SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

RÉMI LÉANDRE

Sur le théorème de l’indice des familles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 348-413
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__348_0>

SUR LE THEOREME DE L'INDICE DES FAMILLES

R. LEANDRE

INTRODUCTION : Cet article est destiné à simplifier le traitement probabiliste intervenant dans la preuve de J.M. Bismut du théorème de l'indice des familles ([B.1]). Il est aussi destiné à en faire une présentation pédagogique. Nous ferons ainsi un grand nombre de rappels géométriques destinés aux lecteurs probabilistes et un grand nombre de rappels probabilistes destinés aux non probabilistes.

I. GENERALITES ET MOTIVATIONS :

I.1) Position du problème :

Soient V une variété C^∞ compacte de dimension d et deux fibrés vectoriels $E \overset{\pi}{\to} V$ et $F \overset{\pi}{\to} V$ au-dessus de V (c'est-à-dire deux familles d'espaces vectoriels de dimension constante E_x et F_x paramétrés par $x \in V$, dépendant de façon C^∞ de x). Soit P un opérateur différentiel d'ordre m appliquant l'ensemble des sections C^∞ de V dans E, noté $\Gamma^\infty(V,E)$, sur l'ensemble des sections C^∞ de V dans F, $\Gamma^\infty(V,F)$ (c'est-à-dire l'ensemble des applications C^∞ φ de V dans $E : x \to \varphi(x) \in E_x$). Rappelons que seule la partie d'ordre m de P possède en coordonnées locales une signification intrinsèque : c'est une matrice à dim E colonnes et dim F lignes dont les coefficients a_{ij} sont des opérateurs différentiels de la forme $\sum_{|\alpha|=m} c_{i,j}(\alpha)(x) \frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}}$, x appartenant à V ($\simeq \mathbb{R}^d$ localement), et (α) étant un multi-indice sur $\mathbb{R}^d$. Notons $a_{i,j}(x,\xi)$, $x \in V$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, le polynôme en ξ, $\sum_{|\alpha|=m} c_{i,j}(\alpha)(x)(i\,\xi)^\alpha$. On dit que P est elliptique si pour tout x de V,

$$\inf_{|\xi|=1} |\det (a_{i,j}(x,\xi))| > 0. \tag{1.1}$$

Cette expression s'interprète de façon correcte en utilisant le fibré cotangent de V : ainsi $(x,\xi) \to a_{i,j}(x,\xi)$ apparaît comme une fonction définie sur ce cotangent ([Tr]). Mais, comme notre souci est de montrer la philosophie des choses et non d'être rigoureux, nous n'insisterons pas.

Rappelons quelques propriétés des opérateurs elliptiques ([Gi]) : ce sont des opérateurs de Fredholm de $\Gamma^\infty(V,E)$ dans $\Gamma^\infty(V,F)$, essentiellement car V <u>est compacte</u> (Nous omettrons de parler d'espaces de Sobolev). Lorsque l'on a un opérateur de

Fredholm P, on définit son indice par la formule :

(1.2) $\quad\quad$ Ind P = dim Ker P - dim Coker P.

L'objectif du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer est de donner une formule explicite de l'indice d'un opérateur elliptique P ([A-S.1], [A-S.2]).

Supposons maintenant que l'opérateur P dépende de façon C^{∞} d'un paramètre y appartenant à une variété compacte B. On le notera P_y. Son noyau Ker P_y est donc un sous-espace de dimension finie de l'ensemble $\Gamma^{\infty}(V,E)$, et son conoyau Coker P_y un sous-espace de dimension finie de l'ensemble $\Gamma^{\infty}(V,F)$. Considérons un ouvert O de B, tel que la dimension de Ker P_y et Coker P_y reste fixe sur O : Ker P_y et Coker P_y définissent alors un fibré au-dessus de O ([A-S.3]). Mais ils ne définissent pas de fibré au-dessus de B, à cause des sauts de dimension éventuels. Toutefois, la <u>différence</u> dim Ker P_y - dim Coker P_y ne dépend pas de y. Cela suggère que la "différence" du noyau Ker P_y et du conoyau Coker P_y définit un "fibré" au-dessus de B. Reste à définir ce qu'on entend par "différence" de deux fibrés. Faisons au préalable la remarque suivante : soit ψ un isomorphisme du fibré $E' \to V$ sur le fibré $E \to V$, c'est-à-dire un difféomorphisme de E' sur E qui coïncide avec l'identité sur V et qui applique la fibre de E' en x sur la fibre de E en x au moyen d'un isomorphisme linéaire. Considérons un autre isomorphisme ϕ du fibré $F \to V$ sur le fibré $F' \to V$. $\phi \circ P_y \circ \psi = P'_y$ est un opérateur elliptique d'ordre m appliquant $\Gamma^{\infty}(V,E')$ sur $\Gamma^{\infty}(V,F')$. Coker P_y et Coker P'_y sont isomorphes, ainsi que Ker P_y et Ker P'_y. Cela justifie que nous ayons à définir la "différence" Ker P_y - Coker P_y à un isomorphisme de fibré sur B près. Ceci est l'objet de la K-théorie ([Gi], [A]).

Considérons l'ensemble de tous les fibrés vectoriels complexes au-dessus de B, muni de l'opération somme directe : on identifie deux fibrés vectoriels s'ils sont isomorphes. L'opération somme directe est compatible avec notre identification, et on obtient ainsi un demi-groupe. Lorsque l'on a un demi-groupe, on peut construire un groupe. Dans le cas de $\mathbb{N}$, on obtient $\mathbb{Z}$. Dans la situation présente, on obtient le groupe de Grothendieck K(B) qui permet de "retrancher" les fibrés à équivalence près. Si $E \to B$ est un fibré vectoriel au-dessus de B, on notera [E] l'élément de K(B) théorie associé (cf. la remarque 1 après la bibliographie).

Nous pouvons maintenant donner une formulation exacte du problème. Soient M, V, B trois variétés compactes : supposons que $M \to B$ est une fibration de fibre V (localement, M est de la forme $B \times V$). Au niveau des notations, cela se traduira par les conventions suivantes : y est l'élément générique de l'ensemble des paramètres B, x l'élément générique de la fibre V_y. Les indices correspondant à $y \in B$ seront des lettres grecques, ceux à x des lettres romaines. Introduisons deux fibrés vectoriels complexes au-dessus de M, $E \to M$ et $F \to M$. Par restriction, ils définissent des fibrés vectoriels complexes $E_y \to V_y$ et $F_y \to V_y$ au-dessus de la fibre V_y de $y \in B$. Soit P un opérateur différentiel de $\Gamma^\infty(M,E)$ dans $\Gamma^\infty(M,F)$, qui sur chaque fibre V_y s'identifie à un opérateur P_y elliptique d'ordre m, qui applique $\Gamma^\infty(V_y,E_y)$ sur $\Gamma^\infty(V_y,F_y)$. On cherche à définir l'indice de la famille P_y[Ind P], au sens de la K(B)-théorie, de façon à ce qu'il possède les propriétés naturelles suivantes :

i) Si dim Ker P_y et dim Coker P_y ne dépendent pas du paramètre y, Ker P_y et Coker P_y définissent des fibrés au-dessus de l'espace des paramètres B, et l'on doit avoir naturellement :

(1.3) $$[\text{Ind } P.] = [\text{Ker } P.] - [\text{Coker } P.].$$

ii) [Ind P.] ne dépend que du terme de plus haut degré de P., et si les familles P. et Q. sont homotopes dans la classe des opérateurs différentiels elliptiques, on doit avoir naturellement [Ind P.] = [Ind Q.] (stabilité de l'indice).

Atiyah et Singer procèdent alors de la façon suivante pour construire [Ind P.] ([A-S.3]) : ils remarquent d'abord que le fait que V est compacte et que P_y est de conoyau de dimension finie implique qu'il existe un nombre fini de sections C^∞ ($\varphi_1,\ldots,\varphi'_q$) de M dans F telles que la famille d'opérateurs Q_y de $\Gamma^\infty(V_y,E_y) \oplus \mathbb{C}^q$ dans $\Gamma^\infty(V_y,F_y)$

(1.4) $$(\varphi_y,\lambda_1,\ldots,\lambda_q) \to P_y(\varphi_y) + \Sigma\, \lambda_i\, \varphi'_{i,y}$$

soit une famille d'opérateurs de Fredholm surjectifs. La famille d'espaces vectoriels de dimension finie $y \to \text{Ker } Q_y$ constitue donc un fibré vectoriel au-dessus de B. Comme on introduit q variables supplémentaires $\lambda_1,\ldots,\lambda_q$, il est naturel de poser :

(1.5) $$[\text{Ind } P.] = [\text{Ker } Q.] - [\mathbb{C}^q],$$

$[\mathbb{C}^q]$ désignant l'élément de K(B)-théorie du fibré trivial $B \times \mathbb{C}^q$ au-dessus de B. Il s'agit donc de calculer [Ind P.]. Mais que signifie calculer [Ind P.] ? Ce que l'on sait bien "calculer", ce sont des classes de cohomologie. A chaque élément de K(B)-théorie, on va essayer d'associer un élément de la cohomologie de B. Pour cela, on procède ainsi : soit $E \to B$ un fibré complexe au-dessus de B ; on définit son caractère de Chern ch(E) de la façon suivante : on munit E d'une quelconque connexion ∇^E dont la courbure est notée R^E (voir le chapitre I.2 et I.3 à ce sujet). R^E_y est une 2-forme à valeurs dans l'ensemble des morphismes linéaires de la fibre E_y de E. L'ensemble des formes de degré pair à valeurs dans $\mathbb{C}$ est un anneau commutatif. On peut définir $\hat{\exp}\,[-\frac{R^E}{2i\pi}]$ de la façon habituelle : $\hat{\exp}\,[-\frac{R^E}{2i\pi}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-\frac{R^E}{2i\pi})^n$. La remarque essentielle est que cette somme est finie. De plus, c'est une forme de degré pair à valeur dans l'ensemble des isomorphismes linéaires de E. Sa trace $\mathrm{tr}\,(\hat{\exp}\,[-\frac{R^E}{2i\pi}])$ est donc une forme de degré pair à valeurs dans $\mathbb{C}$. La propriété essentielle ([D-N-F], [Gi]) est que sa classe de cohomologie ne dépend pas de la connexion $\nabla^E_\cdot$ choisie initialement. Cette classe de cohomologie est par définition le caractère de Chern ch(E) de E. On vérifie immédiatement que si deux fibrés complexes $E \to B$ et $E' \to B$ sont isomorphes, ch(E) et ch(E') coïncident, et que l'on peut donc définir ch([E]) sans ambiguïté. De plus, la partie de degré 0 de ch[E] est égale à la dimension de E. Plus généralement, si $E \to B$ et $F \to B$ sont deux fibrés complexes, on a :

$$\text{(1.6)} \qquad \mathrm{ch}\,([E \oplus F]) = \mathrm{ch}\,([E]) + \mathrm{ch}\,([F]).$$

On peut donc prolonger ch en un morphisme de K(B) dans le groupe de cohomologie de B. Le fait remarquable ([Gi]) est qu'il est injectif. Il suffit donc de calculer ch ([Ind P.]) pour déterminer [Ind P.].

Remarque : En fait c'est un isomorphisme de groupe entre K(B) et le groupe de cohomologie paire de B ([Gi] p. 235).

Remarque : Nous ne considérons ici que des opérateurs P_y et des fibrés vectoriels en fibre E_y dépendant de façon C^∞ de y. En fait, Atiyah et Singer considèrent le cas d'opérateurs P_y dépendant de façon continue de y. D'autre part, ils traitent le cas d'opérateurs pseudo-différentiels. Nous éviterons au maximum de le faire, dans un souci pédagogique.

I.2) Le formalisme de Quillen :

Notons H^∞_{+y} l'espace des sections de V_y dans E et $H^\infty_{-,y}$ l'espace des sections de V_y dans F. On se restreint évidemment à des sections C^∞. $H^\infty_{+.}$ et $H^\infty_{-,.}$ définissent deux fibrés de dimension infinie au-dessus de B. P. est un morphisme linéaire de $H^\infty_{+.}$ dans $H^\infty_{-.}$. Notons $H'_{-,y}$ l'image de P_y et $H'_{+,y}$ un supplémentaire du noyau de P_y. P_y est un isomorphisme de $H'_{+,y}$ dans $H'_{-,y}$. Formellement, on a, au niveau de la K(B)-théorie :

$$\text{(1.7)} \qquad \begin{aligned} &[\mathrm{Ind}\,P] = [\mathrm{Ker}\,P. - \mathrm{Coker}\,P.] = \\ &= [\mathrm{Ker}\,P. \oplus H'_{+,.} - (\mathrm{Coker}\,P. \oplus H'_{-.})] = [H^\infty_{+.}] - [H^\infty_{-.}]. \end{aligned}$$

Formellement, on cherche donc à calculer le "caractère de Chern" de la "différence" de deux fibrés de dimension infinie. Pour ce faire, on ne peut utiliser la formule :

$$\text{(1.8)} \qquad \mathrm{ch}\,[H^\infty_{+.} - H^\infty_{-.}] = \mathrm{ch}\,[H^\infty_{+.}] - \mathrm{ch}\,[H^\infty_{-.}]$$

ne serait-ce que parce que les termes de degré 0 de ch $[H^\infty_{+.}]$ et de ch $[H^\infty_{-.}]$ sont égaux à la dimension de ces espaces, c'est-à-dire à $+\infty$. Toutefois, on peut annuler directement les divergences apparaissant dans ch $[H^{\infty}_{+.}]$ et dans ch $[H^{\infty}_{-.}]$: en théorie quantique des champs, c'est l'objet des calculs supersymétriques ([S p. 93] ; on peut aussi consulter [L-J] pour un exemple surprenant). Le mot "super" est ici issu de la physique, où il intervient dans des théories qui postulent une symétrie entre les bosons (particules transmettant une interaction, qui obéissent à la statistique de Bose-Einstein) et les fermions (particules qui interagissent, qui obéissent à la statistique de Fermi-Dirac).

Quillen ([Q]) a proposé un formalisme qui permet de calculer directement le caractère de Chern de la différence de deux fibrés de dimension finie, sans devoir calculer le caractère de Chern de chaque fibré. Rappelons brièvement son formalisme, avant de l'étendre à la dimension ∞. Soit $E_s = E_+ \oplus E_-$ un super-espace vectoriel. Désignons par $\pi_{E_\pm}$ la projection sur $E_\pm$ suivant $E_\mp$. Notons $\tilde{\gamma}_5$ l'involution donnant le grade du super-vecteur appartenant à E_s :

(1.9) $$\tilde{\gamma}_5 = \pi_{E_+} - \pi_{E_-} .$$

End E_s est muni d'une graduation, les éléments pairs commutant avec τ et les éléments impairs anticommutant. Ainsi un opérateur U appartient à $\mathrm{End}_+ E_s$ si matriciellement, il est de la forme $\begin{array}{c} E_+ \\ E_- \end{array}\begin{bmatrix} U_+^+ & 0 \\ 0 & U_-^- \end{bmatrix}$ et il appartient à $\mathrm{End}_- E_s$, si matriciellement, il s'écrit $\begin{bmatrix} 0 & U_-^+ \\ U_-^+ & 0 \end{bmatrix}$. Soit $U = \begin{bmatrix} U_+^+ & U_+^- \\ U_-^+ & U_-^- \end{bmatrix}$ un élément de End E_s. On appelle supertrace de U la quantité $\mathrm{Tr}_s\, U = \mathrm{Tr}\, U_+^+ - \mathrm{Tr}\, U_-^-$. Alors que la trace d'un opérateur U s'annule sur les commutateurs $[U,V]$ ($\mathrm{Tr}\,(UV - VU) = 0$), la supertrace s'annule sur les supercommutateurs $[U,V]_s$ ($\mathrm{Tr}_s\,(UV - (-1)^{\deg U \deg V}\, VU) = 0$, lorsque U et V ont un degré).

Donnons maintenant un exemple simple de super-espace : supposons que $E_s = \Lambda\, \mathbb{R}^d$, algèbre extérieure complexifiée de $\mathbb{R}^d$. $\Lambda\, \mathbb{R}^d$ se décompose en $\Lambda_+ \mathbb{R}^d \oplus \Lambda_- \mathbb{R}^d$, $\Lambda_+ \mathbb{R}^d$ étant l'espace des formes de degré pair et $\Lambda_- \mathbb{R}^d$ celui des formes de degré impair. Soit η_o une p-forme $p \leq d$: l'application de $\Lambda\, \mathbb{R}^d$ dans $\Lambda\, \mathbb{R}^d$

(1.10) $$\eta \to \eta_o \wedge \eta$$

est un élément de $\mathrm{End}_+ (\Lambda\, \mathbb{R}^d)$ si le degré de η_o est pair et un élément de

$\mathrm{End}_{-}(\Lambda\mathbb{R}^d)$ si le degré de η_o est impair.

De la même façon que l'on peut faire dépendre un espace vectoriel d'un paramètre (théorie des fibrés), on peut faire dépendre un super-espace d'un paramètre. Plus précisément, soient B une variété C^∞ compacte de dimension n et $E \xrightarrow{\pi} B$ un fibré vectoriel complexe dont la fibre E_y est modelée sur un espace E_o. Soit $\Lambda(B)$ le fibré des formes extérieures à valeurs dans $\mathbb{C}$ au-dessus de B. On peut définir le fibré $\Lambda^p(B)\otimes E$ des formes extérieures de degré p à valeurs dans E. Dans ce cas $\Lambda(B)\otimes E = \sum_p \Lambda^p(B)\otimes E$ est un $\Lambda(B)$-module à gauche, et localement, toute section C^∞ de B dans $\Lambda(B)\otimes E$ s'écrit $\Sigma\,\eta^i(y)\,e_i$, $\eta^i(y)$ une forme extérieure à valeur complexe et e_i un vecteur fixe de E_o. De plus, le $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ degré de $\eta^i(y)\,e_i$ coïncide avec celui de $\eta^i(y)$. Dans le cas où l'on a un fibré vectoriel complexe $E_s \xrightarrow{\pi} B$ dont la fibre est modelée sur un super-espace fixe $E_{s,o}$, on peut encore définir le fibré vectoriel $\Lambda(B)\otimes E_s = \sum_p \Lambda^p(B)\otimes E_s$ des formes extérieures à valeur dans E_s, toute section locale de $\Lambda(B)\otimes E_s$ s'écrivant $\Sigma\,\eta^i(y)\,u_i$. Toutefois, la $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ graduation de $\eta_i(y)\,e_i$ coïncide avec le produit dans $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ des $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ graduations de η^i et de u_i. Pour marquer cette différence, nous utiliserons la notation $\Lambda(B)\hat{\otimes} E_s$ plutôt que la notation $\Lambda(B)\otimes E_s$.

Nous allons maintenant définir l'analogue d'une connexion dans le contexte des super-espaces : ce seront des super-connexions. Rappelons d'abord ([Gi] p. 88) qu'une connexion $\nabla_.$ est un opérateur d'ordre 1

(1.11) $$\Gamma^\infty(B,E) \xrightarrow{\nabla_.} \Gamma^\infty(B,\Lambda(B)\otimes E)$$

tel que pour tout $f\in C^\infty(B)$, tout $\varphi\in\Gamma^\infty(B,E)$

(1.12) $$\nabla_.(f\,\varphi) = df\,\varphi + f\,\nabla_.\,\varphi.$$

∇ s'étend convenablement en un opérateur d'ordre 1 de $\Gamma^\infty(B,\Lambda(B)\otimes B)$ tel que pour tout $\varphi\in\Gamma^\infty(B,\Lambda(B)\otimes B)$ et toute forme $\eta\in\Gamma^\infty(B,\Lambda(B))$,

(1.13) $$\nabla_.(\eta\wedge\varphi) = d\eta\wedge\varphi + (-1)^{\deg\eta}\,\eta\wedge\nabla_.\varphi\,.$$

On remarque que si $\varphi\in\Gamma^\infty(B,E)$ et si $f\in C^\infty(B)$,

(1.14) $$\nabla_.^2(f\,\varphi) = f\,\nabla_.^2\,\varphi.$$

Donc $\nabla_.^2$ est une section de B dans $\Lambda^2(B)\otimes\mathrm{End}\,E$ (en d'autres termes, $\nabla_.^2$ est une 2-forme à valeur dans End E). C'est le tenseur de courbure de la connexion $\nabla_.$. En coordonnées locales, il existe une 1-forme à valeurs dans End E_o, notée $A_.(y)$, qui possède la propriété suivante : soit $\varphi(y) = \Sigma\,\eta^i(y)\,e_i$, η_i étant une forme à valeurs dans $\mathbb{C}$ et e_i un vecteur fixe de E_o. On a alors :

(1.15) $$\nabla.\varphi(y) = \Sigma\, d\eta^i(y)\, e_i + \Sigma(-1)^{\deg \eta^i}\, \eta^i(y) \wedge A(y)\, e_i .$$

De plus, l'opérateur $\tilde{A}$ qui à φ associe dans (1.15) l'expression $\Sigma(-1)^{\deg \eta^i}\, \eta^i(y) \wedge A(y)\, e_i$ est un <u>opérateur impair</u> au sens où $\tilde{A}(\eta \wedge \varphi) = (-1)^{\deg \eta}\, \eta . \tilde{A}(\varphi)$ pour toute forme η à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Pour définir une super-connexion, il faudra tenir compte du fait qu'une graduation supplémentaire intervient. Au niveau des notations cela se traduira que nous utiliserons le symbole $\hat{\otimes}$ plutôt que $\otimes$. Introduisons l'ensemble des formes de B à valeurs dans End E_s, noté $\Lambda(B)\hat{\otimes}\,\mathrm{End}\, E_s$. Considérons deux sections de B dans End E_s notées U et U' et deux formes η et η' définies sur B à valeurs complexes. Posons :

(1.16) $$(\eta \hat{\otimes} U)(\eta' \hat{\otimes} U') = (-1)^{\deg U \deg \eta'}\, (\eta \wedge \eta')\hat{\otimes}(UU').$$

$\Lambda(B)\hat{\otimes}\,\mathrm{End}\, E_s$ est ainsi muni d'une structure de super-algèbre. On fait agir $\Lambda(B)\hat{\otimes}\,\mathrm{End}\, E_s$ sur $\Lambda(B)\hat{\otimes} E_s$ en posant si U est une section de B dans End E_s, e une section de B dans E_s et η, η' deux formes à valeurs complexes :

(1.17) $$(\eta \hat{\otimes} U)(\eta' \hat{\otimes} e) = (-1)^{\deg U \deg \eta'}\, \eta \wedge \eta' \hat{\otimes} Uv.$$

En particulier, si $U = \begin{bmatrix} 0 & U_+^- \\ U_-^+ & 0 \end{bmatrix}$, on a :

(1.18) $$U(\eta e) = (-1)^{\deg \eta}\, \eta\, U(e)$$

(ou si l'on préfère $(1 \hat{\otimes} U)(\eta \hat{\otimes} e) = (-1)^{\deg \eta}\, \eta \hat{\otimes} U(e))$
et non $U(\eta e) = \eta\, U(e)$ $((1 \otimes U)(\eta \otimes e) = \eta \otimes U(e))$, ce qui serait la relation obtenue si l'on ne tenait pas compte de la $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ graduation supplémentaire. On dira dans ce cadre qu'un élément V de $\Lambda(B)\hat{\otimes}\,\mathrm{End}\, E_s$ est pair si $V(\eta \hat{\otimes} e) = V(\eta e) = \eta V(e)$ et est impair si $V(\eta e) = (-1)^{\deg \eta}\, \eta V(e)$ (nous omettrons d'écrire les $\hat{\otimes}$ pour simplifier l'écriture). Localement, toute section d'opérateurs pairs s'écrit $\Sigma\, \eta_+^i(y) \hat{\otimes} U_{i,+} + \Sigma\, \eta_-^i(y) \hat{\otimes} U_{i,-}$, η_+^i étant une forme complexe de degré pair et U_{i+} un élément fixe de End E_{s_o} de degré pair, alors que η_-^i et U_{i-} sont de degrés impairs. Localement, toute section d'opérateurs impairs s'écrira $\Sigma\, \eta_-^i(y)\, U_{i+} + \Sigma\, \eta_+^i(y) U_{i-}$, le signe $\hat{\otimes}$ ayant été omis pour simplifier. De plus, ce formalisme permet d'étendre à $\Lambda(B)\hat{\otimes}\,\mathrm{End}\, E_s$ la notion de super-trace en posant :

(1.19) $\qquad \mathrm{Tr}_s\,(\eta U) = \eta\,\mathrm{Tr}_s\,U.$

On peut maintenant donner la définition suivante :

Définition I.1 : On appelle superconnexion un opérateur différentiel $\nabla_{s.}$ impair du premier ordre qui agit sur $\Lambda(B)\hat{\otimes} E_s$ et tel que pour tout $\eta \in \Gamma^\infty(B,\Lambda(B))$ et tout $\varphi \in \Gamma^\infty(B,\Lambda(B)\hat{\otimes} E_s)$, on ait :

$$\nabla_{s.}(\eta\,\varphi) = d\eta\,\varphi + (-1)^{\deg \eta}\,\eta\,\nabla_{s.}\,\varphi. \tag{1.19}$$

Il y a "beaucoup plus" de super-connexions que de connexions. Pour s'en rendre compte, nous allons regarder la forme d'une super-connexion en coordonnées locales. Il existe des $2p+1$ formes $A^+_{+,p}(y)$ à valeurs dans End $E_{+,o}$, des $2p+1$ formes $A^-_{-,p}(y)$ à valeurs dans End $E_{-,o}$, des $2p$ formes $A^+_{-,p}(y)$ à valeurs dans End $[E_{+,o}, E_{-,o}]$ et des $2p$ formes $A^-_{+,p}(y)$ à valeurs dans End $[E_{-,o}, E_{+,o}]$ possédant la propriété suivante : si la section φ de B dans $\Lambda(B)\hat{\otimes} E_s$ s'écrit localement $\Sigma\,\eta^i_+(y)\,e_{i+} + \Sigma\,\eta^i_-(y)\,e_{i-}$, les e_{i+} et e_{i-} étant des vecteurs fixes de $E_{+,o}$ et de $E_{-,o}$, on a :

$$\begin{aligned}\nabla_{s.}\varphi(y) &= \Sigma\, d\eta^i_+(y)\,e_{i+} + \Sigma\, d\eta^i_-(y)\,e_{i-} + \\ &+ \Sigma(-1)^{\deg \eta^i_+}\ \eta^i_+(y)\ \{\Sigma_p\, A^+_{+,p}(y)\,e_{i+} + \\ &+ \Sigma_p\, A^+_{-,p}(y)\,e_{i+}\} + \Sigma(-1)^{\deg \eta^i_-}\ \eta^i_-(y) \\ &\{\Sigma_p\, A^-_{-,p}(y)\,e_{i-} + \Sigma_p\, A^-_{+,p}(y)\,e_{i-}\}.\end{aligned} \tag{1.20}$$

Ainsi, contrairement aux connexions, une super-connexion peut augmenter le degré d'une p forme à valeurs dans E_s d'un degré arbitraire. Si l'on adopte le système de notation de [B-V], introduction, on peut décomposer ∇_s en $\nabla_s^{[0]} + \nabla_s^{[1]} + \ldots + \nabla_s^{[n]}$, $\nabla_s^{[i]}$ transformant une p-forme en une $p+i$-forme. Nous dirons que $\nabla_s^{[i]}$ est la partie de rang i de la super-connexion ∇_s. $\nabla_s^{[1]}$ est alors une connexion. On remarque que ∇_s^2 vérifie encore (1.14) car ∇_s vérifie (1.19). ∇_s^2 est appelé courbure de la super-connexion. On la notera R_s. Dans l'appendice de la partie II, nous calculerons quelques courbures.

