(3.1) PROPOSITION. Soit H un processus mesurable, vérifiant la condition (1.1), et considérons le processus X défini par (1.2). Les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) H est équivalent, pour la mesure $\lambda\otimes P$, à un processus prévisible.

(b) H est équivalent, pour la mesure $\lambda\otimes P$, à un processus mesurable adapté.

(c) X admet une modification adaptée.

(d) X est indistinguable d'un processus prévisible.

Démonstration. Il est évident que (a) entraîne (b).

Pour prouver que (b) entraîne (c), supposons que K est un processus mesurable adapté, équivalent à H pour la mesure $\lambda\otimes P$. Fixons $t>0$, et montrons que la variable aléatoire X_t est équivalente à une variable aléatoire mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$. On peut se ramener par troncature au cas où le processus K est borné. Fixons une variable aléatoire V bornée, orthogonale à toute variable aléatoire (bornée) $\mathcal{F}_t$-mesurable. On a alors

$$\int P(d\omega)V(\omega)X_t(\omega) = \int P(d\omega)V(\omega)\int_0^t K(s,\omega)ds$$
$$= \int_0^t ds \int P(d\omega)V(\omega)K(s,\omega) = 0,$$

d'où l'assertion (voir [2], ch. II, n. 9,b, p. 29).

Pour prouver que (c) entraîne (d), supposons maintenant que $\tilde{X}$ est un processus adapté qui est une modification de X. Choisissons un ensemble dénombrable D, partout dense dans $]0,\infty[$, et considérons le processus Y, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, défini par

$$Y(t,\Omega) = \liminf_{s\uparrow\uparrow t,\, s\in D} \tilde{X}(s,\omega).$$

On a $Y = \sup_n Y^n$, où

$$Y^n(t,\omega) = \inf\{\tilde{X}(s,\omega) : s\in D,\ \frac{n}{n+1}\, t \leq s<t\}.$$

Puisque Y^n est prévisible, il en est de même de Y. Par conséquent, le processus réel Z qui coïncide avec Y sur l'ensemble où Y est fini, et avec 0 ailleurs, est prévisible. Ce processus est indistinguable de X. En effet, pour tout ω appartenant au complémentaire de l'ensemble négligeable $\cup_{s\in D}\{X_s \neq \tilde{X}_s\}$, les deux trajectoires $X(\cdot,\omega)$, $Z(\cdot,\omega)$ sont identiques.

Enfin, pour prouver que (d) entraîne (a), supposons que Z est un processus prévisible, indistinguable de X, et définissons K comme dans la démonstration de (2.1), mais avec Z à la place de X.
On voit alors que K est prévisible, et équivalent à H pour la mesure $\lambda \otimes P$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K.L. CHUNG, R.J. WILLIAMS, Introduction to Stochastic Integration. Birkhäuser, 1983.

[2] C. DELLACHERIE, P.-A. MEYER, Probabilités et potentiel. Chap. I à IV. Hermann, 1975.