Dans le cadre d'un fibré ordinaire, Tr exp $[-\frac{iR}{2\pi}]$ est indépendant en cohomologie de la connexion choisie sur le fibré E. Conformément à notre philosophie,

$\mathrm{Tr}_s \exp[-\frac{iR_s}{2\pi}]$ est indépendant en cohomologie de la super-connexion choisie sur le super-fibré E_s. Or il y a une super-connexion particulièrement simple sur le super-fibré E_s. Soient ∇_+ une connexion sur E_+, et ∇_- une connexion sur E_-. $\nabla_+ \oplus \nabla_-$ définit une super-connexion sur $E_s = E_+ \oplus E_-$. Sa courbure R_s est égale à $\begin{bmatrix} R_+ & 0 \\ 0 & R_- \end{bmatrix}$, R_+ et R_- désignant la courbure de ∇_+ et de ∇_-. De plus,

$$\exp[-\frac{iR_s}{2\pi}] = \begin{bmatrix} \exp[-\frac{iR_+}{2\pi}] & 0 \\ 0 & \exp[-\frac{iR_-}{2\pi}] \end{bmatrix}. \text{ On a donc}$$

(1.21) $$\mathrm{Tr}_s \exp[-\frac{iR_s}{2\pi}] = \mathrm{Tr} \exp[-\frac{iR_+}{2\pi}] - \mathrm{Tr} \exp[-\frac{iR_-}{2\pi}].$$

Ceci achève de prouver le théorème suivant :

Théorème I.2 (Quillen) : Soit une super-connexion ∇_s sur E_s. $\mathrm{Tr}_s \exp[-\frac{iR_s}{2\pi}]$ est un représentant en cohomologie de $\mathrm{ch}([E_+] - [E_-])$.

I.3) Famille d'opérateurs de Dirac :

L'introduction des objets qui suivent est motivée par la remarque suivante : Soit $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$ le Laplacien sur $\mathbb{R}^4$. En général, il est impossible de trouver une racine carrée de $-\Delta$ qui soit un opérateur différentiel d'ordre 1. Le prix à payer à cette fin est le suivant : si il existe un espace vectoriel $S(\mathbb{R}^4)$ et des matrices O_1, O_2, O_3, O_4 qui agissent sur cet espace, et telles que $O_i^2 = -I$, $O_i O_j + O_j O_i = 0$, alors l'opérateur vectoriel $O_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + O_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + O_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + O_4 \frac{\partial}{\partial x_4}$ est une racine carrée de $-\Delta$. Reste à construire ces matrices (de Dirac) et cet espace.

$\mathbb{R}^d$ est l'espace canonique euclidien de dimension d ; $e_1, \ldots, e_d$ désigne la base canonique orientée directe de $\mathbb{R}^d$. Cliff $(\mathbb{R}^d)$ est l'algèbre de Clifford associée, c'est-à-dire la plus petite algèbre réelle contenant $\mathbb{R}^d$ assujettie aux conditions :

(1.22) $$e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_i^j.$$

L'algèbre de Clifford est ainsi un espace vectoriel réel de dimension 2^d, qui ressemble fort à une algèbre extérieure, mis à part que l'on a ici $e_i^2 = -1$ et non $de_i \wedge de_i = 0$ (cf. chap. III). Si $J = j_1 < \dots < j_k$ est une partie de $\{1,\dots,d\}$, $e_J = e_{j_1} e_{j_2} \dots e_{j_k}$ constitue une base de Cliff $(\mathbb{R}^d)$. On peut munir Cliff $(\mathbb{R}^d)$ d'une structure euclidienne de façon à ce que cette base soit une base orthonormée. L'intérêt d'introduire Cliff $(\mathbb{R}^d)$ est que l'on peut représenter simplement les éléments du groupe orthogonal en remarquant que si $v \in \mathbb{R}^d$, $\|v\| = 1$, l'application ρ_v de Cliff $(\mathbb{R}^d)$ dans Cliff $(\mathbb{R}^d)$ $u \to vuv$ applique $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ et coïncide avec la symétrie orthogonale de vecteur v dans $\mathbb{R}^d$. Cette remarque permet de construire le revêtement universel de SO (d) dont le π_1 est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ lorsque $d \geq 3$. En effet, considérons l'application transposition t de Cliff $(\mathbb{R}^d)$ dans Cliff $(\mathbb{R}^d)$: $t(e_{j_1},\dots,e_{j_k}) = e_{j_k},\dots,e_{j_1}$ ([Gi] Ch. 3.2). A v élément de Cliff $(\mathbb{R}^d)$ associons l'application ρ_v qui applique Cliff $(\mathbb{R}^d)$ dans Cliff $(\mathbb{R}^d)$:

$$u \to {}^t v u v. \tag{1.23}$$

$u \to \rho_v$ est un morphisme multiplicatif.

Si d est pair et >2, notons Spin $(\mathbb{R}^d)$ le sous-groupe multiplicatif des éléments de Cliff $(\mathbb{R}^d)$ tels que $v^t v = 1$. Si $v \in$ Spin $(\mathbb{R}^d)$, ρ_v est un élément de SO (d), et l'application ρ réalise un morphisme surjectif de Spin $(\mathbb{R}^d)$ dans SO (d) de noyau $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ([Gi] Ch. 3.2), et donc Spin $(\mathbb{R}^d)$ réalise le revêtement universel de SO (d). L'algèbre de Lie de SO (d) et de Spin $(\mathbb{R}^d)$ coïncide donc, et sont égales à l'espace $\mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$ des matrices anti-symétriques à coefficients réels à d lignes et à d colonnes. Toutefois, il faut se garder de faire des identifications purement formelles. Ainsi, si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$, on identifie A avec l'élément $\Sigma \frac{1}{2} a_{i,j} dx_i \wedge dx_j$ de $\Lambda^2(\mathbb{R}^d)$ (espace des 2 bornes sur $\mathbb{R}^d$) et avec l'élément $\frac{1}{4} \Sigma a_{i,j} e_i e_j$ de Cliff $(\mathbb{R}^d)$. Ce dernier $\frac{1}{4}$ peut sembler surprenant, mais il s'explique de la façon suivante ([Gi] 3.3). Soit $t \to g(t)$ un chemin C^∞ à valeurs dans SO (d) tel que $g(0) = I$, et $g'(0) = A$. Si on le remonte en un chemin à valeurs dans Spin $(\mathbb{R}^d)$,

de sorte que le diagramme
$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spin}\ (\mathbb{R}^d) \arrow[d, "\rho"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "g"'] & \mathrm{SO}\ (d) \end{tikzcd}$$
soit commutatif, on obtient $h'(0) = \frac{1}{4} \Sigma a_{ij} e_i e_j$. Pour s'en convaincre, on considère la courbe $g(t)$ dans SO (d).

$$\begin{aligned} g(t)\, e_1 &= \cos t\, e_1 + \sin t\, e_2 \\ g(t)\, e_2 &= \cos t\, e_2 - \sin t\, e_1 \\ g(t)\, e_j &= e_j \qquad j \geq 3. \end{aligned} \tag{1.24}$$

$$g'(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$ On remonte $g(t)$ dans Spin $(\mathbb{R}^d)$ en posant :

(1.25) $$h(t) = \cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2} e_2 e_1$$

de sorte que $h'(0) = \frac{1}{2} e_2 e_1 = \frac{1}{4} \Sigma a_{ij} e_i e_j$.

Pour accomplir le programme annoncé au début de cette section, il ne reste plus qu'à interpréter chaque e_i comme une matrice. Dans toute la suite de cet article, nous supposerons que $d = 2\ell$, et nous complexifierons Cliff $(\mathbb{R}^d)$. De la structure euclidienne sur Cliff $(\mathbb{R}^d)$, on déduit une structure hermitienne sur Cliff $(\mathbb{R}^d)$ complexifié. Soit $j \leq \ell$, et soit γ_j l'application de Cliff $(\mathbb{R}^d)$ complexifiée dans elle-même définie par :

(1.25) $$u \to i\, u e_{2j-1} e_{2j}$$

et soit $\tilde{\gamma}_5$ l'application

(1.26) $$u \to i^\ell e_1, \dots, e_d u.$$

Il est important de bien faire la distinction entre la multiplication à droite par u dans (1.25) et la multiplication à gauche dans (1.26). Les γ_j et les $\tilde{\gamma}_5$ sont des endomorphismes unitaires. De plus, on a $\gamma_j^2 = 1$, $\gamma_i \gamma_j = \gamma_j \gamma_i$ si $i \neq j$, et $\tilde{\gamma}_5^2 = 1$. Comme les γ_j commutent, on peut les diagonaliser simultanément. On décompose ainsi Cliff $(\mathbb{R}^d)$ en une somme directe $\Sigma \oplus F_{(\varepsilon_j)}$, chaque sous-espace $F_{(\varepsilon_j)}$ étant caractérisé par le fait que $\gamma_j = \varepsilon_j$ sur $F_{(\varepsilon_j)}$ ($\varepsilon_j = \pm 1$, $j = 1, \dots, \ell$). Comme les actions à droite et à gauche de Cliff $(\mathbb{R}^d)$ sur Cliff $(\mathbb{R}^d)$ commutent, chaque espace $F_{(\varepsilon_j)}$ est stable par l'action par multiplication à gauche de Cliff $(\mathbb{R}^d)$. Choisissons un de ces sous-espaces et appelons le S_d, espace des spineurs. $\tilde{\gamma}_5$ laisse invariant S_d. Comme $(\tilde{\gamma}_5)^2 = 1$, on décompose S_d en la somme orthogonale directe de $S_d^+ \oplus S_d^-$: si $u \in S_d^+$, $\tilde{\gamma}_5(u) = u$, et si $u \in S_d^-$, $\tilde{\gamma}^5(u) = -u$. Comme il y a 2^ℓ combinaisons possibles de $(\varepsilon_1, \dots, e_\ell)$ et comme tous les $F_{(\varepsilon_j)}$ sont isomorphes, S_d est de dimension complexe 2^ℓ. Ainsi Cliff $(\mathbb{R}^d)$ complexifiée de dimension $2^{2\ell}$, s'identifie par multiplication à gauche à une algèbre de matrice sur S_d, les relations de commutations (1.22) se conservant. Enfin, S_d^+ et S_d^- sont de dimension $2^{\ell-1}$ ([Gi] 3.2).

Il y a une autre façon d'introduire les espaces de spineurs. Il est possible en effet d'identifier $\mathbb{R}^d$ à $\mathbb{C}^{\frac{d}{2}}$ car d est paire (le problème est que cette identification n'a rien de canonique ; cela sera important quand on fera dépendre nos espaces de spineurs d'un paramètre). On considère l'algèbre extérieure complexe $\Lambda(\mathbb{C}^{\frac{d}{2}}) = \Lambda(\mathbb{C}^{\ell})$. Elle est de dimension 2^{ℓ} sur $\mathbb{C}$. On la munit du produit hermitien usuel, si bien que $\Lambda(\mathbb{C}^{\ell})$ se décompose en la somme orthogonale $\Lambda^{+}(\mathbb{C}^{\ell}) \oplus \Lambda^{-}(\mathbb{C}^{\ell})$. On fait agir $\mathbb{R}^d$ sur $\Lambda(\mathbb{C}^{\ell})$ en posant, si $v \in \mathbb{R}^d$ et si η est une p-forme extérieure :

$$(1.27) \qquad u.\eta = u\wedge\eta - (\mathrm{int}\ \bar{u})\eta,$$

$(\mathrm{int}\ \bar{u})\eta$ étant la p-1 forme extérieure :

$$(1.28) \qquad (u_1,\ldots,u_{p-1}) \to \eta(\bar{u},u_1,\ldots,u_{p-1}).$$

On vérifie ainsi que les opérations sur $\Lambda(\mathbb{C}^{\ell})$ définies par (1.27) satisfont aux relations de commutations (1.22). L'algèbre de Clifford sur $\mathbb{R}^d$ étant unique à un isomorphisme près, on a construit Cliff $(\mathbb{R}^d)$ à partir de $\Lambda(\mathbb{C}^{\ell})$, c'est-à-dire on a construit Cliff $(\mathbb{R}^d)$ à partir de sa représentation sur l'espace des spineurs alors que précédemment, on avait construit l'espace des spineurs à partir de Cliff $(\mathbb{R}^d)$ (cf. [Bl]). Ceci montre qu'il y a plusieurs façons de construire l'espace des spineurs. Les mathématiques étant bien faites, il va de soi que la représentation obtenue est unique à isomorphisme près (mais cela n'est pas une preuve). Le fait que cette représentation est unique, seulement à isomorphisme près, est ce qui va poser problème lorsqu'on va faire dépendre nos espaces de spineurs d'un paramètre.

Introduisons en effet une variété V compacte orientable, munie d'une structure riemanienne pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_V$. En général, il est impossible de globaliser à V la construction ponctuelle que l'on a fait précédemment ([Gi] Ch. 3.3). Lorsque ceci est possible, nous dirons que la variété V est spinorielle. Notons SO (V) le fibré des repères orthonormés directs au-dessus de V : on obtient dans ce cas un autre fibré, appelé fibré du groupe des spineurs, noté Spin (V), de fibre Spin $(\mathbb{R}^d)$, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$(1.29) \qquad \begin{tikzcd} & \mathrm{SO}\ (V) \arrow[d] \\ \mathrm{Spin}\ (V) \arrow[ur, "\rho"] \arrow[r] & V. \end{tikzcd}$$

Le noyau de ρ dans (1.29) est égal à $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ si $d = 2\ell$, $\ell > 1$. De plus, le fibré de Clifford Cliff (V) complexifié s'identifie à un fibré en algèbres de matrices agissant sur le fibré des spineurs S(V), de fibre S_d. S(V) est un fibré hermitien, se décompose en deux fibrés orthogonaux de fibre S_d^+ et S_d^-. En d'autres termes, S(V) est un fibré en super-espace, car S_d se décompose en $S_d^+ \oplus S_d^-$. Un vecteur tangent de V réalise une application de S(V) qui permute $S_+(V)$ et $S_-(V)$. Au sens de la terminologie donnée dans la section I.2, ce vecteur tangent définit un endomorphisme impair de S(V).

Rappelons qu'il existe une seule connexion ∇^V sur TV possédant les deux propriétés suivantes :

- elle est sans torsion ($\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$ pour tout champ de vecteurs X et Y)

- elle préserve la métrique ; ce qui signifie que pour tout champ de vecteurs X, Y, Z sur TV,

$$Z\langle X,Y\rangle_V = \langle \nabla_Z X,Y\rangle_V + \langle X,\nabla_Z Y\rangle_V. \tag{1.30}$$

Cette connexion s'appelle la connexion de Lévi-Civita sur TV. Elle se prolonge en une connexion sur Cliff (V), Spin (V) et S(V). Soit φ un élément de S_d. En coordonnées locales, on a ainsi :

$$\nabla^V \eta\varphi = d\eta\varphi + (-1)^{\deg\eta}\, \eta\,\Sigma\, \frac{1}{4} \langle \nabla_{.}\, e_i, e_j\rangle e_i e_j \varphi, \tag{1.31}$$

(e_i) désignant une section locale de base orthonormée de TV. Dans (1.31), φ ne dépend pas de $x \in V$, mais la forme η dépend de x. (1.31) s'écrit aussi,

$$\nabla^V_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x) + \Sigma\, \frac{1}{4} \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} e_i, e_j\rangle_V\, e_i e_j\, \varphi(x), \tag{1.32}$$

les coordonnées x_i constituant un système de coordonnées locales de V et les $e_i(x)$ un système de vecteurs constituant une base orthonormée locale de TV. Le $\frac{1}{4}$ qui apparaît dans (1.32) et les relations (1.22) permettent de montrer que si X(x) est un champ de vecteur local de TV, alors

$$\nabla^V_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (X(x)\varphi(x)) = \nabla^V_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (X(x))\varphi(x) + X(x)\, \nabla^V_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \varphi(x). \tag{1.33}$$

La première dérivée covariante apparaissant dans (1.33) est la dérivation covariante du champ de spineur $X(x)\varphi(x)$, la deuxième celle du champ de vecteurs X(x) interprété comme champ de matrices sur S_d, et la troisième celle du champ de spineurs $\varphi(x)$. On peut maintenant construire l'opérateur de Dirac. Introduisons un fibré auxiliaire hermitien ξ au-dessus de V, muni d'une connexion unitaire ∇^ξ. Soit $\varphi \otimes \psi$ une section C^∞ de V dans $S(V)\otimes\xi$, c'est-à-dire un élément de $\Gamma^\infty(V,S(V)\otimes\xi)$, et soit $(e_1,\dots,e_d)$ une section locale de SO (V). Posons :

$$D(\varphi\otimes\psi) = \Sigma(e_i \nabla^V_{e_i} \varphi)\otimes\psi + \Sigma\, e_i \varphi\otimes\nabla^\xi_{e_i} \psi. \tag{1.34}$$

Cet opérateur est bien défini : il ne dépend pas de la section locale choisie de SO (V). C'est donc un opérateur d'ordre 1 qui agit sur $\Gamma^\infty(V,S(V)\otimes\xi)$ et qui permute

$\Gamma^\infty(V,S_\pm(V)\otimes\xi) = H^\infty_\pm$. C'est donc un opérateur impair au sens de la section I.2.
Munissons $H^\infty = H^\infty_+ \otimes H^\infty_-$ de la structure suivante d'espace pré-hilbertien :

$$\|\varphi\otimes\psi\|^2 = \int_V <\varphi(x),\psi(x)>_{S_x(V)} <\psi(x),\varphi(x)>_{\xi_x} d\pi(x), \tag{1.35}$$

$d\pi(x)$ désignant la mesure riemannienne sur V. L'opérateur de Dirac D est dans ce cas formellement auto-adjoint. De plus, il est elliptique. Enfin, il répond en partie au problème posé initialement de la recherche d'une racine carrée du Laplacien (mais nous renvoyons à la section III.3 à ce sujet).

Il ne reste plus qu'à construire la famille d'opérateurs de Dirac avec laquelle nous travaillerons. On munit la variété M d'une structure de variété riemannienne pour le produit scalaire $< \, , \, >_M$. Les fibres de la filtration $M \xrightarrow{\pi} B$ héritent à partir de la structure riemannienne sur M d'une structure riemannienne. De plus, on suppose que chaque fibre V_y est de dimension paire, est orientable et est spinorielle. On en déduit des fibrés Spin (V_y), SO (V_y), Cliff (V_y) et S (V_y). Comme la structure spinorielle sur V_y n'est pas unique, nous devons faire une hypothèse supplémentaire : les fibrés précédents dépendent "de façon C^∞" de y, c'est-à-dire définissent des fibrés au-dessus de M. Sur la variété M, introduisons enfin un fibré complexe hermitien ξ. On peut faire dépendre la construction précédente de l'opérateur D du paramètre y. $H^\infty_{\pm,y}$ est l'espace des sections C^∞ de V_y dans $S_\pm(V_y)\otimes\xi$. $H^\infty_y = H^\infty_{+,y}\otimes H^\infty_{-,y}$ est ainsi une fibre en super-espace de dimension infinie au-dessus de B. Soit ∇^{V_y} la connexion de Lévi-Civita sur V_y et ∇^{ξ_y} la restriction à V_y de la connexion unitaire ∇^ξ sur ξ. Si $x \to (e_{1,y}(x),\dots,e_{d,y}(x))$ est une famille de section locale de SO (V_y), si $x \to \varphi_y(x)\otimes\varphi_y(x)$ est une section de V_y dans $S(V_y)\otimes\xi$, on pose :

$$\begin{aligned} D_y(\varphi_y\otimes\psi_y)(x) &= \sum_i (e_{i,y}(x)\nabla^{V_y}_{e_{i,y}(x)}\varphi_y(x))\otimes\psi_y(x) + \\ &+ \Sigma\, e_{i,y}(x)\varphi_y(x)\otimes\nabla^{\xi_y}_{e_{i,y}(x)}\psi_y(x). \end{aligned} \tag{1.34)'$$

$D_.$ est un opérateur impair du fibré en super-espace $H^\infty_.$.

I.4) Programme de la démonstration :

Le programme de la démonstration de Bismut est alors le suivant :

i) $H^\infty_.$ étant muni d'une graduation naturelle, donner une définition naturelle d'une superconnexion sur $H^\infty_.$ de façon à ce que le théorème I.2 reste valide.

ii) Choisir une "bonne" super-connexion dépendant d'un paramètre ε de façon à ce que le problème du calcul de la super-trace intervenant dans le théorème I.2 apparaisse comme celui d'un développement semi-classique.

iii) Calculer cette limite au moyen d'une représentation stochastique convenable. C'est uniquement à partir de ce moment que nous nous écartons des calculs de Bismut. Il est à noter que Berline et Vergne ([B-V]) n'utilisent pas de probabilité pour calculer cette limite.

II. SUPERCONNEXION EN DIMENSION INFINIE :

II.1) Définition d'une super-connexion :

Rappelons que $H^\infty_{\cdot}$ constitue un fibré en super-espaces de dimensions infinies au-dessus de la variété des paramètres B. Pour définir une super-connexion par analogie avec la dimension finie, avec en vue la généralisation du théorème I.2, nous introduisons le produit tensoriel de $\Lambda(B)$ avec $H^\infty_{\cdot}$, c'est-à-dire l'espace des formes définies sur B à valeurs dans H^∞_o, noté $\Lambda(B)\otimes H^\infty$. On peut construire cet espace d'une autre façon : en tout point x de la variété M, choisissons un sous-espace $T^H_x M$ de l'espace tangent en x à M, supplémentaire à l'espace tangent en x à la fibre V_y. Supposons que la projection $T^H_x \to M$ dépende de façon C^∞ de x, si bien que $T^H_x M$ définit un fibré vectoriel au-dessus de M. De plus, $T^H_x M$ s'identifie naturellement grâce à la projection de M dans B à l'espace tangent en y à B, si $x \in V_y$. L'espace des sections C^∞ de B dans $\Lambda(B)\otimes H^\infty$, $\Gamma^\infty(B,\Lambda(B)\otimes H^\infty)$ s'identifie naturellement à l'espace des sections C^∞ de M dans $\Lambda(T^H M)\otimes(S\otimes\xi)$, noté $\Gamma^\infty(M,\pi^*(\Lambda B)\otimes(S\otimes\xi))$. De plus, localement, toute section de B dans $\Lambda(B)\otimes H^\infty$ s'écrit $\Sigma\,\eta(y)\otimes\varphi_y(x)$, $\varphi_y(x)$ étant une section C^∞ de V dans $S\otimes\xi$, dépendant de façon C^∞ de $y\in B$, et η une forme définie sur B à valeur dans $\mathbb{C}$. En général, on ne peut, <u>contrairement à la dimension finie</u>, supprimer la dépendance de φ en $y\in B$. Toutefois, le théorème de Stone-Weierstrass nous permettra de nous ramener au cas de $\Sigma\,\eta(y)\otimes\varphi(x)$, φ ne dépendant pas de y, au moins dans une première étape.

<u>Définition II.1</u> : <u>Une super-connexion</u> ∇^∞_s <u>sur</u> H^∞ <u>est un opérateur impair différentiel du premier ordre sur</u> $\Gamma^\infty(B,\Lambda(B)\otimes(S\otimes\xi))$ <u>possédant les propriétés suivantes</u> :

i) <u>Pour tout</u> $\eta\in\Gamma^\infty(B,\Lambda(B))$, <u>tout</u> $\varphi\in\Gamma^\infty(B,\Lambda(B)\otimes(S\otimes\xi))$, <u>on a</u> :

$$\nabla^\infty(\eta\,\varphi) = d\eta\,\varphi + (-1)^{\deg\eta}\,\eta\,\nabla^\infty_s\varphi. \tag{2.1}$$

ii) <u>La partie de rang</u> 0 <u>de la super-connexion est un opérateur différentiel d'ordre</u> 1 <u>en</u> $x\in V_y$, <u>qui coïncide avec l'opérateur de Dirac</u> D_y <u>à un opérateur tensoriel près</u>. <u>Les parties de rang</u> >0 <u>de la super-connexion sont des opérateurs différentiels d'ordre</u> 0 <u>en</u> x (<u>c'est-à-dire des opérateurs tensoriels</u>).

Regardons en coordonnées locales la signification de cette définition : soit $M = B \times V$. Supposons que les y_α définissent un système de coordonnées locales sur $B (\alpha \leq n)$. Si $I = \{\alpha_1 < \ldots < \alpha_p\}$, posons $dy^I = dy^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dy^{\alpha_p}$. Soient $\eta(y)$ une forme définie sur B à valeurs dans $\mathbb{C}$ et φ une section C^∞ de V dans $S \otimes \xi$, ne dépendant pas de y. Il existe alors des opérateurs linéaires $A_{I,y}(x)$ de $(S \otimes \xi)_x$ dans $(S \otimes \xi)_x$ dépendant de façon C^∞ de $y \in B$ et de $x \in V$ tels que :

$$(2.2) \qquad \begin{aligned} \nabla_s^\infty (\eta\varphi)_y(x) &= d\eta(y)\, \varphi(x) + (-1)^{\deg \eta}\, \eta(y) \\ & D_y \varphi(x) + \sum_I (-1)^{\deg \eta}\, \eta(y) \wedge dy^I\, A_{I,y}(x) \varphi(x). \end{aligned}$$

Le fait que ∇_o^∞ soit un opérateur impair se traduit par le fait que $A_{I,y}(x)$ permute la parité des spineurs si $\# I$ est pair et la conserve si $\# I$ est impair. La courbure R_s^∞ de la super-connexion est l'opérateur $(\nabla_s^\infty)^2$: c'est un opérateur tensoriel en y pair (comme produit de deux opérateurs impairs). Il existe des opérateurs d'ordre ≤ 2, $R_{I,y}$ dépendant de façon C^∞ de y, conservant la parité des spineurs si $\# I$ est pair et la permutant si $\# I$ est impair tels que :

$$(2.3) \qquad R_s^\infty (\eta\varphi)_y(x) = \sum_I \eta(y) \wedge dy^I\, R_{I,y}\, \varphi(x).$$

De plus $R_{I,y}$ est d'ordre ≤ 1 en x si $I \neq \emptyset$ et la partie d'ordre 2 de $R_{\emptyset,y}$ est égale à D_y^2 (nous calculerons en appendice les termes de cette courbure afin d'être plus explicite).

La remarque essentielle que l'on peut faire sur nos définitions est la suivante : contrairement au cas de la dimension finie, on impose des conditions très fortes sur les coefficients de la super-connexion ∇_s^∞. Ceci est fait pour que la super-connexion possède des propriétés analogues à celle d'une super-connexion en dimension finie ([Q]). Ainsi, en dimension finie, la forme $\operatorname{tr}_s \nabla_s^{2n} = \operatorname{tr}_s R_s^n$ est fermée ([Q]), ce qui implique que la forme $\operatorname{tr}_s \exp[-R_s]$ est fermée. Dans notre situation, $\operatorname{tr}_s (\nabla_s^\infty)^{2n}$ n'est pas définie, car des divergences apparaissent. Toutefois, on remarque que $(\nabla_{s,y}^\infty)^2 = R_{s,y}^\infty$ est un opérateur d'ordre 2 elliptique sur $\Lambda(B_y) \otimes H_y^\infty$ de partie d'ordre 2 D_y^2. La quantité $\exp[-R_{s,y}^\infty]$ est donc un opérateur régularisant, <u>dont la supertrace est définie</u>. On voit donc apparaître l'idée principale de ce paragraphe : "toute formule vraie en dimension finie ([Q]) qui conserve encore un sens en dimension infinie est encore vraie en dimension infinie".

II.2) <u>Théorie de Chern-Weil en dimension infinie</u> :

Dans cette ligne d'idées, le théorème le plus simple est le suivant ([B.1] p. 112) :

<u>Théorème II.2</u> : <u>La forme sur</u> B $\mathrm{Tr}_s \exp[-R_s^\infty]$ <u>est fermée</u>.

<u>Schéma de la preuve</u> : Il faut d'abord bien comprendre le sens des expressions que l'on manipule. Plaçons-nous en coordonnées locales, en utilisant les formules (2.2) et (2.3). Il existe des opérateurs C^∞ $p_{I,y}(x,z)$ en $(x,z)\in V\times V$ et en $y\in B$ tels que :

$$(2.4)\quad \exp[-R_s^\infty](\eta\varphi)_y(x) = \sum_I \eta(y)\wedge dy^I \int_V p_{I,y}(x,z)\varphi(z)dz = \eta(y).\int p_y(x,y)\varphi(z)dz.$$

De plus $p_{I,y}(x,z)$ conserve la parité des spineurs si $\#I$ est pair et l'inverse sinon, car $\exp[-R_s^\infty]$ est pair. $\mathrm{Tr}_s \exp[-R_s^\infty]$ est alors la forme de degré pair sur B définie par :

$$(2.5)\qquad \mathrm{Tr}_s \exp[-R_s^\infty] = \sum_{\#I \text{ pair}} dy^I \left(\int_V \mathrm{Tr}_s\, p_{I,y}(x,x)\,dx\right) = \int_V \mathrm{Tr}_s\, p_y(x,x)\,dx.$$

Rappelons le principe de la preuve en dimension finie : comme ∇_s et ∇_s^{2n} commutent, on a clairement $[\nabla_s,\nabla_s^{2n}] = 0$ et donc $\mathrm{Tr}_s[\nabla_s,\nabla_s^{2n}] = 0$. Localement, $\nabla_s = d+A$, A étant un opérateur tensoriel impair (1.20). Par suite, $[d,\nabla_s^{2n}] = -[A,\nabla_s^{2n}]$, et donc $\mathrm{Tr}_s[d,\nabla_s^{2n}] = -\mathrm{Tr}_s[A,\nabla_s^{2n}]$. Comme ∇_s^{2n} est de degré pair, et tensoriel, $\nabla_s^{2n} = \sum dy^I R'_{I,y}$, $R'_{I,y}$ étant un opérateur matriciel qui permute la parité si $\#I$ est impair et la conserve si $\#I$ est pair. Comme A est impair, $A = \sum dy^I A_I$, A_I conservant la parité si $\#I$ est impair et la permutant si $\#I$ est pair. Par suite, $\mathrm{Tr}_s[A,\nabla_s^{2n}] = -\sum_{IJ} \mathrm{Tr}_s[dy^I R_I, dy^J A'_J]$. Il ne reste plus qu'à distinguer les 4 cas possibles et appliquer (1.19) pour montrer que $\mathrm{Tr}_s[A,\nabla_s^{2n}] = 0$. Montrons maintenant que $[d,\nabla_s^{2n}] = d\nabla_s^{2n}$. Soient η une forme définie sur B à valeurs dans $\mathbb{C}$, et e un vecteur fixe de B de la fibre, indépendant de y (nous nous plaçons dans une trivialisation locale du fibré). On a :

$$\begin{aligned} d[(\nabla_s^{2n})(\eta(y)e)] &= d[\sum_I \eta(y)\wedge dy^I R'_{I,y}(e)] \\ (2.6)\qquad &= \sum_I d\eta(y)\wedge dy^I R'_{I,y}(e) + \sum_I (-1)^{\deg\eta+\#I}\eta(y)\wedge dy^I\wedge dR'_{I,y}(e) \\ &= \nabla_s^{2n}(d\eta(y)e) + (d\nabla_s^{2n})(\eta(y)e) \end{aligned}$$

ce qui montre la propriété. On a donc $\mathrm{Tr}_s\, d\nabla_s^{2n} = d\,\mathrm{Tr}_s\,\nabla_s^{2n} = 0$.

C'est le même principe de démonstration que l'on utilise en dimension infinie, ∇_s^{2n} étant remplacée cette fois par $\exp[-R_s^\infty]$. Comme $\exp[-R_s^\infty]$ et ∇_s^∞ commutent, on a :

$$(2.7) \qquad \mathrm{Tr}_s\ [\exp\ [-R_s^\infty], \nabla_s^\infty] = 0.$$

Si nous écrivons la formule (2.2) de la façon suivante,

$$(2.2)' \qquad \nabla_s^\infty(\eta\varphi)_y(x) = d\eta(y)\,\varphi(x) + A_{s,y}^\infty(\eta\varphi)(x).$$

A_s^∞ étant cette fois un opérateur tensoriel en η d'ordre ≤ 1 en x, on obtient :

$$(2.8) \qquad d\,\mathrm{Tr}_s\ [\exp\ [-R_s^\infty]] = -\mathrm{Tr}_s\ [A_s^\infty, \exp\ [-R_s^\infty]].$$

Il ne reste plus qu'à exprimer que cette dernière quantité est nulle, car exp $[-R_s^\infty]$ est de degré pair et régularisant. Comme A_s^∞ est a priori un opérateur différentiel en $x \in V$, on peut le régulariser en un opérateur $A_s^\infty(\varepsilon)$:

$$(2.9) \qquad A_s^\infty(\varepsilon)(\eta\varphi)_y(x) = (-1)^{\deg \eta}\ \eta(y) \wedge \sum_I dy^I \int_V A_{I,y}(\varepsilon)(x,z)\varphi(z)\,dz.$$

$A_{I,y}(\varepsilon)$ applique la fibre de $S \otimes \xi$ au-dessus de z sur celle de $S \otimes \xi$ au-dessus de x, et conserve le signe des spineurs si #I est impair et le permute si #I est pair ($A_s^\infty(\varepsilon)$ est impair).

On obtient ainsi :

$$A_s^\infty(\varepsilon)\ \exp\ [-R_s^\infty](\eta\varphi)_y(x)$$

$$= \sum_{I,J} (-1)^{\deg \eta + \# I}\ \eta(y) \wedge dy^J \wedge dy^I \int_{V\times V} A_{I,y}(\varepsilon)(x,z)\, p_{J,y}(z,z')\,\varphi(z')\,dz\,dz'.$$

$$(2.10) \qquad \exp\ [-R_s^\infty]\, A_s^\infty(\varepsilon)(\eta\varphi)_y(x) =$$

$$\sum_{I,J} (-1)^{\deg \eta + \# I}\ \eta(y) \wedge dy^I \wedge dy^J \int_{V\times V} p_{J,y}(x,z)\, A_{I,y}(\varepsilon)(z,z')\varphi(z')\,dz\,dz'.$$

$$A_{I,y}(\varepsilon)(z,z')\ \varphi(z')\,dz\,dz'.$$

On a alors :

$$\mathrm{Tr}_s\ [A_s^\infty(\varepsilon), \exp\ [-R_s^\infty]]$$

$$= \sum_{\substack{\# I + \# J \\ \text{impair}}} (-1)^{(\# I+1)\# J}\ dy^I \wedge dy^J \int_{V\times V} \mathrm{Tr}_s\ \{A_{I,y}(\varepsilon)(x,z)\, p_{J,y}(z,x)\}\,dz\,dx\ -$$

$$(2.11) \qquad - \sum_{\substack{\# I + \# J \\ \text{impair}}} (-1)^{\# I}\ dy^I \wedge dy^J \int_{V\times V} \mathrm{Tr}_s\ \{p_{J,y}(z,x)\ A_{I,y}(\varepsilon)(x,z)\,dz\,dx\}$$

$$= \sum_{\substack{\# I + \# J \\ \text{impair}}} dy^I \wedge dy^J \int_{V\times V} \mathrm{Tr}_s\ \{A_{I,y}(\varepsilon)(x,z)\ p_{J,y}(z,x)$$

$$- (-1)^{\# I}\ p_{J,y}(z,x)\ A_{I,y}(\varepsilon)(x,z)\}\,dx\,dz = 0.$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que l'on a :

$$\mathrm{Tr}_s\ \{A_{I,y}(\varepsilon)(x,z)\,p_{J,y}(z,x) - (-1)^{\# I}\,p_{J,y}(z,x)\,A_{I,y}(\varepsilon)(x,z)\} = 0 \tag{2.12}$$

pour montrer que $\mathrm{Tr}_s\ [A_s^\infty(\varepsilon),\ \exp\ [-R_s^\infty]] = 0$. En faisant tendre $\varepsilon \to 0$, on a encore :

$$\mathrm{Tr}_s\ [A_s^\infty, \exp\ [-R_s^\infty]] = 0, \tag{2.13}$$

cette dernière expression n'étant pas formelle car $\exp\ [-R_s^\infty]$ est régularisant ∎

En dimension finie, on montre ensuite que la classe de cohomologie de $\mathrm{Tr}_s\ (R_s^n)$ est indépendante de la super-connexion ([Q]). En vertu de notre principe général, on aura alors le :

<u>Théorème II.3</u> : $\mathrm{Tr}_s\ [\exp\ [-R_s^\infty]]$ <u>est indépendante en cohomologie de la super-connexion</u> ∇_s^∞ ([B.1] p. 114).

<u>Preuve</u> : La preuve est identique à celle utilisée en dimension finie ([Q] p. 91). Soit $t \in \mathbb{R}$. Soient $\nabla_{o,s}^\infty$ et $\nabla_{1,s}^\infty$ deux super-connexions : posons comme d'habitude

$$\nabla_{t,s}^\infty = t\,\nabla_{o,s}^\infty + (1-t)\ \nabla_{1,s}^\infty \tag{2.14}$$

$\nabla_{t,s}^\infty$ est encore une super-connexion, si t est fixé. On grossit l'espace des paramètres B en l'espace des paramètres $B \times \mathbb{R}$. La différentiation extérieure d_B en y s'étend en $d_B + \frac{\partial}{\partial t}\,dt$. La forme $\mathrm{Tr}_s\ [\exp\ [-R_s^\infty]]$ (t devient variable) est une forme fermée sur $B \times \mathbb{R}$. Notons $p_{y,t}(x,z)$ le noyau de la chaleur associé. On a :

$$\mathrm{Tr}_s\ [\exp\ [-R_{s,y,t}^\infty]] = \int_V \mathrm{Tr}_s\ p_{y,t}(x,x)\,dx + g(y,t) \wedge dt. \tag{2.15}$$

De plus, $\int \mathrm{Tr}_s\ p_{y,t}(x,x)\,dx$ est une forme sur B à valeurs complexes dépendant de façon C^∞ de t. Il en est de même pour $g(y,t)$. Dire que $\mathrm{Tr}_s\ [\exp\ [-R_s^\infty]]$ est une forme <u>fermée sur $B \times \mathbb{R}$</u> revient à dire que :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathrm{Tr}_s\ p_{y,t}(x,x)\,dx = -d_B\ g(y,t). \tag{2.16}$$

Cela signifie que $\int_V \mathrm{Tr}_s\ p_{y,t}(x,x)\,dx$ ne dépend pas de t en cohomologie. ∎

Le théorème qui généralise le théorème I.2 de Quillen est alors le suivant : notons $\overline{\mathrm{ch}}$ (Ind D_o) le caractère de Chern en <u>phase réelle</u> de Ind D_o. Si Ind $D_o = [E_+] - [E_-]$, E_+ et E_- étant des fibrés de dimension finie au-dessus de B, cela signifie que :

$$\overline{\mathrm{ch}}\ (\mathrm{Ind}\ D_o) = \mathrm{Tr}\ (\exp\ [-\frac{R_+}{2}]) - \mathrm{Tr}\ (\exp\ [-\frac{R_-}{2}]) \tag{2.17}$$

au lieu de :

(2.18) $$\mathrm{ch}\ (\mathrm{Ind}\ D) = \mathrm{Tr}\ (\exp\ [-\frac{iR_+}{2\pi}]) - \mathrm{Tr}\ (\exp\ [-\frac{iR_-}{2\pi}])$$

($R_\pm$ est le tenseur de courbure d'une connexion arbitraire $\nabla_\pm$ sur $E_\pm$).

On a alors :

<u>Théorème II.4</u> (B.1 p. 109) : $\mathrm{Tr}_s \exp [-\frac{R_s^\infty}{2}]$ <u>est égale en cohomologie à</u> $\overline{\mathrm{ch}}$ (Ind D), <u>pour n'importe quelle super-connexion</u> ∇_s^∞ <u>sur</u> H^∞.

Ce théorème appelle un commentaire : pour obtenir le caractère de Chern en phase imaginaire, il faudrait utiliser $\mathrm{Tr}_s \exp [\frac{i(\nabla_s^\infty)^2}{2\pi}]$, expression qui n'a pas de sens, car $\exp [\frac{i(\nabla_s^\infty)^2}{2\pi}]$ n'est pas en général régularisant. De plus, il faudrait utiliser une intégrale de Feynmann (non définie) pour représenter cette supertrace, alors qu'en phase réelle, nous utiliserons une intégrale d'Itô (bien définie).

La démonstration de ce théorème est en dimension finie très simple, une fois prouvé le théorème II.3. En effet, la super-trace étant en cohomologie indépendante de la super-connexion, il suffit de le prouver pour une super-connexion particulière. Ceci n'est pas difficile, il suffit de choisir $\nabla_s = \nabla_+ \oplus \nabla_-$. En dimension ∞, ce choix sera beaucoup plus difficile : il nous obligera à étendre la notion de super-connexion dont les coefficients étaient jusqu'à présent des opérateurs différentiels à des super-connexions dont les coefficients sont d'un type plus général. Nous ne ferons que schématiser la preuve de ce théorème ([B.1] p. 115-122).

<u>Etape n°1</u> : <u>Réduction au cas où</u> $\mathrm{Ker}\ D_- = \{0\}$ <u>par adjonction à</u> H_+^∞ <u>d'un fibré trivial de dimension finie</u>.

On reprend le principe de la construction du fibré indice ([A-S.3]). En effet, il existe un entier $q \in \mathbb{N}$ et des sections C^∞ $\varphi_{i,y}(x)$ $i = 1,\dots,q$ de M sur $S_- \otimes \xi$ tels que l'opérateur $\overline{D}_{+,y}$ de $H_{+,y}^\infty \oplus \mathbb{C}^q$ dans $H_{-,y}^\infty$

(2.19) $$(\varphi_y,\lambda) \to D_{+,y}\varphi_y + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varphi_{i,y}$$

soit une surjection. Soit $\varepsilon > 0$. Notons $\overline{D}_{+,y}(\varepsilon)$ l'opérateur

(2.20) $$(\varphi_y,\lambda) \to D_{+,y}\varphi_y + \varepsilon \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varphi_{i,y}$$

(φ_y est un élément de $H_{+,y}^\infty$). Soit $D_{-,y}(\varepsilon)$ l'opérateur de $H_{-,y}^\infty$ dans $H_{+,y}^\infty \oplus \mathbb{C}^q$:

(2.21) $$\varphi_y \to (D_{-,y}\varphi_y, \varepsilon\langle\varphi_y,\varphi_{1,y}\rangle,\dots,\varepsilon\langle\varphi_y,\varphi_{q,y}\rangle).$$

Posons $\overline{H}^{\infty}_{+,y} = H^{\infty}_{+,y} \oplus \mathbb{C}^q$, $\overline{H}^{\infty}_{-,y} = H^{\infty}_{-,y}$ et $\overline{H}^{\infty}_{y} = H^{\infty}_{y} \oplus \mathbb{C}^q$. Comme H^{∞}_{y} est muni d'une structure d'espace préhilbertien, on peut munir $\overline{H}^{\infty}_{y}$ d'une structure préhilbertienne de sorte que H^{∞}_{y} et $\mathbb{C}^q$ soient orthogonaux et que $\mathbb{C}^q$ possède la structure hilbertienne canonique. $\overline{D}_{+,y}(\varepsilon)$ et $\overline{D}_{-,y}(\varepsilon)$ sont alors formellement adjoints l'un de l'autre. $\overline{H}^{\infty}_{\cdot}$ constitue un fibré vectoriel au-dessus de B en super-espace de dimension infinie. Comme il suffit de montrer le théorème pour un type de superconnexion sur $H^{\infty}_{\cdot}$ bien particulier, nous allons considérer sur $\overline{H}^{\infty}_{\cdot}$ un type spécial de super-connexion : sa partie de rang 0 coïncide avec $\overline{D}_{\cdot}(\varepsilon)$ et sa partie de rang 1 est une connexion $\overline{\nabla}^{\infty}(\varepsilon)$ sur H^{∞} qui, dans un système de coordonnées locales, s'écrit :

$$\begin{aligned}(2.22)\qquad &\overline{\nabla}^{\infty}(\eta(\varphi,\lambda))_y(x) = d\eta(y)(\varphi(x),\lambda) + (-1)^{\deg \eta}\, \eta(y)\ldots\\ &\ldots\sum_{\alpha} dy^{\alpha}\{A_{\alpha,y}(\varepsilon)(x)\varphi(x) + B_{\alpha,y}(\varepsilon)(x)\lambda,\ C_{\alpha,y}(\varepsilon)\lambda\}.\end{aligned}$$

$A_{\alpha,y}(\varepsilon)(x)$, $B_{\alpha,y}(\varepsilon)(x)$ sont C^{∞} en ε,y,x et $C_{\alpha,y}(\varepsilon)$ en ε et y. $D_{\alpha,y}(\varepsilon)\varphi$ est un opérateur C^{∞} en y,ε de $H^{\infty}_{+,y}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^q$. $A_{\alpha,y}(\varepsilon)(x)$ est un opérateur linéaire qui applique $(S\otimes\xi)_x$ dans $(S\otimes\xi)_x$, en conservant la parité des spineurs. $B_{\alpha,y}(\varepsilon)(x)$ est un opérateur linéaire de $\mathbb{C}^q$ dans $(S^+\otimes\xi)(x)$ qui tend vers 0 quand $\varepsilon\to 0$. $C_{\alpha,y}(\varepsilon)$ est un opérateur linéaire de $\mathbb{C}^q$ dans $\mathbb{C}^q$ qui tend vers 0 quand $\varepsilon\to 0$.

Or $\overline{D}_{-,y}(\varepsilon)\,\overline{D}_{+,y}(\varepsilon)$ est donné sous forme matricielle sur $H^{\infty}_{+,y}\oplus\mathbb{C}^q$ par

$$(2.23)\qquad \overline{D_{-,y}}(\varepsilon)\,\overline{D_{+,y}}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} D_{-,y}D_{+,y} & , & \varepsilon D_{-,y}\varphi_{i,y}\\ \varepsilon\langle\cdot,D_{-,y}\varphi_{i,y}\rangle & , & \varepsilon^2\langle\varphi_{i,y},\varphi_{j,y}\rangle\end{bmatrix}$$

et $\overline{D_{+,y}}(\varepsilon)\,\overline{D_{-,y}}(\varepsilon)$ par :

$$(2.24)\qquad \overline{D_{+,y}}(\varepsilon)\,\overline{D_{-,y}}(\varepsilon) = D_{+,y}D_{-,y} + \varepsilon^2\sum_{j=1}^{q}\langle\cdot,\varphi_{j,y}\rangle\,\varphi_{j,y}.$$

La partie de rang 0 de la courbure $\overline{R}^{\infty}_{s}(\varepsilon)$ de la super-connexion $\overline{\nabla}^{\infty}_{s}(\varepsilon)$ est donnée sur $\overline{H}^{\infty}_{+,y}$ par

$$(2.23)'\qquad \overline{D_{-,y}}(\varepsilon)\,\overline{D_{+,y}}(\varepsilon) = \overline{R}^{\infty}_{s,y}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} D_{-,y}D_{+,y} & , & \varepsilon D_{-,y}\varphi_{i,y}\\ \varepsilon\langle\cdot,D_{-,y}\varphi_{i,y}\rangle & , & \varepsilon^2\langle\varphi_{i,y},\varphi_{j,y}\rangle\end{bmatrix}$$

et sur $\overline{H}^{\infty}_{-,y}$ par :

$$(2.24)'\qquad \overline{R}^{\infty}_{s,y}(\varepsilon) = D_{+,y}D_{-,y} + \varepsilon\sum_{j=1}^{q}\langle\cdot,\varphi_{j,y}\rangle\,\varphi_{j,y}.$$

$\overline{R}^{\infty}_{s,y}(\varepsilon)$ est ainsi un opérateur d'ordre ≤ 2 en x dont la partie d'ordre 2 est $(D_y)^2$ (rappelons qu'il s'agit ici d'un abus de langage pédagogique : en coordonnées locales, $(D_y)^2$ se décompose en la somme d'un opérateur du second ordre, d'un opérateur du premier et d'un opérateur tensoriel, seule la partie du second ordre ayant une signification intrinsèque). Quand $\varepsilon \to 0$, $\overline{R}^{\infty}_{s,y}(\varepsilon) \to R^{\infty}_{s,y}$, qui est la courbure d'une superconnexion sur $H^{\infty}_{\bullet}$. De plus, on a, car $(D_y)^2$ est régularisant :

(2.25) $$\exp\left[-\frac{1}{2}\overline{R}^{\infty}_{s}(\varepsilon)\right](\varphi,\lambda)_y(x) = \left(\int p_y(\varepsilon)(x,z)\,\varphi(z)dz,\ C'_y(\varepsilon)\lambda\right) + \text{termes},$$

ces derniers permutant $\overline{H}^{\infty}_{\pm,y}$. $C'_y(\varepsilon)\lambda$ est une forme à valeurs dans les endomorphismes de $\mathbb{C}^q$, de degré pair, qui tend vers $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^q}$ quand $\varepsilon \to 0$. On a donc :

(2.26) $$\mathrm{Tr}_s \exp\left[-\frac{1}{2}\overline{R}^{\infty}_{s_\bullet}(\varepsilon)\right] \to \mathrm{Tr}_s \exp\left[-\frac{1}{2}R^{\infty}_{s_\bullet}\right] + q.$$

Il suffit donc de montrer, en vertu même de la définition de $[\mathrm{Ind}\ D_o]$, que :

(2.27) $$\mathrm{Tr}_s \exp\left[-\frac{1}{2}\overline{R}^{\infty}_{s_\bullet}(\varepsilon)\right] = \overline{ch}\,[\mathrm{Ind}\ \overline{D}_o(\varepsilon)] = \overline{ch}\,[\mathrm{Ker}\ \overline{D}_{+\bullet}(\varepsilon)].$$

Etape n° 2 : Démonstration dans le cas où la superconnexion vérifie un certain nombre de propriétés algébriques simples.

On essaie de trouver une superconnexion aussi simple que celle utilisée dans (1.21). Malheureusement, cela est impossible car la partie qui n'augmente pas le degré des formes en y de la super-connexion est fixée, ce qui ne l'était pas en dimension finie. Afin de "séparer" les contributions des deux fibrés $\overline{H}^{\infty}_{+}$ et $\overline{H}^{\infty}_{-}$, nous allons faire quelques hypothèses sur la connexion $\overline{\nabla}^{\infty}(\varepsilon)$. En effet, $\overline{\nabla}^{\infty}(\varepsilon)$ vérifie (2.22), et laisse donc stable $\overline{H}^{\infty}_{+}$ et $\overline{H}^{\infty}_{-}$. Sa courbure $\overline{R}^{\infty}(\varepsilon)$ se décompose donc en $\begin{bmatrix} \overline{R}^{\infty}_{+}(\varepsilon) & 0 \\ 0 & \overline{R}^{\infty}_{-}(\varepsilon) \end{bmatrix}$. Supposons de plus que $\overline{\nabla}^{\infty}(\varepsilon)$ vérifie les conditions suivantes :

i) $\overline{\nabla}^{\infty}(\varepsilon)$ laisse stable $\mathrm{Ker}\ \overline{D}_{+}(\varepsilon)$ et $(\mathrm{Ker}\ \overline{D}_{+}(\varepsilon))^{\perp}$

ii) $\overline{\nabla}^{\infty}(\varepsilon)\{\overline{D}_{-}(\varepsilon)\} = 0$.

Cette dernière condition exprime à travers { } que $\overline{\nabla}^{\infty}(\varepsilon)$ annule les coefficients de l'opérateur $\overline{D}_{-}(\varepsilon)$, c'est-à-dire que :

(2.29) $$\begin{aligned}\overline{\nabla}^{\infty}(\varepsilon)(\overline{D}_{-}(\varepsilon)\overline{\varphi}^{\infty}_{-}) &= \overline{D}_{-}(\varepsilon)(\overline{\nabla}^{\infty}(\varepsilon)\overline{\varphi}^{\infty}_{-}) + \overline{\nabla}^{\infty}(\varepsilon)\{\overline{D}_{-}(\varepsilon)\}\overline{\varphi}^{\infty}_{-} \\ &= \overline{D}_{-}(\varepsilon)(\overline{\nabla}^{\infty}(\varepsilon)\overline{\varphi}^{\infty}_{-}),\end{aligned}$$

$\overline{\varphi}_{-}^{\infty}$ étant une section de B dans $\overline{H}_{-}^{\infty}$ (c'est-à-dire une section de M dans $S_{-}\otimes\xi$). Comme $\overline{\nabla}^{\infty}(\varepsilon)$ laisse stable Ker $\overline{D}_{+}(\varepsilon)$, $\overline{\nabla}^{\infty}(\varepsilon)$ définit par restriction une connexion sur le fibré de dimension finie Ker $\overline{D}_{+}(\varepsilon)$ au-dessus de B, dont on notera le tenseur de courbure $R_{+}'(\varepsilon)$. Un calcul purement algébrique déduit de i) et ii) (cf. appendice de cette partie) montre que la courbure $\overline{R}_{s}^{\infty}(\varepsilon)$ de la super-connexion $\overline{\nabla}_{\bullet}^{\infty}(\varepsilon)+D(\varepsilon)$ est égale à

$$\overline{R}_{s}^{\infty}(\varepsilon)=\begin{bmatrix}\overline{R}_{+}^{\infty}(\varepsilon)+\overline{D}_{-}(\varepsilon)\overline{D}_{+}(\varepsilon) & , & 0\\ \overline{\nabla}^{\infty}(\varepsilon)\{\overline{D}_{+}(\varepsilon)\} & , & \overline{R}_{-}^{\infty}(\varepsilon)+\overline{D}_{+}(\varepsilon)\overline{D}_{-}(\varepsilon)\end{bmatrix}. \tag{2.30}$$

On n'a pas pu séparer entièrement la contribution des deux fibrés, car il reste dans (2.30) le terme triangulaire inférieur. Toutefois, on a une décomposition triangulaire de $\exp\left[-\frac{\overline{R}_{s}^{\infty}(\varepsilon)}{2}\right]$, et on en déduit que :

$$\begin{aligned}&\operatorname{Tr}_{s}\exp\left[-\frac{\overline{R}_{s}^{\infty}(\varepsilon)}{2}\right]=\\ &=\operatorname{Tr}\exp\left[-\frac{\overline{R}_{+}^{\infty}(\varepsilon)+\overline{D}_{-}(\varepsilon)\overline{D}_{+}(\varepsilon)}{2}\right]-\operatorname{Tr}\exp\left[-\frac{\overline{R}_{-}^{\infty}(\varepsilon)+\overline{D}_{+}(\varepsilon)\overline{D}_{-}(\varepsilon)}{2}\right]\end{aligned} \tag{2.31}$$

ce qui nous permet de nous ramener à l'étude de deux noyaux séparés qui n'interagissent pas entre eux exactement comme dans (1.21).

Notons $P_{\operatorname{Ker}\overline{D}_{+}(\varepsilon)}$ et $P_{(\operatorname{Ker}\overline{D}_{+}(\varepsilon))^{\perp}}$ la projection orthogonale sur Ker $\overline{D}_{+}(\varepsilon)$ et $(\operatorname{Ker}\overline{D}_{+}(\varepsilon))^{\perp}$ comme $\overline{R}_{+}^{\infty}(\varepsilon)+\overline{D}_{-}(\varepsilon)\overline{D}_{+}(\varepsilon)$ est régularisant, on a

$$\begin{aligned}&\operatorname{Tr}\exp\left[-\frac{(\overline{R}_{+}^{\infty}(\varepsilon)+\overline{D}_{-}(\varepsilon)\overline{D}_{+}(\varepsilon))}{2}\right]=\operatorname{Tr}\{P_{\operatorname{Ker}\overline{D}_{+}(\varepsilon)}\exp\left[-\frac{\overline{R}_{+}^{\infty}(\varepsilon)+\overline{D}_{-}(\varepsilon)\overline{D}_{+}(\varepsilon)}{2}\right]\\ &P_{\operatorname{Ker}\overline{D}_{+}(\varepsilon)}\}+\operatorname{Tr}\{P_{(\operatorname{Ker}\overline{D}_{+}(\varepsilon))^{\perp}}\exp\left[-\frac{\overline{R}_{+}^{\infty}(\varepsilon)+\overline{D}_{-}(\varepsilon)\overline{D}_{+}(\varepsilon)}{2}\right]P_{(\operatorname{Ker}\overline{D}_{+}(\varepsilon))^{\perp}}\}.\end{aligned} \tag{2.32}$$

Or $\overline{D}_{-}(\varepsilon)\overline{D}_{+}(\varepsilon)$ est nul sur Ker $\overline{D}_{+}(\varepsilon)$ et $\overline{R}_{+}^{\infty}(\varepsilon)$ applique Ker $\overline{D}_{+}(\varepsilon)$ sur Ker $\overline{D}_{+}(\varepsilon)$. Dans le premier terme de (2.32), on reconnait donc :

$$\begin{aligned}&\operatorname{Tr}\left(P_{\operatorname{Ker}\overline{D}_{+}(\varepsilon)}\exp\left[-\frac{\overline{R}_{+}^{\infty}(\varepsilon)+\overline{D}_{-}(\varepsilon)\overline{D}_{+}(\varepsilon)}{2}\right]P_{\operatorname{Ker}\overline{D}_{+}(\varepsilon)}\right)=\\ &=\operatorname{Tr}\left(\exp\left[-\frac{R_{+}'(\varepsilon)}{2}\right]\right)=\overline{ch}\,(\operatorname{Ker}\overline{D}_{+}(\varepsilon)).\end{aligned} \tag{2.33}$$

Il ne reste plus qu'à montrer que les deux termes

$$\mathrm{Tr}\,\{P_{(\mathrm{Ker}\,\bar{D}_+(\varepsilon))^\perp}\exp\Big[-\frac{\bar{R}_+^\infty(\varepsilon)+\bar{D}_-(\varepsilon)\bar{D}_+(\varepsilon)}{2}\Big]P_{(\mathrm{Ker}\,\bar{D}_+(\varepsilon))^\perp}\} \text{ et}$$

$\mathrm{Tr}\,\{\exp\Big[-\dfrac{\bar{R}_-^\infty(\varepsilon)+\bar{D}_+(\varepsilon)\bar{D}_-(\varepsilon)}{2}\Big]\}$ se détruisent, au moins en cohomologie. Ceci peut sembler "intuitivement" évident, car $\bar{D}_+(\varepsilon)$ réalise un isomorphisme de fibré de $(\mathrm{Ker}\,\bar{D}_+(\varepsilon))^\perp$ sur $\bar{H}_-^\infty$, et donc les "caractères de Chern en phase réelle" des deux fibrés $(\mathrm{Ker}\,\bar{D}_+(\varepsilon))^\perp$ et $\bar{H}_-^\infty$ sont égaux. Toutefois, il faut se méfier de ce genre de raisonnement qui n'a qu'un intérêt pédagogique : n'oublions pas que pratiquement tous nos fibrés ici sont isomorphes (pour d'autres opérateurs que $\bar{D}(\varepsilon)$) et que la théorie ici développée fait jouer un rôle privilégié à $\bar{D}(\varepsilon)$.

Comme $\bar{\nabla}^\infty(\varepsilon)\{\bar{D}_-(\varepsilon)\} = 0$, on a d'après (2.29) :

$$\begin{aligned}\bar{R}_+^\infty(\varepsilon)\,.\,\bar{D}_-(\varepsilon) &= \bar{\nabla}^\infty(\varepsilon)\,.\,\bar{\nabla}^\infty(\varepsilon)\,.\,\bar{D}_-(\varepsilon) = \bar{\nabla}^\infty(\varepsilon)\,.\,\bar{D}_-(\varepsilon)\bar{\nabla}^\infty(\varepsilon) = \\ &= \bar{D}_-(\varepsilon)\bar{\nabla}^\infty(\varepsilon)\bar{\nabla}^\infty(\varepsilon) = \bar{D}_-(\varepsilon)\bar{R}_-^\infty(\varepsilon)\end{aligned} \tag{2.34}$$

les produits signifiant ici que l'on compose les opérateurs.

Introduisons maintenant l'opérateur $(\bar{D}_-(\varepsilon))^{-1}$ de $\bar{H}_+^\infty$ dans $\bar{H}_-^\infty$, égal à 0 sur $\mathrm{Ker}\,\bar{D}_+(\varepsilon)$ et à l'inverse de $\bar{D}_-(\varepsilon)$ sur $(\mathrm{Ker}\,\bar{D}_+(\varepsilon))^\perp$. $\bar{D}_-(\varepsilon)(\bar{D}_-(\varepsilon))^{-1}$ applique donc $\bar{H}_+^\infty$ sur $\bar{H}_+^\infty$ et est égal à $P_{(\mathrm{Ker}\,\bar{D}_+(\varepsilon))^\perp}$. Cette dernière propriété jointe au fait que $\bar{R}_+^\infty(\varepsilon)\bar{D}_-(\varepsilon) = \bar{D}_-(\varepsilon)\bar{R}_-^\infty(\varepsilon)$ prouve que :

$$\begin{aligned}&\bar{D}_-(\varepsilon)[\bar{R}_-^\infty(\varepsilon)+\bar{D}_+(\varepsilon)\bar{D}_-(\varepsilon)](\bar{D}_-(\varepsilon))^{-1} = \\ &= (\bar{R}_+^\infty(\varepsilon)+\bar{D}_-(\varepsilon)\bar{D}_+(\varepsilon))\,P_{(\mathrm{Ker}\,\bar{D}_+(\varepsilon))^\perp}.\end{aligned} \tag{2.35}$$

Or $\bar{R}_+^\infty(\varepsilon)+\bar{D}_-(\varepsilon)\bar{D}_+(\varepsilon)$ conserve la décomposition de $\bar{H}_+^\infty$ en $(\mathrm{Ker}\,\bar{D}_+(\varepsilon))^\perp$ et en $\mathrm{Ker}\,\bar{D}_+(\varepsilon)$, et $(\bar{D}_-(\varepsilon))^{-1}(\bar{D}_-(\varepsilon))$ coïncide avec l'identité sur H_-^∞ ; on en déduit que :

$$\begin{aligned}&P_{(\mathrm{Ker}\,\bar{D}_+(\varepsilon))^\perp}\exp[-(\bar{R}_+^\infty(\varepsilon)+\bar{D}_-(\varepsilon)\bar{D}_+(\varepsilon))]\,P_{(\mathrm{Ker}\,\bar{D}_+(\varepsilon))^\perp} = \\ &= \bar{D}_-(\varepsilon)\exp[-(\bar{R}_-^\infty(\varepsilon)+\bar{D}_+(\varepsilon)\bar{D}_-(\varepsilon))](\bar{D}_-(\varepsilon))^{-1}.\end{aligned} \tag{2.36}$$

Comme $\exp\Big[-\dfrac{\bar{R}_-^\infty(\varepsilon)+\bar{D}_+(\varepsilon)\bar{D}_-(\varepsilon)}{2}\Big]$ est régularisant, on montre comme dans (2.13) que :

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\,\{\bar D_-(\varepsilon)\exp[-\tfrac12(\bar R_-^\infty(\varepsilon)+\bar D_+(\varepsilon)\bar D_-(\varepsilon))](\bar D_-(\varepsilon))^{-1}\}\\
(2.37)\qquad &= \mathrm{Tr}\,\{(\bar D_-(\varepsilon))^{-1}\bar D_-(\varepsilon)\exp[-\tfrac12(\bar R_-^\infty(\varepsilon)+\bar D_+(\varepsilon)\bar D_-(\varepsilon))]\}\\
&= \mathrm{Tr}\,\{\exp[-\tfrac12(\bar R_-^\infty(\varepsilon)+\bar D_+(\varepsilon)\bar D_-(\varepsilon))]\}
\end{aligned}
$$

car $(\bar D_-(\varepsilon))^{-1}\bar D_-(\varepsilon)$ est égal à l'identité de $\bar H_-^\infty$.

Etape n° 3 : Choix d'une super-connexion possédant les propriétés algébriques requises.

Il suffit donc en vertu de la deuxième étape de trouver une super-connexion possédant les propriétés algébriques i) et ii). Ceci et le théorème II.3 suffiront en effet à prouver le théorème II.4. Malheureusement, ceci est difficile si l'on reste dans la classe des superconnexions dont les coefficients sont des opérateurs différentiels sur la fibre V_y. Nous aurons besoin d'introduire une classe plus large d'opérateurs, à savoir celle des opérateurs pseudo-différentiels. Rappelons quelques définitions à leur sujet.

Soit P un opérateur différentiel agissant sur $\Gamma^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^p)$, à valeurs dans $\Gamma^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^p)$. Soit φ une application C^∞ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^p$ (une section de $\mathbb{R}^d$ dans le fibré trivial $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^p$), à support compact, de transformée de Fourier $\hat\varphi$.

$P=\Sigma A_{(\alpha)}(x)\dfrac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}}$, les $A_{(\alpha)}(x)$ étant des matrices à p colonnes et p lignes dépendant de façon C^∞ de $x\in\mathbb{R}^d$. La formule d'inversion de la transformée de Fourier montre que :

$$(2.38)\qquad P\varphi(x)=\frac{1}{(2i\pi)^d}\iiint\sum_{(\alpha)}A_{(\alpha)}(x)(i\xi)^{(\alpha)}\exp[i\langle x,\xi\rangle]\hat\varphi(\xi)d\xi.$$

On appelle symbole de P l'expression $\sum_{(\alpha)}A_{(\alpha)}(x)(i\xi)^{(\alpha)}$, et symbole principal de P le terme de plus haut degré de ce symbole ([Tr]). Ce point de vue se généralise facilement à d'autres types d'opérateurs. On dit que P est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $\leq m$ appliquant $\Gamma^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^p)$ dans $\Gamma^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^{p'})$ si il existe une fonction C^∞ $A(x,\xi)$ de $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ dans l'espace des opérateurs linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^{p'}$ possédant les deux propriétés suivantes :

i) Pour toute fonction φ C^∞ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^p$, à support compact, on a :

$$(2.39)\qquad P(\varphi)(x)=\frac{1}{(2i\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}A(x,\xi)\exp[i\langle x,\xi\rangle]\hat\varphi(\xi)d\xi.$$

ii) Pour tout multi-indice (α) et (β), tout compact K de $\mathbb{R}^d$, on a :

$$(2.40) \qquad \sup_{x\in K,\ \xi\in \mathbb{R}^d} \left|\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} \frac{\partial^{(\beta)}}{\partial \xi^{(\beta)}} A(x,\xi)\right| \left(\frac{1}{1+|\xi|}\right)^{m-|\beta|} < C_K < \infty.$$

Soit P un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m. On dit que P est elliptique d'ordre m si il existe un réel $R_K > 0$ tel que :

$$(2.41) \qquad \inf_{x\in K,\ |\xi|\in \mathbb{R}^d} \frac{|\det A(x,\xi)|}{|\xi|^m} > C_K > 0.$$

Soient V une variété compacte, et E un fibré vectoriel au-dessus de V. Un opérateur P appliquant $\Gamma^\infty(V,E)$ dans $\Gamma^\infty(V,E)$ est un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre m si dans toute carte locale de la variété V trivialisant le fibré E, P est un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre m. On vérifie que cette définition est compatible avec les changements de cartes locales. Sous des hypothèses techniques que nous ne détaillerons pas, on peut composer deux opérateurs pseudo-différentiels définis sur $\Gamma^\infty(V,E)$. Ainsi si P est d'ordre $< m$, et si Q est d'ordre $< m'$, $P\circ Q$ est d'ordre $< m+m'$.

Soit P un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre m agissant sur les sections C^∞ de V dans E. Il existe alors un opérateur pseudo-différentiel Q agissant sur $\Gamma^\infty(V,E)$, d'ordre m, tel que :

$$(2.42) \qquad \begin{aligned} P\circ Q &= \mathrm{Id} + R_1 \\ Q\circ P &= \mathrm{Id} + R_2. \end{aligned}$$

De plus, R_1 et R_2 sont des opérateurs régularisants :
($R_1\, \varphi(x) = \int_V p_1(x,z)\, \varphi(z)dz$; $p(x,z)$ étant une application linéaire dépendant de façon C^∞ de x,y, et appliquant la fibre de E au-dessus de z sur celle de E au-dessus de x). Dans la terminologie précédemment introduite, R_1 et R_2 sont des opérateurs différentiels d'ordre $-\infty$. De plus, on construit Q de la façon suivante : pour de grandes "valeurs" de ξ, le terme principal de $A_Q(x,\xi)$ est égal à $A_p^{-1}(x,\xi)$ dans un système de coordonnées locales. Comme V est compacte, ceci permet de montrer que tout opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre m est un opérateur de Fredholm de $\Gamma^\infty(V,E)$ dans $\Gamma^\infty(V,E)$. Le théorème de l'indice ([Gi],[A-S.1],[A-S.4]) calcule d'ailleurs l'indice d'un opérateur pseudo-différentiel elliptique (ou de celui d'une famille d'opérateurs pseudo-différentiels elliptiques).

Pour se ramener à l'étude d'une super-connexion possédant les propriétés algébriques de la partie II de la preuve, on considère des superconnexions dont les coefficients sont des opérateurs pseudo-différentiels : plus précisément, la partie de rang 0 de ∇_s^∞ est égale à la somme de l'opérateur de Dirac D_y et d'un opérateur pseudo-différentiel D_y^o dépendant de façon C^∞ de y, impair, d'ordre <1. Les parties de rang supérieur possèdent des coefficients qui sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre <1. On conserve les conventions sur les parités. On effectue la même généralisation pour une connexion.

Supposons momentanément que Ker $D_- = \{0\}$.

Rappelons que T_xM est décomposé en $T_x^HM \otimes T_xV_y$ si $x \in V_y$. Considérons $< \, , \, >_M$ la métrique riemannienne sur M, égale à la métrique de V_y sur TV_y, et à la métrique déduite d'une métrique arbitraire sur B sur T_x^HM, et pour laquelle T_x^HM et T_xV_y sont orthogonaux. Notons ∇^M la connexion de Lévi-Civita associée. Ceci nous permet d'introduire une connexion ∇' : si X est un champ de vecteurs à valeurs dans TV, et si Y est un champ de vecteurs sur M, $\nabla'_Y X$ est la projection de $\nabla^M_Y X$ sur TV (en particulier ∇' définit une connexion sur S_y). Si X et Y sont les remontés dans T^HM de deux champs sur B, $\nabla'_Y X$ est le remonté de $\nabla^B_Y X$ dans T^HM (∇^B désigne la connexion de Lévi-Civita sur B). Si X est le remonté d'un champ sur B et si Y est un champ sur TV, $\nabla'_Y X = 0$. Ainsi ∇' préserve la décomposition de TM en $T^HM \otimes TV$, alors que ∇^M mêle inextricablement les deux fibrés. De plus ∇' préserve la métrique. En contrepartie, ∇' possède de la torsion (alors que ∇^M n'en possède pas).

Rappelons que l'espace des sections C^∞ de B dans $\Lambda(B) \otimes H^\infty$ coïncide avec l'espace des sections C^∞ de M dans $\Lambda(T^HM) \otimes (S \otimes \xi)$. Ceci nous permet de définir une connexion ∇'^∞ sur H^∞ en posant :

$$(2.43) \qquad (\nabla'^\infty_{\cdot} \varphi)(x) = (\nabla'_{\cdot} \varphi)(x)$$

si φ est une section de M dans $(S \otimes \xi)$. L'opérateur $(D_{-,y})^{-1}$ de $H^\infty_{+,y}$ dans $H^\infty_{-,y}$, égal à 0 sur Ker D_+ et à l'inverse de $D_{-,y}$ sur $(\mathrm{Ker}\, D_+)^\perp$, est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre -1 sur H^∞_y, qui dépend de façon C^∞ de y (nous ne précisons pas pour quelle topologie).

Comme $(D_{-,y})^{-1}$ dépend de façon C^∞ de y et comme $P_{\mathrm{Ker}\, D_{+,y}}$ dépend de façon C^∞ de y, on peut appliquer ∇'^∞ à <u>leurs coefficients</u>. On obtient ainsi des opérateurs tensoriels en y sur H^∞, $\nabla'^\infty_{\cdot}\{(D_{-,\cdot})^{-1}\}$, et $\nabla'^\infty_{\cdot}\{P_{\mathrm{Ker}\, D_{+,\cdot}}\}$ dont les coefficients sont des 1 formes sur B à valeurs dans l'espace des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre -1 sur H^∞_y (pour $(D_{-,y})^{-1}$) et dans l'espace des opérateurs régularisants sur H^∞_y (pour $P_{\mathrm{Ker}\, D_{+,\cdot}}$). En particulier, $\nabla''^\infty_{+,\cdot}$ défini par :

$$(2.44) \qquad \nabla''^\infty_{+,\cdot} = \nabla'^\infty_{\cdot} + D_{-,\cdot}(\nabla'^\infty_{\cdot}\{(D_-)^{-1}\}) + P_{\mathrm{Ker}\, D_+}(\nabla'^\infty_{\cdot}\{P_{\mathrm{Ker}\, D_{+,\cdot}}\})$$

est une <u>connexion</u> sur $H^{\infty}_{+,\cdot}$. On prolonge $\nabla''^{\infty}_{+,\cdot}$ sur $H^{\infty}_{\cdot}$ en posant $\nabla''^{\infty}_{-} = \nabla'^{\infty}$.

C'est cette connexion que choisit Bismut, pour achever la preuve du théorème II.4. Elle possède en effet toutes les propriétés algébriques demandées dans la deuxième étape de la preuve. Toutefois, elle ne suffit pas à répondre pleinement à la question. Il faut en effet tenir compte des complications qui surgissent du fait que l'on s'est ramené au cas où Ker $D_- = \{0\}$ en adjoignant un fibré de dimension finie au fibré de dimension infinie H^{∞}. Dans ce cas, $(D_-(\varepsilon))^{-1}$ (cf. 2.35) n'est plus un opérateur pseudo-différentiel. Mener à bien tous les calculs nécessite une extension de la notion d'opérateurs pseudo-différentiels et une extension de la notion de superconnexion. Nous renvoyons à [Sj] pour le premier point.

<u>APPENDICE : CALCUL D'UNE COURBURE</u>

Soit une superconnexion $\nabla_s = \sum_I dy^I A_I(y) + d$ en coordonnées locales. En reprenant nos systèmes de notations, on a :

$$\nabla_s(\eta(y)e) = \Sigma\, d\eta(y)e + (-1)^{\deg \eta}\, \eta(y) \sum_I \wedge dy^I A_I(y)e \tag{2.45}$$

et donc

$$R_s(\eta(y)e) = \nabla_s^2(\eta(y)e) =$$

$$= \sum_I (-1)^{\# I} \eta(y) \wedge dy^I \wedge dA_I(y)e + \sum_{I,J} (-1)^{\# I} \eta(y) \wedge dy^I \wedge dy^J A_J(y) A_I(y)e. \tag{2.46}$$

En particulier, soient une connexion $\nabla = \begin{bmatrix} \nabla_+ & 0 \\ 0 & \nabla_- \end{bmatrix}$ et un opérateur tensoriel en y impair $D = \begin{bmatrix} 0 & D_- \\ D_+ & 0 \end{bmatrix}$ (en dimension finie, $y \to D_y$ définit un champ de matrices impaires). Soit la super-connexion $\nabla_s = D + \nabla$. On ne conserve dans (2.45) que les parties I de cardinal ≤ 1. (2.46) montre que :

$$R_s = R + \nabla\{D\} + D^2. \tag{2.47}$$

III. MOUVEMENT BROWNIEN ET CHOIX DE LA SUPERCONNEXION :

III.1) <u>Rappel sur le mouvement brownien d'une variété riemanienne</u> :

La variété riemannienne la plus simple étant $\mathbb{R}^m$, commençons par rappeler la définition du mouvement brownien sur $\mathbb{R}^m$. A cette fin, introduisons l'ensemble H^2 des fonctions de [0,1] dans $\mathbb{R}^m$, nulle en 0, $t \to h_i(t)$ telles que :

(3.1) $$\|h\|^2 = \sum_i \int_o^1 \left|\frac{d}{dt} h_i(t)\right|^2 dt < \infty.$$

On désire construire une mesure sur H^2 telle que pour toute subdivision $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ de $[0,t]$, la loi de la variable aléatoire

(3.2) $$(h_{t_1}, h_{t_2} - h_{t_1}, \ldots, h_t - h_{t_n})$$

soit une loi gaussienne de moyenne nulle et de covariance $\begin{bmatrix} t_1 \, Id_{\mathbb{R}^m} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [t-t_n] \, Id_{\mathbb{R}^m} \end{bmatrix}$.

Formellement, cela revient à construire la mesure gaussienne exp $[-\frac{\|h\|^2}{2}]$ "dh" sur H^2, "dh" désignant la mesure de Lebesgue sur H^2. Il est aisé à partir de (3.3) de construire cette mesure gaussienne à partir d'approximation polygonales des trajectoires de h_t (si $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $t \to h_{t_i} + t(h_{t_{i+1}} - h_{t_i})$ est une approximation polygonale). Toutefois, lorsqu'on fait tendre le pas de la subdivision $t_1 < t_2 < \ldots < t_n = t$ vers 0, on rencontre un problème majeur : il est impossible de construire cette mesure gaussienne sur H^2, sauf au prix d'un grossissement de l'espace H^2.

Notons en effet $\mathbb{C}([0,1],\mathbb{R}^m)$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^m$, et $t \to w_t = (w_{1,t}, \ldots, w_{m,t})$ un élément générique de cet espace fonctionnel (appelé en probabilité l'espace canonique des trajectoires du mouvement brownien). On le munit de la tribu borélienne associée à la norme uniforme. Il existe une unique probabilité P sur $\mathbb{C}([0,1],\mathbb{R}^m)$ telle que $(w_{t_1}, w_{t_2} - w_{t_1}, \ldots, w_{t_n} - w_{t_{n-1}})$ soit une variable gaussienne de covariance $\begin{bmatrix} t_1 \, Id_{\mathbb{R}^m} & & 0 \\ & \ddots & \\ C & & (t_n - t_{n-1}) \, Id_{\mathbb{R}^m} \end{bmatrix}$ et telle que $P[w_o = 0]$ soit égale à 1. C'est la mesure de Wiener sur $\mathbb{C}([0,1],\mathbb{R}^m)$. P-presque sûrement, les trajectoires de w_t ne sont différentiables en aucun point de $[0,1]$ ([W]).

On voudrait généraliser cette construction au cas d'une variété riemannienne V compacte. L'espace tangent en x à V est muni d'une forme quadratique $\langle \; , \; \rangle_x$ qui dépend de façon C^∞ de x. L'énergie d'un chemin $h : [0,1] \to V$ est définie par :

(3.3) $$\|h\|^2 = \int_o^1 \left\langle \frac{dh}{dt}, \frac{dh}{dt} \right\rangle_{h(t)} dt$$

alors que la longueur de h est $\int_o^1 \sqrt{\left\langle \frac{dh}{dt}, \frac{dh}{dt} \right\rangle} \, dt$. Pour cela, il faut d'abord définir ce qu'est une ligne polygonale sur V. Dans $\mathbb{R}^m$, la distance la plus courte entre deux points x et y est la longueur du segment de droite reliant x à y. Sur une variété riemannienne V compacte, la distance la plus courte entre deux points x et y est réalisée, au moins lorsque x et y sont assez proches, par la longueur de l'unique géodésique reliant x à y (dans le cas de la sphère dans $\mathbb{R}^3$, les géodésiques sont des arcs de grands cercles). C'est aussi elle qui minimise l'énergie (3.3) que l'on doit mettre pour aller de x à y.

Soit h(t) une géodésique issue de x, de vecteur tangent u en t = 0. Notons $h(1) = \exp_x(u)$. On appelle ligne polygonale un chemin h C^1 par morceaux : $[0,1] \to V$ tel qu'il existe une subdivision t_i de [0,1] et des vecteurs u_i appartenant à l'espace tangent en $h(t_i)$ possédant la propriété suivante :

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}], h(t) = \exp_{h_{t_i}}((t - t_i)u_i). \tag{3.4}$$

Fixons-nous un point de départ x. On peut choisir les vecteurs u_i dans (3.4) de façon gaussienne. Plus précisément, considérons des variables gaussiennes X_i, centrées sur $\mathbb{R}^d$, de covariance $(t_{i+1} - t_i)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^d}$, indépendantes entre elles. Identifions l'espace tangent en x à $\mathbb{R}^d$. On peut supposer que $(t_{i+1} - t_i)u_i$ est égale à la variable X_i transportée parallèlement le long de la trajectoire obtenue jusqu'au temps t_i. On obtient ainsi une ligne polygonale aléatoire qui généralise au cas d'une variété riemannienne l'approximation de w_t par un contour polygonal donné dans (3.2).

Pour obtenir une trajectoire brownienne sur V, issu de x, il ne reste plus qu'à faire "tendre le pas de la subdivision vers 0". Pour donner un sens rigoureux à cette dernière expression, il faut d'abord remarquer qu'il y a plusieurs définitions possibles du mouvement brownien issu de x sur la variété.

- Une définition en loi. On considère l'espace canonique $\mathbb{C}_x([0,1],V)$ des fonctions continues de [0,1] dans V issues de x, et on cherche à le munir d'une probabilité P_x vérifiant certaines conditions (cf. [S-V], [I-W]).

- Une définition forte. Soit (Ω,F,P) un espace probabilisé d'élément générique ω. On cherche un processus aléatoire $[0,1] \to x_t(\omega)$ issu de x, à trajectoires continues, et on dit que c'est un mouvement brownien sur V issu de x si sa loi est P_x. Il y a beaucoup de façons de construire ces processus, alors qu'il n'y a qu'une seule loi P_x (de la même façon qu'il n'y a qu'une seule loi de pile ou face et une infinité de façons de jouer à pile ou face).

Le système de caractérisation de P_x est le suivant : soit (Ω,F,P) un espace probabilisé. Soit (F_t) une filtration, c'est-à-dire une famille croissante de sous-tribus indexées par le temps $t \geq 0$. Soit $t \to x_t(\omega)$ un processus aléatoire continu à valeurs dans $\mathbb{R}$; on dit qu'il est adapté si $x_t(\omega)$ est F_t mesurable. On dit que x_t est une martingale si pour tout $t>0$, $E[|x_t|]<\infty$ et si pour tout $s<t$, $E[x_t|F_s] = x_s$. Notons ω une trajectoire générique de $\mathbb{C}([0,1],V)$: $\omega : t \to x_t(\omega)$ est le processus canonique associé ([Me.3]). La question de savoir si $x_t(\omega)$ est une martingale pour une certaine probabilité est vide de sens car $x_t(\omega)$ ne prend pas ses valeurs dans un espace vectoriel. Toutefois, soit f une fonction C^∞ de V dans $\mathbb{R}$: la question de savoir si $f(x_t(\omega))$ est une martingale possède un sens. Soit Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur $\mathbb{C}([0,1],V)$. P_x est l'unique probabilité sur $\mathbb{C}([0,1],V)$ possédant les propriétés suivantes :

- $P_x[x_o(w) = x] = 1$
- Pour toute fonction C^∞ de V dans $\mathbb{R}$, le processus $f(x_t(\omega))-\frac{1}{2}\int_o^t \Delta f(x_s(\omega))\,ds$ est une martingale (nous rappellerons la signification de Δ un peu plus loin).

On dit dans ce cas que P_x est solution d'un problème de martingales ([S-V] et [J]).

Cette caractérisation (en loi) du mouvement brownien issu de x ne nous permettra pas de mener des calculs effectifs. Aussi allons-nous construire le mouvement brownien à partir du mouvement brownien plat. Ceci se fera par le biais de la théorie des équations différentielles stochastiques. A cet effet, considérons l'espace canonique $\Omega = \mathbb{C}([0,1],\mathbb{R}^m)$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^m$, muni de la mesure de Wiener P_o. Soit $(w_1,\dots,w_m)$ le processus canonique. Introduisons m+1 champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$, $X_o,X_1,\dots,X_m$, dont les dérivées de tous ordres sont bornées. On pose ([B.4] p. 38) :

$$t^n = \text{partie entière de } \frac{[2^n t]}{2^n} \ ;$$

$$t^{n,+} = t^n + \frac{1}{2^n} \tag{3.5}$$

$$w^n_{i,t} = 2^n(w_{i,t^{n,+}} - w_{i,t^n}).$$

On considère la suite d'équations ordinaires à coefficients aléatoires :

$$\begin{aligned} dx^n_t(x) &= (X_o(x^n_t(x)) + \sum_{i=1}^m X_i(x^n_t(x))\,w^n_{i,t})\,dt \ ; \\ x^n_o(x) &= x. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Puisque les champs de vecteurs X_i ont des dérivées de tous ordres bornées, (3.6) possède un flot stochastique $\varphi^n_t(x,w)$ pour $t \leq 1$. De plus ([B.4] chap. 1), il existe un ensemble de probabilité 1, Ω_o, et des fonctions $\varphi_t(x,w)$ telles que :

i) $t \to \varphi_t(x,w)$ est continue pour tout $w \in \Omega_o$, tout $x \in \mathbb{R}^d$.

ii) $x \to \varphi_t(x,w)$ est C^∞ pour tout $w \in \Omega_o$, tout $x \in \mathbb{R}^d$, tout $t \in [0,1]$. C'est de plus un difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$.

iii) Pour tout compact $K \subset [0,1] \times \mathbb{R}^d$,

$$\sup_{(t,x)\in K} |\varphi_t^n(x,w) - \varphi_t(x,w)| \to 0 \tag{3.7}$$

en probabilité.

iv) Considérons la plus petite σ-algèbre F_t^o rendant les fonctions $w \to w_{i,s}$ $s \leq t$ de Ω dans $\mathbb{R}$ mesurables ; adjoignons-lui les ensembles de mesure nulle pour la mesure de Wiener sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^m)$. On obtient ainsi une filtration F_t'. Pour des raisons techniques, posons $F_t = \bigcap_{s>t} F_s'$, de sorte que F_t est une filtration continue à droite ($\bigcap_{s>t} F_s = F_t$). $\varphi_t(x,w)$ est alors F_t mesurable.

Quand $n \to \infty$, $w_{i,t}^n dt \to dw_{i,t}$ "formellement". On peut donner un sens à cette différentielle formelle en procédant de la façon suivante :

Introduisons un processus $(y_{i,t}(\omega))$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, à trajectoires continues ; supposons que pour tout t, $(y_{i,t}(\omega))$ est F_t mesurable. On dit dans ce cas que $y_{i,t}(\omega)$ est F_t-adapté. Prenons une subdivision (t_k) de $[0,1]$ et considérons la somme de Riemann :

$$\sum_i \sum_k \frac{1}{2}(y_{i,t_k}(w) + y_{i,t_{k+1}}(\omega))(w_{i,t_{k+1}} - w_{i,t_k}). \tag{3.8}$$

On dit que le processus $(y_{i,t}(\omega))$ est intégrable au sens de Stratonovitch si cette somme de Riemann converge en probabilité vers une variable aléatoire notée $\sum_i \int_0^1 y_{i,s}(\omega)dw_{i,s}$ lorsque l'on prend une suite de subdivisions dont le pas tend vers zéro, et si cette limite ne dépend pas de la suite considérée. Un processus continu n'est pas forcément intégrable au sens de Stratonovitch : cela provient de ce que le mouvement brownien n'est pas à variation finie et du fait que dans (3.8), on a considéré l'expression $\frac{1}{2}(w_{i,t_{k+1}} - w_{i,t_k})(y_{i,t_{k+1}}(\omega) + y_{i,t_k}(\omega))$ si bien que des divergences peuvent apparaître quand le pas de la subdivision tend vers 0.

Par contre, si l'on considère l'expression $(w_{i,t_{k+1}} - w_{i,t_k})\, y_{i,t_k}(\omega)$, on remarque que $y_{i,t_k}(\omega)$ est F_{t_k} mesurable, et est donc <u>indépendant</u> de l'accroissement

$w_{i,t_{k+1}} - w_{i,t_k}$. Ceci suggère que lorsque le pas de la suite de subdivisions tend vers 0, les divergences s'annulent. Plus précisément, on dira que $(y_{i,t}(\omega))$ est intégrable au sens d'Ito si la suite de sommes de Riemann non anticipatives :

$$\sum_i \sum_k y_{i,t_k}(\omega)(w_{i,t_{k+1}} - w_{i,t_k}) = I_k \tag{3.9}$$

converge en probabilité vers une variable aléatoire lorsque l'on considère une suite de subdivisions de plus en plus fines dont le pas tend vers 0, et si la limite obtenue ne dépend pas de la suite de subdivisions considérée. On notera cette limite $\sum_i \int_0^1 y_{i,t}(\omega)\delta w_i(t)$. Le théorème essentel est le suivant : tout processus continu F_t adapté est intégrable au sens d'Ito. La démonstration de ce théorème repose en partie sur le fait que

$$E[(I_k)^2] = \sum_k \sum_i (t_{k+1} - t_k)\, E[y^2_{i,t_k}(\omega)] \tag{3.10}$$

si $\operatorname{Sup}_t E[\sum_i |y_{i,t}(\omega)|^2] < \infty$. (3.10) passe à la limite lorsque le pas de la subdivision tend vers zéro. Ainsi, il faut noter que si $E[\int_0^1 \sum_i |y_{i,t}(w)|^2 dt]$ est finie, on a :

$$(3.11)\qquad \begin{aligned} &E[\int_0^1 \sum_{i=1}^m y_{i,t}(w)\,\delta w_i] = 0 \\ &E[(\int_0^1 \sum_{i=1}^m y_{i,t}(w)\,\delta w_i)^2] = E[\int_0^1 \sum_i y^2_{i,t}(w)\,dt]. \end{aligned}$$

Si l'on prend des sommes de Riemann sur $[0,t]$ dans (3.9) au lieu de les prendre sur $[0,1]$, on obtient un processus $\int_0^t \sum_{i=1}^m y_{i,s}(w)\,\delta w_i$ continu F_t adapté qui est une martingale si $E[\int_0^t \sum_i y^2_{i,u}(\omega)\,du] < \infty$. Ceci est clair si le processus $y_{i,t}(w)$ est constant sur les intervalles $]t_k, t_{k+1}]$ d'une subdivision. Pour passer au cas général, on approche le processus continu $y_{i,t}(w)$ par une suite de processus F_t adaptés constants sur les intervalles $]t_k, t_{k+1}]$ comme dans (3.9), on utilise (3.10) et on applique l'inégalité de Doob ([Me.3] ch. V,VI) qui permet de contrôler le comportement de <u>toute la trajectoire</u> d'une martingale x_s $s \leq 1$ par le comportement de la martingale prise en <u>son temps final</u>.

$$(3.11)' \qquad P\{\sup_{s \leq 1} |x_s(w)| \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda^2} E[|x_1(w)|^2] \qquad \text{(Lemme maximal de Doob).}$$

Au lieu d'intégrer par rapport aux trajectoires d'un mouvement brownien, on peut intégrer par rapport à des processus plus généraux. Appelons semi-martingale tout processus à valeurs réelles $x_t(w)$, F_t adapté, possédant la propriété suivante :

il existe des processus continus $y'_{j,t}(w)$ F_t adapté tels que :

$$x_t(w) = x_o(w) + \int_o^t y'_{o,s}(w)\,ds + \sum_j \int_o^t y'_{j,s}(w)\,\delta w_j \tag{3.12}$$

(en fait, il y a des définitions plus générales, cf. [J] et [Me.3]). Si cette décomposition existe, elle est unique ([Me.3]). Considérons m semi-martingales $x_{i,t}(w)$ et m processus adaptés continus $y_{i,t}(w)$. Dans (3.8) et (3.9), on peut remplacer $w_{i,t_{k+1}} - w_{i,t_k}$ par $x_{i,t_{k+1}} - x_{i,t_k}$. On donne ainsi un sens aux expressions $\int_o^t \sum_i y_{i,s}(w)\,dx_{i,s}$ et $\int_o^t \sum_i y_{i,s}(w)\,\delta x_{i,s}$. Tout processus continu $(y_{i,t}(w))$ adapté est intégrable au sens d'Ito suivant les trajectoires de la semi-martingale $x_{i,t}$. Par contre, il n'est pas forcément intégrable au sens de Stratonovitch. Toutefois, $(y_{i,t}(w))$ est intégrable au sens de Stratonovitch si on suppose que $(y_{i,t}(w))$ est une <u>semi-martingale</u>. Plus précisément, écrivons :

$$y_{i,t}(w) = y_{i,o}(w) + \int_o^t z_{i,o,s}(w)\,ds + \sum_j \int_o^t z_{i,j,s}(w)\,\delta w_j \tag{3.13}$$

et posons :

$$d\langle y_i(w), x_i(w)\rangle_t = z_{i,j,t}(w)\; z'_{i,t}(w)\,dt. \tag{3.14}$$

$\langle y_i(w),\ x_i(w)\rangle_t$ est appelé crochet oblique associé au couple de semi-martingales $y_{i,t}$, $x_{i,t}$ ([Me.3], [J]). On a la relation :

$$\int_o^t \sum_i y_{i,s}(w)\,dx_{i,s}(w) = \int_o^t \sum_i y_{i,s}(w)\,\delta x_{i,s}(w) + \frac{1}{2}\int_o^t d\langle x_i(w), y_i(w)\rangle_s. \tag{3.15}$$

Ainsi toute intégrale de Stratonovitch est une intégrale d'Ito. De plus, les processus que l'on obtient par ces procédés sont encore des semi-martingales. Enfin, il y a compatibilité au sens suivant entre les intégrales construites : considérons trois semi-martingales à valeurs réelles $x_s(w)$, $y_s(w)$, $z_s(w)$. Posons $Z_t(w) = \int_o^t y_s(w)\,dz_s(w)$. On a :

$$\int_o^t x_s(w)\,y_s(w)\,dz_s(w) = \int_o^t x_s(w)\,dZ_s(w). \tag{3.15)'}$$

Si on utilise l'intégrale d'Ito, en posant $Z'_t(w) = \int_o^t y_s(w)\,\delta z_s(w)$, on a encore :

$$\int_o^t x_s(w)\,\delta z'_s(w) = \int_o^t x_s(w)\,y_s(w)\,\delta z_s(w). \tag{3.16}$$

Ainsi, l'intégrale d'Ito semble plus commode à manipuler que l'intégrale de Stratonovitch, d'un point de vue probabiliste : la classe des processus intégrables est plus large, et l'intégrale le long des trajectoires d'une martingale est encore une martingale (1) (ce qui nous permettra d'appliquer l'inégalité (3.11)'). Paradoxa-

(1) à des conditions techniques d'intégrabilité près.

lement, nous utiliserons constamment l'intégrale de Stratonovitch. Cela provient de la propriété suivante : soient $(x_{i,t}(w))$ une semi-martingale à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et f une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, <u>bornée</u>. $f(x_{i,t}(w))$ est encore une semi-martingale à valeurs réelles, et l'on a la formule :

$$f(x_t(w)) = f(x_o(w)) + \int_o^t f'(x_s(w)) . dx_s(w). \tag{3.17}$$

Si on utilise l'intégrale d'Ito, cette formule devient beaucoup plus compliquée ([J], [Me.3])

$$\begin{aligned} f(x_t(w)) &= f(x_o(w)) + \int_o^t f'(x_s(w))\,\delta x_s(w) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_o^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(x_s(w))\, d\langle x_i(w), x_j(w)\rangle_s . \end{aligned} \tag{3.18}$$

La formule (3.17) montre que l'intégrale de Stratonovitch est de nature plus géométrique que celle d'Ito (cf. [Me.1]).

Grâce à ces rappels, on peut écrire rigoureusement l'équation différentielle vérifiée par $\varphi_t(x,w)$ dans (3.7) : comme dans (3.6), $w^n_{i,t}$ est $F_{t_n^+}$ mesurable et comme $F_t \subset F_{t_n^+}$, $(w^n_{i,t})\,dt$ constitue une "approximation anticipative de dw", et $\varphi_t(x,w)$ sera donc solution de l'équation différentielle de Stratonovitch suivante :

$$dx_t(x) = X_o(x_t(x))\,dt + \sum_{i=1}^m X_i(x_t(x))\,dw_i \ ; \ x_o(x) = x. \tag{3.19}$$

Soit f une fonction C^∞ bornée de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$; supposons que ses dérivées de tous ordres soient bornées : la formule d'Ito-Stratonovitch (3.17) et les règles de conversion de l'intégrale de Stratonovitch en intégrale d'Ito montrent que :

$$\begin{aligned} f(x_t(x)) &= f(x) + \int_o^t X_o(x_t(x))\,f(x_t(x))\,dt + \\ &+ \int_o^t \sum_{i=1}^m X_i(x_t(x))\,f(x_t(x))\,\delta w_i + \frac{1}{2}\int_o^t \sum_{i=1}^m X_i^2(x_t(x))\,f(x_t(x))\,dt. \end{aligned} \tag{3.20}$$

De plus, le fait que (3.19) possède une unique solution montre que la loi conditionnelle de $t \to x_t(x)$ quand on connait F_s est la loi du processus $t \to x_{t-s}(x_s(x))$ ($x_t(x)$ est un processus de Markov). Ceci et (3.20) montrent que l'on réalise stochastiquement le semi-groupe P_t associé à l'opérateur différentiel $L = X_o + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m X_i^2$ en posant :

$$P_t\,f(x) = E[f(x_t(x))]. \tag{3.21}$$

En effet, (3.21) définit bien un semi-groupe, car

$$(3.21)' \quad \begin{aligned} P_{t+t'} f(x) &= E[f(x_{t+t'}(x))] = E[E[f(x_{t+t'}(x))|F_{t'}]] \\ &= E[E[f(x_t(x_{t'}(x)))]] = P_t(P_{t'}f)(x). \end{aligned}$$

Considérons maintenant une variété riemannienne compacte V de dimension d et Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami associé. On cherche à construire à partir de mouvements browniens plans w_i un processus $x_t(x)$ issu de x de sorte que pour toute fonction C^∞ de V dans $\mathbb{R}$, le processus $t \to f(x_t(x)) - f(x_o) - \frac{1}{2}\int_o^t \Delta f(x_s(x))ds$ soit une martingale. Localement, $L = X_o + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m X_i^2$. On peut trouver une expression de X_o et et des X_i en fonction des coefficients de la métrique dans [I-W]. La remarque que l'on peut faire est la suivante : dans un système de coordonnées locales, la métrique s'écrit $\sum_{i,j} a_{i,j}\,\xi_i\,\xi_j$, la mesure riemannienne g(x)dx, et la partie du second ordre (il s'agit d'un abus de langage) de $\Delta = \sum_{i,j} a^{i,j}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ est reliée à la métrique : en effet $a^{i,j}(x)$ est la matrice inverse de la matrice donnant la métrique. X_o alors est choisi pour que L soit formellement auto-adjoint pour la structure préhilbertienne sur les fonctions C^∞ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ donnée par le produit hermitien $\int_{\mathbb{R}^d} \langle\ ,\ \rangle_x\, g(x)dx$.

Le fait que <u>localement</u> Δ s'écrive $X_o + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m X_i^2$ et (3.20) suggère que l'on peut construire une réalisation concrète de la loi P_x du mouvement brownien à partir d'une équation différentielle stochastique (3.19), jusqu'au moment où l'on sort de la carte locale où Δ s'écrit $X_o + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m X_i^2$ (ce premier temps de sortie est un exemple de ce qu'on appelle en probabilité un temps d'arrêt [J]). Ensuite, on peut "recoller" avec une autre solution sur une autre carte locale. Le problème est que l'on doit "changer" de cartes locales et donc de champs de vecteurs. Pour contourner cette difficulté, on peut procéder de deux façons différentes :

<u>Construction de Schwartz</u> ([Sch]) : on plonge V dans un espace $\mathbb{R}^{\tilde d}$. On construit suffisamment de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^{\tilde d}$ $\tilde X_o(\tilde x),\dots,\tilde X_m(\tilde x)$ tels que :

i) Si $\tilde x \in V$, $\tilde X_o(\tilde x),\dots,\tilde X_m(\tilde x)$ sont des vecteurs tangents à V en $\tilde x$.

ii) L'opérateur $\tilde L = \tilde X_o + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \tilde X_i^2$ coïncide sur V avec l'opérateur de Laplace-Beltrami.

Cette construction est rendue possible au moyen de partitions de l'unité et parce que localement $\Delta = X_o + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d X_i^2$, car V est supposée compacte. On remarque aussi que $m \geq d$ dans ii). On introduit un mouvement brownien m dimensionnel, et on considère la solution $\tilde{x}_t(\tilde{x})$ de l'équation différentielle de Stratonovitch :

$$(3.22) \qquad \begin{aligned} d\tilde{x}_t(\tilde{x}) &= \tilde{X}_o(\tilde{x}_t(\tilde{x}))dt + \sum_{i=1}^{m} \tilde{X}_i(\tilde{x}_t(\tilde{x}))\,dw_i \\ x_o(\tilde{x}) &= \tilde{x}. \end{aligned}$$

Si $x \in V$, $\tilde{x}_t(x)$ est un processus aléatoire à valeurs dans V, en vertu du "caractère intrinsèque" de l'intégrale de Stratonovitch. (3.20) montre que la loi du processus $\tilde{x}_t(x)$ est solution du problème de martingales initialement posé. De plus, on réalise le semi-groupe P_t associé à l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ sur V en posant $P_t f(x) = E[f(\tilde{x}_t(x))]$.

<u>Construction de Malliavin</u> ([M]) : la méthode précédente introduit un grand nombre de mouvements browniens auxiliaires w_i et de champs de vecteurs $\tilde{X}_i$, afin de contourner le problème du recollement des champs de vecteurs dans les expressions locales de Δ. En contrepartie, elle n'est pas intrinsèque. Malliavin propose une autre méthode, plus intrinsèque, et qui construit le mouvement brownien sur la variété V d <u>dimensionnelle</u> à partir d'un mouvement brownien plat d <u>dimensionnel</u>. Le prix à payer est qu'il faut considérer le fibré $O(V) \xrightarrow{\pi} V$ des repères orthogonaux sur V. C'est une variété compacte. Soit $I(x) = (e_1(x),\dots,e_d(x))$ un repère orthonormé au-dessus de x : notons $(X_1^*(\tau),\dots,X_d^*(\tau))$ le système de champs de vecteurs sur O(V) défini ainsi : $X_i^*(\tau)$ est le relèvement horizontal de $e_i(x)$ en $\tau(x)$ pour la connexion de Lévi-Civita (cf. section suivante). On peut alors introduire l'équation différentielle de Stratonovitch sur O(V) :

$$(3.23) \qquad d\tau_t(\tau) = \sum_{i=1}^{m} X_i^*(\tau_t(\tau))\,dw_i \quad ; \quad \tau_o = \tau(x).$$

C'est la limite en probabilité de la solution des équations différentielles ordinaires (cf. 3.6) :

$$(3.24) \qquad d\tau_t^n(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i^*(\tau_t^n(\tau))\,w_{i,t}^n\,dt \quad ; \quad \tau_o^n(x) = \tau(x)$$

qui s'interprète ainsi : en x, on choisit un repère $\tau_o(x)$. Sur $[0,2^{-n}]$, on choisit une géodésique au hasard avec la probabilité $(w_{1,\frac{1}{2^n}},\dots,w_{d,\frac{1}{2^n}})$ dans le système de repères définis par $\tau(x)$, et on effectue le transport parallèle de $\tau(x)$ suivant cette géodésique. On arrive ainsi en un point de $x_{\frac{1}{2^n}}$ de V, avec un repère $\tau_{\frac{1}{2^n}}(x_{\frac{1}{2^n}})$ au-dessus de $x_{\frac{1}{2^n}}$. On recommence le procédé. Comme la loi d'une gaussienne centrée réduite est invariante par changement de base orthonormée, la loi du processus $t \to \pi\,\tau_t(x)$ est indépendante du repère choisi initialement au-dessus de x.

Bismut utilise systématiquement cette construction : nous utiliserons plutôt la construction de Schwartz, à titre pédagogique.

III.2) Relèvement horizontal du mouvement brownien et formule de Feynman-Kac matricielle :

Soient X_i $i = 0,\dots,m$, des champs de vecteurs C^∞ de dérivées de tous ordres bornées. Introduisons une application C^∞ $x \to A(x)$ de $\mathbb{R}^d$ dans l'espace des 1 formes sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$. Supposons que les dérivées de tous ordres de A(x) soient bornées, et considérons le système d'équations différentielles de Stratonovitch :

$$(3.25)\qquad \begin{aligned} &dx_t(x) = X_o(x_t(x))\,dt + \sum_{i=1}^m X_i(x_t(x))\,dw\ ; \\ &d\tau_t(x) = -<A(x_t(x),X_o(x_t(x))\,dt>\tau_t(x) - \\ &- \sum_{i=1}^m <A(x_t(x)),X_i(x_t(x))\,dw_i>\tau_t(x) = -<A(x_t(x)),dx_t(x)>\tau_t(x) \\ &x_o(x) = x \qquad \tau_o(x) = Id_{\mathbb{R}^p}. \end{aligned}$$

$t \to \tau_t(x)$ est un processus de matrices aléatoires à p lignes et p colonnes. De plus, $\tau_t(x)$ est inversible : la formule d'Ito-Stratonovitch (3.19) montre en effet que :

$$(3.26)\qquad \begin{aligned} d\tau_t^{-1}(x) &= \tau_t^{-1}(x)<A(x_t(x)),dx_t(x)> \\ &= \tau_t^{-1}(x)<A(x_t(x)),X_o(x_t(x))dt> + \tau_t^{-1}(x)\sum_{i=1}^m <A(x_t(x)),X_i(x_t(x))dw_i> \\ \tau_o^{-1}(x) &= Id_{\mathbb{R}^p}. \end{aligned}$$

Introduisons une application φ C^∞ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^p$: $\tau_t^{-1}(x)\,\varphi(x_t(x))$ est un processus aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. De plus, la formule d'Ito-Stratonovitch montre que :

$$(3.27)\qquad \begin{aligned} d(\tau_t^{-1}(x)\,\varphi(x_t(x))) &= \tau_t^{-1}(x)<A(x_t(x),X_o(x_t(x))\,dt>\varphi(x_t(x)) \\ &+ \sum_{i=1}^m \tau_t^{-1}(x)<A(x_t(x)),X_i(x_t(x))\,dw_i>\varphi(x_t(x)) \\ &+ \tau_t^{-1}(x)<X_o(x_t(x)),\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi(x_t(x))>dt\ + \end{aligned}$$

$$+ \tau_t^{-1}(x) \sum_{i=1}^{m} \langle X'(x_t(x)), \overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi(x_t(x))\, dw_i \rangle.$$

On peut interpréter ces formules d'une façon plus géométrique ([Me.1]) : $\mathbb{R}^p$ définit un fibré vectoriel (trivial) au-dessus de $\mathbb{R}^d$. $x \to A(x)$ s'interprète comme le champ des matrices de Christoffel associé à la connexion ∇ qui à un champ de vecteurs Y sur $\mathbb{R}^d$ et à la section φ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^p$ associe la section $\nabla_Y \varphi$:

$$x \to \langle A(x), Y(x)\rangle\, \varphi(x) + \langle Y(x), \overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi(x)\rangle. \tag{3.28}$$

$\tau_t(x)$ est un opérateur aléatoire linéaire qui applique la fibre de $\mathbb{R}^p$ au-dessus de x sur la fibre de $\mathbb{R}^p$ au-dessus de $x_t(x)$. Si on effectue l'approximation de $x_t(x)$ par $x_t^n(x)$ donnée par (3.6), on obtient un opérateur $\tau_t^n(x)$: de plus, si u est un vecteur fixe de $\mathbb{R}^p$

$$\nabla_{dx_t^n(x)}\, \tau_t^n(x).u = \langle A(x_t^n(x).dx_t^n(x))\rangle\, \tau_t^n(x).u + d\tau_t^n(x).u = 0 \tag{3.29}$$

par (3.25). $\tau_t^n(x)$ est l'opérateur de transport parallèle pour la connexion ∇ de la fibre de $\mathbb{R}^p$ au-dessus de x sur celle de $\mathbb{R}^p$ au-dessus de $x_t^n(x)$. Ceci justifie l'appellation suivante : $\tau_t(x)$ est l'opérateur de transport parallèle de la fibre au-dessus de x sur celle au-dessus de $x_t(x)$ pour la connexion ∇ suivant la trajectoire de $x_s(x)$ $s \leq t$. $\tau_t^{-1}(x)$ est l'opérateur de transport parallèle pour la connexion ∇ suivant la trajectoire de $x_s(x)$ $s \leq t$ parcourue en sens inverse. (3.27) s'écrit alors de façon plus synthétique :

$$\begin{aligned} d(\tau_t^{-1}(x)\, \varphi(x_t(x))) &= \tau_t^{-1}(x)(\nabla_{X_o(x_t(x))}\, \varphi(x_t(x))\, dt) + \\ &+ \tau_t^{-1}(x)\Big(\sum_{i=1}^{m} \nabla_{X_i(x_t(x))}\, \varphi(x_t(x))\, dw_i\Big) = \tau_t^{-1}(x)\, \nabla_{dx_t(x)}\, \varphi(x_t(x)) \end{aligned} \tag{3.27'}$$

(Théorème 1.1 [B.4] p. 425).

La diffusion $x_t(x)$ est gouvernée par l'opérateur $X_o + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} X_i^2$. On relève L en un opérateur L^H qui agit sur les sections φ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^p$ en posant :

$$L^H \varphi(x) = \nabla_{X_o(x)}\, \varphi(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \nabla_{X_i(x)} \nabla_{X_i(x)}\, \varphi(x). \tag{3.30}$$

L^H possède un semi-groupe P_t = (3.27)'. Les règles de conversion de l'intégrale de Stratonovitch en intégrale d'Ito, le fait que l'équation donnant $\tau_t^{-1}(x)$ est une <u>équation linéaire</u>, montrent que :

$$P_t\, \varphi(x) = E[\tau_t^{-1}(x)\, \varphi(x_t(x))]. \tag{3.31}$$

A l'opérateur L^H, on peut ajouter un potentiel C, c'est-à-dire une application C^∞ de $\mathbb{R}^d$ dans l'ensemble des matrices carrées à p lignes et p colonnes à coefficients réels (ou complexes). On suppose que $x \to C(x)$ est borné ainsi que toutes ses dérivées. Dans le cas scalaire ($\mathbb{R}^p = \mathbb{R}$, $A = 0$) le semi-groupe associé à $L+C$ se représente au moyen d'une formule de Feynman-Kac ([W]). Dans la situation présente, le semi-groupe $\tilde{P}_t$ associé à L^H+C se représente à partir de celui de L^H au moyen d'une formule de Feynman-Kac matricielle ([M]). Posons en effet :

$$
(3.32)\qquad \begin{aligned} &dU_t(x) = U_t(x)\,\tau_t^{-1}(x)\,C(x_t(x))\,\tau_t(x)\,dt \\ &U_o(x) = Id. \end{aligned}
$$

Dans cette formule, on remarque que $\tau_t(x)$ applique la fibre de $\mathbb{R}^p$ au-dessus de x sur celle au-dessus de $x_t(x)$, $C(x_t(x))$ celle au-dessus de $x_t(x)$ sur elle-même, et $\tau_t^{-1}(x)$ nous ramène sur la fibre au-dessus de x. $U_t(x)$ est donc un opérateur linéaire <u>de la fibre au-dessus de x sur elle-même</u>.

Soit $s<t$. Comme les équations (3.26) et (3.32) sont des équations linéaires, la loi conditionnelle du processus $t \to \{x_t(x),\tau_t^{-1}(x),U_t(x)\}$ sachant que F_s est égale à la loi du processus défini pour $t>s$ par :

$$
(3.33)\qquad \begin{aligned} &t \to \{x_{t-s}(x_s(x)),\tau_s^{-1}(x)\,\tau_{t-s}^{-1}(x_s(x)), \\ &U_s(x)\,\tau_s^{-1}(x)\,U_{t-s}(x_s(x))\,\tau_s(x)\}. \end{aligned}
$$

Soit φ une section C^∞ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^p$ (ou dans $\mathbb{C}^p$). (3.33) implique que :

$$
(3.34)\qquad \begin{aligned} &E[U_t(x)\,\tau_t^{-1}(x)\,\varphi(x_t(x))] = E[E[U_t(x)\,\tau_t^{-1}(x)\,\varphi(x_t(x))\,|F_s]] = \\ &E[U_s(x)\,\tau_s^{-1}(x)\,E[U_{t-s}(x_s(x))\,\tau_{t-s}^{-1}(x_s(x))\,\varphi(x_{t-s}(x))]]. \end{aligned}
$$

En d'autres termes, la formule

$$
(3.35)\qquad \tilde{P}_t\,\varphi(x) = E[U_t(x)\,\tau_t^{-1}(x)\,\varphi(x_t(x))]
$$

définit un semi-groupe dont on vérifie que le générateur est L^H+C.

On a déjà vu que l'étude du semi-groupe de la chaleur associé à l'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété riemannienne compacte V se ramène à l'étude d'une diffusion sur $\mathbb{R}^{\tilde{d}}$, après plongement de V dans un espace $\mathbb{R}^{\tilde{d}}$ de dimension assez grande. La démarche est à peu près identique pour un Laplacien agissant sur les sections d'un fibré. Soit en effet $E \to V$ un fibré vectoriel réel (ou complexe) muni d'une connexion ∇. On peut construire le Laplacien horizontal Δ^H, relevé de l'opérateur de Laplace-Beltrami, pour cette connexion ∇ : il agit sur les sections φ

C^∞ de V dans E. Si E est trivial, et si on plonge V dans $\mathbb{R}^{\tilde{d}}$, on peut prolonger E en un fibré trivial sur $\mathbb{R}^{\tilde{d}}$ et ∇ en une connexion $\tilde{\nabla}$ sur le fibré prolongé : on applique la construction précédente. Si E n'est pas trivial, on sait ([A]) que l'on peut trouver un autre fibré E_1 au-dessus de V tel que $E \oplus E_1$ soit trivial : on introduit une connexion arbitraire sur E_1, notée ∇_1, et on considère la connexion $\nabla \oplus \nabla_1$. On se ramène ainsi au cas précédent, car le transport parallèle pour la connexion $\nabla \oplus \nabla_1$ préserve la décomposition de $E \oplus E_1$. On procèderait de façon identique pour représenter stochastiquement le semi-groupe associé à $L^H + C$, C étant un potentiel agissant linéairement sur les fibres de E.

III.3) Choix de la superconnexion :

Afin de représenter stochastiquement le semi-groupe associé à la courbure $R^\infty_{y,s}$ agissant sur H^∞_y, nous allons choisir d'après ce qui précède une superconnexion $\tilde{\nabla}^\infty_s$ telle que :

$$\tilde{R}^\infty_{y,s} = -\tilde{\Delta}^H_y + C_y, \tag{3.36}$$

$\tilde{\Delta}^H_y$ étant un Laplacien horizontal agissant sur un fibré convenable au-dessus de la variété V_y et C_y un potentiel matriciel agissant sur ce fibré.

Rappelons qu'en tout point x de M, on associe un sous-espace $T^H_x M$ qui soit un supplémentaire de l'espace tangent à la fibre V_y passant par x, et que $T^H M$ constitue un fibré au-dessus de M, et donc un fibré au-dessus de V_y. Soit une métrique riemannienne sur B, notée $\langle\ ,\ \rangle_B$; elle se transporte en une métrique sur $T^H_x M$, car $T^H_x M$ est isomorphe à $T_y B$ si $x \in V_y$. Soit la famille de métriques $\langle\ ,\ \rangle_{V_y}$ sur V_y. A partir de la métrique $\langle\ ,\ \rangle_B$ sur B et la famille de métriques $\langle\ ,\ \rangle_{V_y}$ sur V_y, on construit une unique métrique sur M, telle que $T^H_x M$ et $T_x V_y$ soient orthogonaux, et telle que la restriction de $\langle\ ,\ \rangle_M$ à $T^H_x M$ soit $\langle\ ,\ \rangle_B$ et celle de $\langle\ ,\ \rangle_M$ à $T_x V_y$ soit $\langle\ ,\ \rangle_{V_y}$. Soit ∇^M la connexion de Levi-Civita associée.

Pour essayer d'introduire notre superconnexion, nous allons nous ramener à ce que l'on connaît déjà, c'est-à-dire l'opérateur de Dirac. Quitte à introduire un cercle S_1, et à prendre comme espace des paramètres $S_1 \times B$, on peut supposer que la dimension de M est paire, si bien que l'on peut construire au voisinage de x le fibré des spineurs pour $\langle\ ,\ \rangle_M$, et l'opérateur de Dirac D^M qui agit sur les sections d'un voisinage de x sur le fibré des spineurs tensorisé avec le fibré auxiliaire ξ. On a alors la formule de Lichnerowicz :

$$(D^M)^2 = -\Delta^H + \frac{K}{4} + \sum_i e_i e_j \otimes R^\xi(e_i, e_j). \tag{3.37}$$

Dans (3.37), Δ^H désigne le Laplacien horizontal sur M pour le fibré des spineurs, K la courbure scalaire de M, (e_i) une section locale de base orthonormée de M pour la métrique de M et la connexion de Levi-Civita de M, et R^ξ le tenseur de courbure pour la connexion ∇^ξ sur le fibré auxiliaire ξ. L'idée de Bismut pour introduire la superconnexion $\tilde{\nabla}_s^\infty$ qui permettra de mener les calculs est la suivante : remarquons d'abord que le théorème II.4 est un théorème local en y. Soit $f_\alpha(y)$ un système de bases orthonormées définies sur un voisinage de y_o dans B : il se remonte en un système de bases orthonormées $f_{\alpha,y}(x)$ de $T_x^H M$ si $x \in V_y$. Soit $e_{i,y}(x)$ un système de bases orthonormées directes de $T_x(V_y)$ défini sur un voisinage de x_o. On a :

$$\begin{aligned}
&D^M = \Sigma\, e_{i,y}(x)\, \nabla^M_{e_{i,y}(x)} \otimes I + \sum_\alpha f_{\alpha,y}(x) \\
(3.38)\qquad & \nabla^M_{f_{\alpha,y}(x)} \otimes I + \sum_i e_{i,y}(x) \otimes \nabla^\xi_{e_{i,y}(x)} + \sum_\alpha f_{\alpha,y}(x) \otimes \nabla^\xi_{f_{\alpha,y}(x)}.
\end{aligned}$$

Or $\nabla^M_{e_{i,y}(x)}$ applique les spineurs de $T_x V_y$ sur les spineurs de $T_x M$ et non sur les spineurs de $T_x V_y$. De même, $\nabla^M_{f_{\alpha,y}(x)}$ applique les spineurs de $T_x^H M$ sur ceux de $T_x M$ et non sur ceux de $T_x^H M$. Afin de remédier à cet inconvénient, Bismut introduit la même connexion ∇' que celle utilisée dans la troisième partie de la preuve du théorème II.4 : Si Y est un champ défini sur TV, et X un champ sur TM, $\nabla'_X Y$ désigne la projection de $\nabla^M_X Y$ sur TV. En particulier, si X est un champ sur TV, $(\nabla'_X Y)(x) = (\nabla^{V_y}_X Y)(x)$ lorsque $x \in V_y$ (∇^{V_y} désigne la connexion de Levi-Civita sur V_y). Si Y est le relevé d'un champ sur TB et X un champ sur TV, $\nabla'_X Y = 0$. Si Y est un champ sur $T^H M$ et X un champ sur $T^H M$ qui se déduisent de deux champs X_B et Y_B sur TB, $\nabla'_X Y$ est le remonté dans $T^H M$ de $\nabla^B_{X_B} Y_B$ (∇^B est la connexion de Levi-Civita sur B). ∇' conserve le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_M$, la décomposition de T^M en $T^H M \oplus TV$: en revanche, elle possède une torsion T'. Deux connexions différant d'un tenseur, on peut poser :

$$(3.39)\qquad \nabla^M = \nabla' + S.$$

Comme ∇^M et ∇' préservent le produit scalaire, S est un tenseur antisymétrique ($S_X(.)$ est un opérateur antisymétrique).

$S_.(.,.)$ possède quelques propriétés remarquables ([B.1] Th. 1.9)

- il ne dépend pas de la métrique sur B

- $\langle S_{e_{i,y}(x)}\, e_{j,y}(x), e_{k,y}(x)\rangle_M = 0$, $S_{f_{\alpha,y}(x)}\, f_{\beta,y}(x)$ appartient à $T_x V_y$, alors que $S_{f_{\alpha,y}(x)}\, e_{j,y}(x)$ appartient à $T_x^H V_y$. Ceci résulte en grande partie du fait que la torsion T' de ∇' prend ses valeurs dans $T_x V_y$, car la famille des plans tangents à V est une famille intégrable.

L'idée de Bismut est alors de transformer les produits de Clifford $f_{\alpha,y}(x)$ en produits extérieurs $f^{\alpha}_y(x)$ agissant sur $\Lambda(T^H_x M)$, $f^{\alpha}_y(x)$ étant la base duale déduite de $f_{\alpha,y}(x)$ grâce à la métrique sur B. Il obtient ainsi un opérateur qui agit sur les sections C^{∞} de V_y dans $\Lambda(T^H_x M) \otimes (S_y \otimes \xi_y)$ dépendant de façon C^{∞} de y :

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}^{\infty}_{\Delta,y} &= \Sigma\, e_{i,y}(x) \nabla^{V_y}_{e_{i,y}(x)} \otimes I + \sum_i e_{i,y}(x) \otimes \nabla^{\xi}_{e_{i,y}(x)} + \\
(3.40) \qquad &+ \sum_i e_{i,y}(x) S_{e_{i,y}(x)}(.) \otimes I + \Sigma\, f^{\alpha}_y(x) S_{f_{\alpha,y}(x)}(.) \otimes I + \\
&+ \Sigma\, f^{\alpha}_y(x) \otimes \nabla^{\xi}_{f_{\alpha,y}(x)} + \Sigma\, f^{\alpha}_y(x) \wedge \nabla'_{f_{\alpha,y}(x)} \otimes I = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6.
\end{aligned}
$$

Afin de mieux comprendre cette formule, nous allons la réécrire avec des $\hat{\otimes}$ comme dans la section I.2. Dans les deux premiers termes, on reconnaît $I \hat{\otimes} D_y$, l'opérateur de Dirac qui agit tensoriellement sur H^{∞}_y sans augmenter le degré des formes en y. Dans A_6, on reconnaît $(d \hat{\otimes} I) \otimes I$, la partie non tensorielle en y de la superconnexion (il y a bien sûr beaucoup d'abus de langage). Dans A_5, on reconnaît $\sum_{\alpha} (f^{\alpha}_y(x) \hat{\otimes} I) \otimes \nabla^{\xi}_{f_{\alpha,y}(x)}$: ceci augmente le degré des formes en y de 1. Dans A_4, on reconnaît $\frac{1}{2}(\sum_{i,\alpha,\beta} \langle S_{f_{\alpha,y}(x)} f_{\beta,y}(x), e_{i,y}(x) \rangle f_{\alpha,y}(x) \wedge f_{\beta,y}(x) \hat{\otimes} e_{i,y}(x)) \otimes I$. Dans A_3, $\{+ \sum_{i,j,\alpha} \frac{1}{2} \langle S_{e_{i,y}(x)} e_{j,y}(x), f_{\alpha,y}(x) \rangle f_{\alpha,y}(x) \hat{\otimes} e_{i,y}(x) e_{j,y}(x)\} \otimes I + \{ \sum_{i,\alpha,\beta} \frac{1}{4}$ $\langle S_{e_{i,y}(x)} f_{\alpha,y}(x), f_{\beta,y}(x) \rangle f_{\alpha,y}(x) \wedge f_{\beta,y}(x) \hat{\otimes} e_{i,y}(x)\} \otimes I$. Ainsi apparaissent des termes qui augmentent de deux degrés le degré des formes en y (contrairement aux superconnexions utilisées dans la preuve du théorème II.4).

Alors que D^M n'était défini que localement, $\tilde{\nabla}^{\infty}_s$ est défini globalement sur tout M, car il n'y a pas d'obstruction à la construction du fibré $\Lambda(T^H_x M)$. De plus, $\tilde{\nabla}^{\infty}_s$ ne dépend pas de la métrique sur B, essentiellement parce que S ne dépend pas de la métrique sur B.

Cette transformation des produits de Clifford en produits extérieurs permet à Bismut de calculer la courbure de la superconnexion ∇^{∞}_s à partir de la formule de Lichnerowicz (3.37). Notons $\tilde{\nabla}_y$ la connexion construite sur le fibré $(\Lambda(T^H_x M)) \otimes (S_x)$ au-dessus de V_y $(x \in V_y)$ par :

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{y,.} &= \nabla^{V_y}_{.} + S_{.}(.) = (I \hat{\otimes} \nabla^{V_y}_{.}) + \{- \sum_{j,\alpha} \frac{1}{2} \langle S_{.}(e_{j,y}(x)), f_{\alpha,y}(x) \rangle f_{\alpha,y}(x) \hat{\otimes} \\
(3.41) \qquad & e_{j,y}(x)\} + \{\frac{1}{4} \sum_{\alpha,\beta} \langle S_{.}(f_{\alpha,y}(x)), f_{\beta,y}(x) \rangle f_{\alpha,y}(x) \wedge f_{\beta,y}(x) \hat{\otimes} I\}.
\end{aligned}
$$

Notons $K_y(x)$ le tenseur de courbure scalaire sur V_y, pris en x, pour la métrique riemannienne $< , >_{V_y}$ sur V_y, et notons $C_y(x)$ le potentiel agissant sur $\Lambda(T_x^H M) \otimes (S_x \otimes \xi_x)$ par la formule :

$$
\begin{aligned}
C_y(x) = {} & \frac{1}{2} \sum_{i,j} (I \hat{\otimes} e_{i,y}(x) e_{j,y}(x)) \otimes R_x^{\xi}(e_{i,y}(x), e_{j,y}(x)) + \\
(3.42) \qquad & \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} ((f_y^{\alpha}(x) \wedge f_y^{\beta}(x)) \hat{\otimes} I) \otimes R_x^{\xi}(f_{\alpha,y}(x), f_{\beta,y}(x)) + \\
& + \sum_{\alpha,i} (f_y^{\alpha}(x) \hat{\otimes} e_{i,y}(x)) \otimes R_x^{\xi}(f_{\alpha,y}(x), e_{i,y}(x)).
\end{aligned}
$$

Soit enfin $\tilde{\Delta}_y^H$ le Laplacien horizontal associé à $\tilde{\nabla}_y$. On a le théorème suivant, dont la démonstration se trouve dans [B.1], p. 124-125 :

<u>Théorème III.1</u> : <u>La courbure</u> $\tilde{R}_{s,y}^{\infty}$ <u>de</u> $\tilde{\nabla}_s^{\infty}$ <u>est donnée par la formule</u> :

$$
(3.43) \qquad \tilde{R}_{s,y}^{\infty} = -\tilde{\Delta}_y^H \otimes I + \frac{1}{4} K_y + C_y.
$$

<u>Remarque</u> : Bien que le choix de la super-connexion semble uniquement dicté par la volonté d'obtenir des formules de Feynman-Kac matricielles, il résulte en fait de propriétés profondes de la cohomologie de l'espace des lacets de M.

<u>Remarque</u> : N. Berline et M. Vergne ([B-V]) remarquent que l'idée de transformer une multiplication de Clifford en une multiplication extérieure revient à changer d'espace de spineurs. Posons en effet n = dim B, et considérons l'espace $E = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^d \oplus (\mathbb{R}^n)^*$, muni de la forme quadratique non dégénérée Q, <u>non positive</u>, suivante : $\mathbb{R}^d$ est muni de la forme quadratique euclidienne canonique. $\mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*$ est muni de la forme de dualité canonique : si $u \in \mathbb{R}^n$, $u^* \in (\mathbb{R}^n)^*$, $Q(u,u^*) = u^*(u)$. $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*$ sont orthogonaux. Introduisons l'algèbre de Clifford complexifiée de E pour Q, c'est-à-dire la plus petite algèbre sur $\mathbb{C}$ engendrée par E et les relations de commutation $uu' + u'u = -2Q(u,u') . (u,u' \in E)$. L'espace des spineurs associés est égale à $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ complexifié tensorisé par l'espace des spineurs euclidiens de $\mathbb{R}^d$. Si $u \in \mathbb{R}^d$, la multiplication de Clifford par u sur $\Lambda(\mathbb{R}^n) \otimes S_d$ est égal à $I \hat{\otimes} u$, u désignant cette fois la multiplication de Clifford sur les spineurs euclidiens. Si $u^* \in (\mathbb{R}^n)^*$, la multiplication de Clifford sur $\Lambda(\mathbb{R}^n) \otimes S_d$ est égale à $u^* \hat{\otimes} I$, et $u \in \mathbb{R}^n$, elle est égale à $-2i(u) \otimes I$ ($i(u)$ désigne le produit intérieur par u : si η est une p-forme, $i(u)\eta(u_1, \dots, u_{p-1}) = \eta(u, u_1, \dots, u_{p-1})$, $u, u_1, \dots, u_{p-1}$ appartenant à $\mathbb{R}^n$). N. Berline et M. Vergne construisent alors une connexion sur $\Lambda(T^H M) \otimes (S \otimes \xi)$ de façon à ce que la super-connexion $\tilde{\nabla}_s^{\infty}$ soit l'opérateur de Dirac associé ([B-V], Cha. III.1).

IV. LE THEOREME DE L'INDICE DES FAMILLES :

IV.1) Le calcul des variations stochastiques :

Nous nous bornerons à esquisser les grandes lignes du calcul des variations stochastiques. Le lecteur plus intéressé peut consulter [Me.2], et les références y figurant (mais la liste n'est pas complète). Plaçons-nous d'abord en dimension finie. Munissons $\mathbb{R}^n$ d'une mesure gaussienne $dP = (\sqrt{2\pi})^{-n} \exp(-\frac{\|x\|^2}{2})\,dx$, et considérons une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, C^∞. Soient k et p deux entiers ≥ 0. On dit que $f \in D_{k,p}$ si $\sum_{|\alpha| \leq k} E[|\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} f|^p] < \infty$. Réciproquement, soit f une distribution dont on suppose que toutes les dérivées au sens des distributions appartiennent à tous les $L^p(dP)$. Alors f est une fonction C^∞. Ceci provient en grande partie des inégalités de Sobolev :

$$[\int |f(x)|^p dx]^{\frac{1}{p}} \leq C(\int |\text{grad } f(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}} \tag{4.1}$$

si $q < n$ et si $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{n}$.

La remarque essentielle est que l'on a de plus en plus besoin d'intégrabilité sur les dérivées de f pour en déduire sa régularité, quand n croît. Considérons par exemple la fonction $f(x) = \|x\|^{-1}$. Elle n'est pas C^∞, même pas finie en zéro ; toutefois, lorsque n tend vers l'infini, il existe une suite $p_n(\alpha) \to \infty$ telle que :

$$E[|\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} f|^{p_n(\alpha)}] < \infty. \tag{4.2}$$

Ceci montre qu'en dimension infinie, les deux notions précédentes qui coïncident (à des points techniques près) en dimension finie vont être différentes. Prenons par exemple la solution $(x_t(x), \tau_t(x), \tau_t^{-1}(x))$ de (3.25), (3.26) : elle ne dépend pas de façon continue des trajectoires de w, au sens de la norme uniforme sur $\mathbb{C}([0,1],\mathbb{R}^m)$. Toutefois, (4.2) montre qu'il n'y a rien de déraisonnable à généraliser en dimension infinie un calcul différentiel qui rende $(x_1(x), \tau_1(x), \tau_1^{-1}(x))$ C^∞ en un certain sens.

L'espace de Hilbert initial est l'espace H^2 des fonctions $t \to (h_i(t))$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^m$, absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, nulles en zéro, muni de la norme $\|\ \|$ énergie définie par :

$$\|h\|^2 = \sum_{i=1}^m \int_0^1 |\frac{d}{dt} h_i(t)|^2 dt \tag{4.3}$$

(en probabilité on l'appelle l'espace de Cameron-Martin). Pour construire la mesure gaussienne $\exp(-\frac{\|h\|^2}{2})$ "dh" sur H^2, on est obligé d'abandonner cet espace, en introduisant l'espace canonique $\mathbb{C}([0,1],\mathbb{R}^m)$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans

$\mathbb{R}^m$. Une des idées essentielles du calcul des variations est que l'on n'a pas besoin de grossir l'espace H^2 pour obtenir l'espace tangent à $\mathbb{C}([0,1],\mathbb{R}^m)$. Plus précisément, soit F une fonctionnelle brownienne mesurable de $\mathbb{C}([0,1],\mathbb{R}^m)$ dans $\mathbb{R}^d$. On dira que F est différentiable au sens de Malliavin s'il existe un processus $t \to D_t F$ de $[0,1]$ dans l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^d$ telles que, pour tout h de H^2, on ait en probabilité :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(w+\varepsilon h) - F(w)}{\varepsilon} = \int_0^1 D_t F \frac{dh}{dt}(t)\,dt. \tag{4.4}$$

Dans (4.4), le point important est de remarquer que l'on fait une variation de w dans une direction de H^2, et non dans une direction quelconque de $\mathbb{C}([0,1],\mathbb{R}^m)$ comme pour les dérivées de Frechet usuelles. Soit $p>1$. On dira que F est dans $D_{1,p}$ si

$$\|F\|_{1,p} = E[(\int_0^1 \|D_t F\|^2 dt)^{\frac{p}{2}}]^{\frac{1}{p}} = E[\|DF\|^p]^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{4.5}$$

Si $D_{t_1} F$ est encore différentiable au sens de Malliavin, et si $F \in D_{1,p}$, on note $D_{t_1,t_2}(F)$ sa différentielle au sens de Malliavin et on dit que F est dans $D_{2,p}$ si :

$$\|F\|_{2,p} = E[(\iint \|D_{t_1,t_2} F\|^2 dt_1\,dt_2)^{\frac{p}{2}}]^{\frac{1}{p}} = E[|D^{(z)}F|^p]^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{4.6}$$

On généralise ceci sans peine : F est dans $D_{k,p}$ si F est k fois différentiable au sens de Malliavin, de différentielle $D_{t_1,\dots,t_k} F$ et si :

$$\|F\|_{k,p} = E[|D^{(k)}F|^p]^{\frac{1}{p}} = E[(\iiint \|D_{t_1,\dots,t_k} F\|^2 dt_1,\dots,dt_k)^{\frac{p}{2}}]^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{4.7}$$

On dira que F est C^∞ au sens de Malliavin, si pour tous p et k, $F \in D_{p,k}$.

Les solutions d'équations différentielles stochastiques sont C^∞ au sens de Malliavin, dès que les champs de vecteurs qui permettent de les construire sont assez réguliers. Considérons en effet $(x_t(x), \tau_t(x), \tau_t^{-1}(x), U_t(x))$ les solutions de (3.25), (3.26) et (3.32) : elles sont C^∞ au sens de Malliavin dès que les dérivées de tous ordres des champs X_i, et des champs matriciels A et C sont bornées. De plus, $\|x_1(x)\|_{p,k}$, $\|\tau_1(x)\|_{p,k}$, $\|\tau_1^{-1}(x)\|_{p,k}$, $\|U_1(x)\|_{p,k}$ ne <u>dépendent que des normes uniformes de ces dérivées</u>.

Munissons $\mathbb{R}^n$ de la probabilité gaussienne $\exp(-\frac{\|x\|^2}{2})\,dx = dP$. Soit f une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^d$, appartenant à tous les $D_{p,k}(dP)$. Par définition, f est une submersion en x si l'application linéaire tangente en x, Df(x) est une surjection de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^d$. Introduisons la matrice symétrique $Df(x)\ {}^tDf(x)$: elle est positive définie sur $\mathbb{R}^d$, dès que f est une submersion en x. Si f est une submersion en tout point x, on a pour tout $p > 1$, toute fonction continue à support compact :

(4.8) $$E[g(x) \det (Df(x)^t Df(x))^{-p}] < \infty.$$

Il est remarquable en dimension finie que la réciproque soit vraie (dans [L.2], on montre qu'elle n'est pas vraie dans un certain sens en dimension infinie). De plus, si f vérifie (4.8), et appartient à tous les $D_{p,k}(dP)$, la loi image de f possède une densité C^∞.

Conformément à nos principes généraux, c'est la formulation (4.8) que l'on va choisir pour étendre à la dimension infinie la notion de submersion. Soit F une fonctionnelle brownienne définie sur $\mathbb{C}([0,1],\mathbb{R}^m)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, C^∞ au sens de Malliavin. $DF^t DF$ est une matrice positive aléatoire sur $\mathbb{R}^d$. Introduisons une autre fonctionnelle brownienne G à valeurs dans $\mathbb{R}$, C^∞ au sens de Malliavin. Considérons la mesure μ sur $\mathbb{R}^d$ qui, à toute fonction C^∞ bornée de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, associe $\mu(f) = E[Gf(F)]$. On a le théorème suivant ([I-W], [Me.2]) :

Théorème IV.1 : Supposons que pour tout entier $p > 1$:

(4.9) $$E[(\det DF\ {}^tDF)^{-p}] < \infty.$$

La mesure μ possède une densité C^∞ $q(z)$ sur $\mathbb{R}^d$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. De plus, les dérivées de tous ordres de $q(z)$ sont bornées, et il est possible de majorer $\sup_{z \in \mathbb{R}^d} \left|\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial z^{(\alpha)}} q(z)\right|$ par une expression universelle ne dépendant que de (α), des quantités $\|F\|_{p,k}$, $\|G\|_{p,k}$ et de $E[(\det DF\ {}^tDF)^{-p}]$.

Par la suite nous aurons besoin d'une version plus fine du théorème ([L.1]) donnée dans [Wa] dans un cadre plus abstrait. Considérons une fonctionnelle brownienne $F(\lambda,\varepsilon,w)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, dépendant d'un paramètre $\varepsilon \in [0,1]$ et d'un paramètre λ appartenant à un ouvert relativement compact de $\mathbb{R}^p$ ou à une variété compacte. On dit que F vérifie l'hypothèse H_1 si elle possède les propriétés suivantes :

- elle possède une version C^∞ en (λ,ε) (sur un ensemble de probabilité 1 indépendant de (λ,ε), $(\lambda,\varepsilon) \to F(\lambda,\varepsilon,w)$ est C^∞),

- elle et toutes ses dérivées en (λ,ε) sont C^∞ au sens de Malliavin,

- pour tous entiers i,j, tout multi-indice (α), la dérivée $i^{ème}$ au sens de Malliavin de $\frac{\partial^{(j)}}{\partial \varepsilon^{(j)}} \frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial \lambda^{(\alpha)}} F(\lambda,\varepsilon,w)$ possède une version C^∞ en (λ,ε),

- pour tout entier j, tout entier j', tout multi-indice (α) et (α'), tout entier k et tout réel $p > 1$, on a :

$$\|F\|_{p,k}^{\alpha,\alpha',j,j'} =$$

(4.10)

$$\sup_{\varepsilon\in[0,1],\ \lambda\in K} E[\|\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial\lambda^{(\alpha)}} \frac{\partial^{(j)}}{\partial\varepsilon^{(j)}} D^{(k)} \frac{\partial^{(\alpha')}}{\partial\lambda^{(\alpha')}} \frac{\partial^{(j')}}{\partial\varepsilon^{(j')}} F(\lambda,\varepsilon,w)\|^p] < \infty.$$

On dira que $F(\lambda,\varepsilon,w)$ vérifie H_2 si pour tout entier $p>0$:

(4.11) $$\sup_{\varepsilon\in[0,1],\ \lambda\in K} E[\det (DF(\varepsilon,\lambda,w)\ {}^tDF(\varepsilon,\lambda,w))^{-p}] < \infty.$$

Introduisons une autre fonctionnelle $G(\lambda,\varepsilon,w)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui vérifie encore H_1. On dira qu'elle vérifie H_3 si pour tout $j<d$:

(4.12) $$\frac{\partial^{(j)}}{\partial\varepsilon^{(j)}} G(\lambda,0,w) = 0.$$

Notons $\mu(\lambda,\varepsilon)$ la mesure sur $\mathbb{R}^d$ définie par :

(4.13) $$f \to E[G(\lambda,\varepsilon,w)\ f(\varepsilon F(\lambda,\varepsilon,w))].$$

On a le théorème suivant :

Théorème IV.2 : Supposons que $F(\lambda,\varepsilon,w)$ vérifient H_1 et H_2 et que $G(\lambda,\varepsilon,w)$ vérifient H_1 et H_3. Si $\varepsilon>0$, $\mu(\lambda,\varepsilon)$ possède une densité $q_{\lambda,\varepsilon}(z)$, C^∞ en $\varepsilon>0$, $\lambda\in K$, $z\in\mathbb{R}^d$. De plus, la loi de $F(\lambda,\varepsilon,w)$ possède une densité $p_{\lambda,\varepsilon}(z)$, C^∞ en $\varepsilon\geq 0$, $\lambda\in K$, $z\in\mathbb{R}^d$.

Sur tout compact de K, on a uniformément :

(4.14) $$\lim_{\varepsilon\to 0} q_{\lambda,\varepsilon}(0) = \frac{1}{d!} E[\frac{\partial^{(d)}}{\partial\varepsilon^{(d)}} G(\lambda,0,w) \,|\, F(\lambda,0,w) = 0] \quad p_{\lambda,\varepsilon}(0).$$

Remarque 1 : Nous utiliserons ces théorèmes dans des situations particulières où la méthode développée dans [B.5] conviendrait aussi bien (cf. [N] sur ce sujet).

Remarque 2 : En dimension finie, on a le choix pour démontrer les théorèmes précédents :

- ou bien on utilise le théorème des fonctions implicites en remarquant que $f^{-1}(y)$ constitue une sous-variété de $\mathbb{R}^d$, car f est une submersion,

- ou bien on utilise des formules d'intégration par parties. En effet, il n'est pas très difficile de montrer que si f est une submersion de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^d$ dont les dérivées vérifient certaines conditions d'intégrabilité, on a pour toute fonction C^∞ à support compact g de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, tout multi-indice (α),

$$(4.15)\qquad E[\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} g(f(x))] = E[g(f(x))\ L_{(\alpha)}]$$

pour une fonctionnelle $L_{(\alpha)}$ convenable. Dans [L.1] et [Wa] on utilise cette méthode, en dimension infinie. Toutefois, Bismut ([B.6]) donne un sens à la première méthode en dimension infinie pour un type de fonctionnelle "simple". Comme on le remarque dans [L.2], cette méthode nécessite moins de régularité pour les fonctionnelles F et G que celle qu'on utilise dans [L.1].

IV.2) <u>Le théorème de l'indice pour une famille d'opérateurs de Dirac non tordus</u> :

Dans cette partie, on suppose, afin de simplifier les calculs, qu'il n'y a pas de fibré auxiliaire ξ. Dans ce cas, on a d'après (3.40) :

$$(4.16)\qquad \tilde{R}^{\infty}_{y,s} = -\tilde{\Delta}^{H}_{y} + \frac{K_y}{4}.$$

Rappelons que la métrique sur M $<\ >_M$ est construite de la façon suivante : sur TV_y, elle coïncide avec $<\ ,\ >_{V_y}$. Sur $T^H M$, elle coïncide avec celle de B rappelée sur $T^H M$. Soit $\varepsilon > 0$. Modifions $<\ ,\ >_M$ en $<\ ,\ >_M(\varepsilon)$ de la façon suivante : $T^H_x M$ et $T_x V_y$ restent orthogonaux, $<\ ,\ >_M$ reste inchangé sur $T^H_x M$ et est multiplié par ε^{-2} sur $T_x V_y$. Pour simplifier, nous écrirons e_i les champs locaux $e_{i,y}(x)$ et f_α les champs locaux $f_{\alpha,y}(x)$. Si $(e_1,\dots,e_d)$ est une base orthonormée de $T_x V_y$ pour $<\ ,\ >_M$, $(\varepsilon e_1,\dots,\varepsilon e_d)$ est une base orthonormée de $T_x V_y$ pour $<\ ,\ >_M(\varepsilon)$. De plus, nos fibrés restent inchangés. Donc l'action de $(e_1,\dots,e_d)$ sur $S(T_x V_y)$ reste inchangée, car l'on a toujours (1.7). La connexion de Levi-Civita pour $<\ ,\ >_M(\varepsilon)$ sur TV_y reste inchangée. Ceci possède deux conséquences : d'une part la connexion ∇' sur TM reste inchangée ; d'autre part D_y est transformée en εD_y. Voyons maintenant comment se transforme le tenseur S ((3.39)). Notons $\nabla^M(\varepsilon)$ la connexion de Levi-Civita pour la métrique $<\ >_M(\varepsilon)$. Par définition, on a :

$$(4.17)\qquad \nabla^M(\varepsilon) = \nabla' + S(\varepsilon).$$

Introduisons le tenseur de torsion T' de ∇' ; soient deux champs de vecteurs sur M : par définition :

$$(4.18)\qquad T'(X,Y) = \nabla'_X Y - \nabla'_Y X - [X,Y].$$

Si X et Y sont deux champs sur TV, $T'(X,Y) = 0$, car la connexion ∇' est égale à la connexion de Levi-Civita sur TV et car la connexion de Levi-Civita est sans torsion. Si X est un champ sur TV et Y le remonté d'un champ sur TB dans $T^H M$, $\nabla'_X Y = 0$, $[X,Y] \in TV$ et $\nabla'_Y X \in TV$. Donc $T'(X,Y)$ appartient à TV dans ce cas. Supposons maintenant que X et Y sont les remontés dans $T^H M$ de deux champs de vecteurs X_B et Y_B sur TB. Par définition, $\nabla'_X Y$ est le remonté de $\nabla^B_{X_B} Y_B$ dans $T^H M$ et $\nabla'_Y X$ celui de $\nabla^B_{Y_B} X_B$. Or la connexion de Levi-Civita sur B est sans torsion. On a donc :

$$\nabla^B_{X_B} Y_B - \nabla^B_{Y_B} X_B - [X_B, Y_B] = 0. \tag{4.19}$$

Or le remonté dans $T^H M$ de $[X_B, Y_B]$ diffère d'un élément de TV de $[X,Y]$. Il s'ensuit de cela que dans tous les cas $T'(X,Y) \in TV$.

Par ailleurs, soient X, Y, Z trois champs de vecteurs sur M. Comme $\nabla^M(\varepsilon)$ est sans torsion, (4.17) implique que :

$$T'(X,Y) + S_X(\varepsilon)Y - S_Y(\varepsilon)X = 0. \tag{4.20}$$

Comme $\nabla^M(\varepsilon)$ et ∇' conservent le produit scalaire $\langle\ \rangle_M(\varepsilon)$, on a :

$$\langle S_X(\varepsilon)Y, Z\rangle_M(\varepsilon) + \langle S_X(\varepsilon)Z, Y\rangle_M(\varepsilon) = 0 \tag{4.21}$$

($S_X(\varepsilon)$ est un opérateur antisymétrique pour la métrique $\langle\ ,\ \rangle_M(\varepsilon)$). De ceci, il résulte que :

$$\begin{aligned} &2\langle S_X(\varepsilon)Y, Z\rangle_M(\varepsilon) + \langle T'(X,Y), Z\rangle_M(\varepsilon) + \langle T'(Z,X), Y\rangle_M(\varepsilon) - \\ &- \langle T'(Y,Z), X\rangle_M(\varepsilon) = 0. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Or T' est à valeurs dans TV. (4.22) implique que si on identifie $S(\varepsilon)$ à un opérateur agissant sur $\Lambda(TB) \otimes S_x$, on a pour tout j :

$$\begin{aligned} S_{e_j}(\varepsilon) &= \frac{1}{2\varepsilon^2} \sum_{i,\alpha} \langle S_{e_j}(e_i), f_\alpha\rangle_M \, \varepsilon f^\alpha \hat{\otimes} e_i + \\ &+ \frac{1}{4\varepsilon^2} \sum_{\alpha,\beta} \langle S_{e_j}(f_\alpha), f_\beta\rangle_M \, f^\alpha \wedge f^\beta \hat{\otimes} I. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Il en résulte que la superconnexion $\tilde{\nabla}^\infty_s$ définie en (3.40) est transformée en :

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}^\infty_s(\varepsilon) &= \sum_i I \hat{\otimes} e_{i,y}(x) \nabla^{V_y}_{e_{i,y}(x)} \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^2}\{\varepsilon^2 \sum_{i,j,\alpha} \frac{1}{2}\langle S_{e_{i,y}(x)} e_{j,y}(x), f_{\alpha,y}(x)\rangle_M \, f^\alpha_y(x) \hat{\otimes} e_{i,y}(x) e_{j,y}(x) + \\ &+ \frac{1}{4}\varepsilon \sum_{i,\alpha,\beta} \langle S_{e_{i,y}(x)} f_{\alpha,y}(x), f_{\beta,y}(x)\rangle \, f^\alpha_y(x) \wedge f^\beta_y(x) \hat{\otimes} e_{i,y}(x)\} + \\ &+ \sum_\alpha f^\alpha_y(x) \hat{\otimes} \nabla'_{f_{\alpha,y}(x)} \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon^2} \sum_{\alpha,\beta,i} \langle S_{f_{\alpha,y}(x)} e_{i,y}(x), f_{\beta,y}(x)\rangle f^\alpha_y(x) \wedge f_{\beta,y}(x) \hat{\otimes} e_{i,y}(x). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Notons $\tilde{\nabla}_y(\varepsilon)$ la connexion sur $\Lambda(T^H M) \otimes S$ considéré comme fibré au-dessus de V_y, déduite de $\tilde{\nabla}_y$ ((3.41)) au moyen de nos transformations :

$$\tilde{\nabla}_{y_\cdot}(\varepsilon) = 1 \hat{\otimes} \nabla^{V_y}_\cdot + S_\cdot(\varepsilon). \tag{4.25}$$

Soit $\tilde{\Delta}_y^H(\varepsilon)$ le Laplacien horizontal associé à l'opérateur de Laplace-Beltrami pour la connexion $\tilde{\nabla}_y(\varepsilon)$. La courbure $\tilde{R}_s^\infty(\varepsilon)$ de la superconnexion $\tilde{\nabla}_s^\infty(\varepsilon)$ vérifie :

$$\tilde{R}_s^\infty(\varepsilon) = -\varepsilon^2\, \tilde{\Delta}_y^H(\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{4} K_y. \tag{4.26}$$

Comme les noyaux de D et ε D sont égaux ainsi que leurs conoyaux, on a $\overline{\mathrm{ch}}$ [Ind D] = $\overline{\mathrm{ch}}$ [Ind (εD)]. Le théorème II.4 implique donc que :

$$\mathrm{Tr}_s \exp\left[-\frac{\tilde{R}_s^\infty(\varepsilon)}{2}\right] = \overline{\mathrm{ch}}\,([\mathrm{Ind}\ (D)]). \tag{4.27}$$

Remarquons que la formule (4.27) est locale en y. On peut donc supposer que la fibration $M \to B$ est triviale. On peut plonger la variété V dans un espace $\mathbb{R}^{\tilde{d}}$. De façon plus précise, il existe une famille C^∞ de plongements $\psi_{y,x}(z)$ de V dans $\mathbb{R}^{\tilde{d}}$, dépendant de façon C^∞ de $y\in B$, $x\in V$, $z\in V$, possédant les deux propriétés suivantes :

- $\psi_{y,x}(x) = 0$, $\psi_{y,x}(z)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ si z appartient à un voisinage de x, et constitue un système de coordonnées exponentielles de V au voisinage de x pour la métrique $\langle\ ,\ \rangle_{V_y}$.

- Il existe un entier m, et m+1 champs de vecteurs $X_{i,y,x}(z)$ sur $\mathbb{R}^{\tilde{d}}$, C^∞ en $y\in B$, $x\in V$, $z\in \mathbb{R}^{\tilde{d}}$ de dérivées de tous ordres bornées telles que le mouvement brownien issu de x sur V_y pour la métrique $\langle\ ,\ \rangle_{V_y}$ ait grâce au difféomorphisme $\psi_{y,x}$ même loi que la solution de l'équation différentielle stochastique de Stratonovitch sur $\mathbb{R}^{\tilde{d}}$:

$$dx_s(y,x) = \sum_{i=1}^m X_{i,y,x}(x_s(y,x))\,dw_i + X_{o,y,x}(x_s(y,x))\,ds\ ;\ x_o(y,x)=0. \tag{4.28}$$

De plus, on peut supposer que les d+1 premiers champs de vecteurs sont à valeurs de $\mathbb{R}^d$ sur un voisinage de 0. Si au lieu de considérer la métrique $\langle\ ,\ \rangle_{V_y}$ sur V_y, nous prenons la métrique $\frac{1}{\varepsilon^2}\langle\ ,\ \rangle_{V_y}$, nous devons introduire la solution de l'équation

$$\begin{aligned} &dx_s(y,x,\varepsilon) = \varepsilon \sum_{i=1}^m X_{i,y,x}(x_s(y,x,\varepsilon))\,dw_i + \varepsilon^2\, X_{o,y,x}(x_s(y,x,\varepsilon))\,ds \\ &x_o(y,x,\varepsilon) = 0. \end{aligned} \tag{4.29}$$

On voit apparaître deux transports parallèles possibles : le premier est le transport parallèle suivant les trajectoires de $x_s(y,x,\varepsilon)$ pour la connexion $\tilde{\nabla}_y(\varepsilon)$; il est noté $\tilde{\tau}_s(y,x,\varepsilon)$. C'est un opérateur pair (au sens de la section I.2), qui applique la fibre de $\Lambda(T^H M)\otimes S$ au-dessus de x sur la fibre au-dessus de $x_1(y,x,\varepsilon)$. Le second $\tau_s(x,y,\varepsilon)$ désigne le transport parallèle suivant les trajectoires de $x_s(y,x,\varepsilon)$ pour la connexion de Levi-Civita sur TV_y. C'est une isométrie de l'espace tangent en x à V_y sur l'espace tangent en $x_s(y,x,\varepsilon)$ à V_y. Il s'interprète aussi comme un opérateur pair appliquant S_x sur $S_{x_1(y,x,\varepsilon)}$ et $\mathrm{Id}\,\hat{\otimes}\, x_1(y,x,\varepsilon)$ comme un opérateur pair de la fibre de $\Lambda(T^H M)\otimes S$ au-dessus de x sur celle au-dessus de $x_1(y,x,\varepsilon)$.

Soit $\varphi_y(x)$ une section C^∞ de V_y dans $\Lambda(T^H M)\otimes S_y$.

D'après la section III.2, on a la formule :

$$\begin{aligned}\exp\left[-\tfrac{1}{2}\tilde{R}^\infty_{y,s}(\varepsilon)\right]\varphi_y(x) &= E\Big[\exp\Big[\tfrac{-\varepsilon^2}{8}\int_0^1 K_y(x_s(y,x,\varepsilon))\,ds\Big] \\ &\quad \tilde{\tau}_1^{-1}(y,x,\varepsilon)\,\varphi_y(x_1(y,x,\varepsilon))\Big].\end{aligned} \tag{4.30}$$

Notons π la projection de $\mathbb{R}^{\tilde{d}}$ dans $\mathbb{R}^d$. Posons $F(y,x,\varepsilon,w) = \frac{1}{\varepsilon}\,\pi(x_1(y,x,\varepsilon))$. $F(y,x,\varepsilon,w)$ satisfait aux hypothèses H_1 et H_2 du théorème IV.2, parce que les champs $X_{i,y,x}(0)$ engendrent $\mathbb{R}^d$ ($i\le d$) et car :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\varepsilon}\,\pi(x_1(y,x,\varepsilon)) = \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^m \pi X_{i,y,x}(x_s(y,x,\varepsilon))\,dw_i + \varepsilon\int_0^1 \pi X_{o,y,x}(x_s(y,x,\varepsilon))\,ds\end{aligned} \tag{4.31}$$

(nous renvoyons à [L.1] ou à [W] sur ce sujet). La loi de $\pi x_1(y,x,\varepsilon)$ possède une densité $p'_{y,x,\varepsilon}(z)$, C^∞ en $y\in B$, $x\in V$, $z\in\mathbb{R}^d$, $\underline{\varepsilon>0}$ et $F(y,x,\varepsilon,w)$ une densité C^∞ en $y\in R$, $x\in V$, $z\in\mathbb{R}^d$, $\varepsilon\ge 0$, notée $p_{y,x,\varepsilon}(z)$.

Soit $\chi_{y,x}(\tilde{z})$ une fonction C^∞ de $B\times V\times\mathbb{R}^{\tilde{d}}$ dans $[0,1]$, nulle en dehors d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{\tilde{d}}$, égale à 1 sur un voisinage de 0. Supposons de plus que ce voisinage soit assez petit pour qu'il existe une seule géodésique reliant x à z, si $\chi_{y,x}(\tilde{z})\neq 0$ et si $\tilde{z}\in V_y$. Supposons aussi qu'il soit assez petit pour que $\pi\tilde{z}=0$, $\tilde{z}\in V_y$ et $\chi_{y,x}(\tilde{z})\neq 0$ impliquent que $\tilde{z}=0$. D'après (4.27), la quantité que nous devons évaluer lorsque $\varepsilon\to 0$ est la suivante :

$$\begin{aligned}q_{y,x,\varepsilon} &= p_{y,x,\varepsilon}(0)\times E\Big[\chi_{y,x}(x_1(y,x,\varepsilon))\exp\Big[\tfrac{-\varepsilon^2}{8}\int_0^1 K_y(x_s(y,x,\varepsilon))\,ds\Big] \\ &\quad \mathrm{Tr}_s\,(\tilde{\tau}_1^{-1}(y,x,\varepsilon))\,\Big|\,\pi x_1(y,x,\varepsilon) = 0\Big].\end{aligned} \tag{4.32}$$

En général $\tilde{\tau}_1^{-1}(y,x,\varepsilon)$ n'applique pas la fibre de $\Lambda(T^H_x M)\otimes S_x$ sur elle-même : on ne peut donc définir sa supertrace. Toutefois, si $\chi_{y,x}(x_1(y,x,\varepsilon))$ est non nul, il existe une seule géodésique reliant x à $x_1(y,x,\varepsilon)$. Notons $\bar{x}_s(y,x,\varepsilon)$ le processus égal à $x_s(y,x,\varepsilon)$ quand $s\le 1$, et égal à la géodésique reliant $x_1(y,x,\varepsilon)$ à x entre le temps 1 et le temps 2. Remarquons que $s\to\bar{x}_s(y,x,\varepsilon)$, $s\in[0,2]$ est un chemin dans V qui part de x ($\equiv 0$) et rejoint x ($\equiv 0$) au temps 2. On note $\tau_2^{-1}(y,x,\varepsilon)$ et $\bar{\tau}_2^{-1}(y,x,\varepsilon)$

les transports parallèles correspondants. Comme $\bar{x}_2(y,x,\varepsilon) = 0$, $\tilde{\bar{\tau}}_2^{-1}(y,x,\varepsilon)$ est un opérateur de la fibre de $\Lambda(T^H M) \otimes S$ au-dessus de x sur elle-même. On peut donc définir sa supertrace. De plus, $\tilde{\bar{\tau}}_2^{-1}(y,x,\varepsilon) = \tilde{\tau}_1^{-1}(y,x,\varepsilon)$ lorsque $\tilde{x}_1(y,x,\varepsilon) = x\ (=0)$. Ceci nous permet d'introduire la mesure sur $\mathbb{R}^d$ $\mu(y,x,\varepsilon)$

$$f \to E[\chi_{y,x}(x_1(y,x,\varepsilon)) \exp [\frac{-\varepsilon^2}{8} \int_0^2 K_y(\bar{x}_s(y,x,\varepsilon))\, ds] \ldots \tag{4.33}$$
$$. \mathrm{Tr}_s \{\tilde{\bar{\tau}}_2^{-1}(y,x,\varepsilon)\} f(\pi x_1(y,x,\varepsilon))]$$

ce que nous écrirons plus simplement :

$$f \to E[G(y,x,\varepsilon)\ f(\varepsilon F(y,x,\varepsilon))]. \tag{4.33$'$}$$

$\mu(y,x,\varepsilon)$ est une mesure à valeurs dans $\Lambda(T_y B)$. De plus $q_{y,x,\varepsilon}$ n'est rien d'autre que la densité en 0 de cette mesure. Notons $q_{y,x,\varepsilon}(z)$ cette densité. Notre objectif est de calculer $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_V q_{y,x,\varepsilon}(0)\, d\pi_x$. Pour cela, on désire appliquer le théorème IV.2. Comme nous l'avons déjà dit, il n'est pas difficile de vérifier que $F(y,x,\varepsilon)$ vérifie les hypothèses H_1 et H_2 ([L.1]) . Il est par contre plus difficile de montrer que $G(y,x,\varepsilon)$ vérifie H_1 (à cause des $\frac{1}{\varepsilon}$ qui apparaissent dans (4.23) et H_3). On peut d'ailleurs interpréter ces différentes hypothèses à la lumière des procédures d'annulation qui interviennent dans la méthode de la chaleur classique ([Gi]), pour un seul opérateur de Dirac. Ind $D_+ = \mathrm{tr} \exp [-t D_+^* D_+] - \mathrm{tr} \exp [-t D_+ D_+^*]$ (D_+^* est l'adjoint de D_+). $\exp [-t D_+^* D_+]$ et $\exp [-t D_+ D_+^*]$ se représente par des noyaux régularisant $p_t^+(x,z)$ et $p_t^-(x,z)$ (c'est l'hypothèse H_2), et l'on doit calculer $\lim_{t \to 0} \int_V (\mathrm{Tr}\ p_t^+(x,x) - \mathrm{Tr}\ p_t^-(x,x))\, dx$. L'hypothèse ($H_3$) est ce qui permet de montrer que $\mathrm{Tr}\ p_t^+(x,x) - \mathrm{Tr}\ p_t^-(x,x)$ converge vers une limite finie quand $t \to 0$, alors que $p_t^+(x,x) = \sum_{i=-d}^{n} t^i c_i^+(x) + 0(t^n)$, et que $p_t^-(x,x) = \sum_{i=-d}^{n} t^{+i} c_i^-(x) + 0(t^n)$, et donc que les termes qui divergent dans $p_t^+(x,x)$ et $p_t^-(x,x)$ s'annulent.

Pour montrer que $G(y,x,\varepsilon)$ vérifient H_3, on doit effectuer ce qu'on appelle en physique un comptage des puissances de ε. Pour cela, nous allons calculer explicitement $\tilde{\bar{\tau}}_2^{-1}(y,x,\varepsilon)$. On remarque que $\tilde{\bar{\tau}}_2(y,x,\varepsilon)$ est un opérateur qui applique la fibre de $\Lambda(T^H M) \otimes S$ au-dessus de x sur elle-même. On va décomposer cet opérateur en trois morceaux : l'un égal à $I \hat{\otimes} A$, l'autre à $A \hat{\otimes} I$ et le troisième exprimant des "interactions" entre les deux éléments du produit tensoriel. On procède en deux étapes.

<u>Première étape</u> :

Un candidat naturel pour le premier opérateur intervenant dans la décomposition de $\tilde{\bar\tau}_2^{-1}(y,x,\varepsilon)$ est $I\,\hat\otimes\,\bar\tau_2^{-1}(y,x,\varepsilon)$. Plus précisément, posons :

$$\tilde{\bar\tau}_s^{-1}(y,x,\varepsilon) = (U_s(y,x,\varepsilon))(I\,\hat\otimes\,\bar\tau_s^{-1}(y,x,\varepsilon)). \tag{4.34}$$

Moyennant l'identification de $\Lambda(T^H M)\otimes S$ à $\Lambda(T_y B)\otimes S$, $U_s(y,x,\varepsilon)$ est un opérateur qui agit sur la fibre de $\Lambda(T^H M)\otimes S$ au-dessus de x. Quelle est l'équation différentielle qu'il vérifie ? Quitte à choisir la famille de plongements $z \to \psi_{y,x}(z)$, on peut trouver une application C^∞ $(y,x,z) \to A_{y,x}(z)$ de $B\times V\times \mathbb{R}^{\tilde d}$ à valeurs dans l'espace des formes linéaires de $\mathbb{R}^{\tilde d}$ à valeurs dans l'espace des matrices complexes à $\tilde d$ lignes et $\tilde d$ colonnes telles que :

- si $\tilde z \in V_y$,

$$A'_{y,x}(\tilde z) = \begin{array}{cc} & T_{\tilde z}V_y \\ T_{\tilde z}V_y & \begin{bmatrix} [A_{y,x}(z)] & [0] \\ [\quad 0 \quad] & [0] \end{bmatrix} \end{array} \tag{4.35}$$

- $\bar\tau_s(y,x,\varepsilon)$ est solution de l'équation différentielle de Stratonovitch :

$$\begin{aligned} d\bar\tau_s(y,x,\varepsilon) &= -(A'_{y,x}(\bar x_s(y,x,\varepsilon))\,.\,d\bar x_s(y,x,\varepsilon))\,\bar\tau_s(y,x,\varepsilon) \\ \bar\tau_s(y,x,\varepsilon) &= \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^d}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

De plus, $\bar\tau_s(y,x,\varepsilon)$ se décompose en $\begin{array}{cc} & T_{x_s(y,x,\varepsilon)}V \\ T_{x_s(y,x,\varepsilon)}V & \begin{bmatrix} [\qquad] & [0] \\ [\quad 0 \quad] & [\ ] \end{bmatrix} \end{array}$ à cause de (4.35) et la formule d'Ito-Stratonovitch (3.17).

Pour trouver l'équation gouvernant $\tilde{\bar\tau}_s(y,x,\varepsilon)$, on doit faire intervenir des termes en df^α. A partir de maintenant, $\Lambda(T^H M)\otimes S$ sera toujours considéré comme $\Lambda(T_y B)\otimes S$, alors qu'il était utile auparavant de garder les deux interprétations (en particulier, pour l'obtention de formules de Lichnerowicz). Ceci va nous permettre d'effectuer sans problème les opérations de prolongements à S. Ainsi, il existe des applications C^∞ de $B\times V\times \mathbb{R}^{\tilde d}$ dans l'espace des formes linéaires sur $\mathbb{R}^{\tilde d}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, notées $S_{\alpha,\beta,y,x}(\tilde z)$ $(\alpha,\beta \in [1,\dots,n])$ et des applications C^∞ de $B\times V\times \mathbb{R}^{\tilde d}$, $S_{\alpha,y,x}(\tilde z)$ $(\alpha \in [1,\dots,n])$ à valeurs dans l'espace des formes linéaires sur $\mathbb{R}^{\tilde{d}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{\tilde{d}}$, possédant les propriétés suivantes :

- si $\tilde{z}\in V_y$, $S_{\alpha,y,x}(\tilde{z})$ est à valeurs dans l'espace des formes linéaires de $\mathbb{R}^{\tilde{d}}$ à valeurs dans $T_{\tilde{z}}V_y$

- $\tilde{\bar{\tau}}_s(y,x,\varepsilon)$ est solution de l'équation de Stratonovitch :

$$
(4.37)\qquad
\begin{aligned}
d\tilde{\bar{\tau}}_s(y,x,\varepsilon) &= -\{(I\hat{\otimes}A_{y,x}(\bar{x}_s(y,x,\varepsilon))\,.\,d\bar{x}_s(y,x,\varepsilon) + \\
&+\frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta}\frac{1}{\varepsilon^2}(S_{\alpha,\beta,y,x}(\bar{x}_s(y,x,\varepsilon))\,.\,d\bar{x}_s(y,x,\varepsilon))\,df^\alpha\wedge df^\beta\hat{\otimes} I \\
&+\frac{1}{2}\sum_{\alpha} df^\alpha\hat{\otimes}\frac{1}{\varepsilon}S_{\alpha,y,x}(\bar{x}_s(y,x,\varepsilon)).d\bar{x}_s(y,x,\varepsilon)\}\,\tilde{\bar{\tau}}_s(y,x,\varepsilon) \\
\tilde{\tau}_o(y,x,\varepsilon) &= I\hat{\otimes}I \\
\tilde{\tau}_o(y,x,\varepsilon) &= I\hat{\otimes}I.
\end{aligned}
$$

Comme $\bar{x}_s(y,x,\varepsilon)$ est à valeurs dans V_y, $S^\alpha_{y,x}(x_s(y,x,\varepsilon))\,.\,d\bar{x}_s(y,x,\varepsilon)$ est en fait un opérateur impair de l'espace des spineurs. Posons

$$
(4.38)\qquad
\begin{aligned}
S^+_{y,x}(\tilde{z}) &= \frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta} S_{\alpha,\beta,y,x}(\tilde{z})\,df^\alpha\wedge df^\beta \\
S^{int}_{y,x}(\tilde{z}) &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha} df^\alpha\hat{\otimes}S_{\alpha,y,x}(\tilde{z}) \\
S_{y,x}(\varepsilon)(\tilde{z}) &= \frac{1}{\varepsilon^2}S^+_{y,x}(\tilde{z})\hat{\otimes}I + \frac{1}{\varepsilon}S^{int}_{y,x}(\tilde{z}).
\end{aligned}
$$

Si $\tilde{z}\in\mathbb{R}^d\cap V_y$, posons :

$$
(4.38)'\qquad S^{int}_{y,x}(\tilde{z}) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,i} S_{\alpha,i,y,x}(\tilde{z})\,df^\alpha\hat{\otimes}e_{i,y,x}(\tilde{z})
$$

e_i étant un champ de bases orthonormées directes ; de plus $e_{i,y,x}(0)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d\cap V_y$. On a alors :

$$
(4.39)\qquad
\begin{aligned}
d\tilde{\bar{\tau}}_s^{-1}(y,x,\varepsilon) &= \tilde{\bar{\tau}}_s^{-1}(y,x,\varepsilon)(I\hat{\otimes}A_{y,x}(\bar{x}_s(y,x,\varepsilon))\,.\,d\bar{x}_s(y,x,\varepsilon)) + \\
&+\tilde{\bar{\tau}}_s^{-1}(y,x,\varepsilon)(S_{y,x}(\varepsilon)(\bar{x}_s(y,x,\varepsilon))\,.\,d\bar{x}_s(y,x,\varepsilon)).
\end{aligned}
$$

Remarquons que si l'on n'avait pas de terme en $S_{y,x}(\varepsilon)$, la solution de (4.39) serait $I\hat{\otimes}\bar{\tau}_s^{-1}(y,x,\varepsilon)$. Si l'on pose $\tilde{\bar{\tau}}_s^{-1}(y,x,\varepsilon) = U_s(y,x,\varepsilon)(I\hat{\otimes}\bar{\tau}_s^{-1}(y,x,\varepsilon))$, on voit au moyen des règles du calcul de Stratonovitch que $U_s(y,x,\varepsilon)$ est solution de l'équation :

$$(4.40)\quad \begin{aligned} &dU_s(y,x,\varepsilon) = U_s(y,x,\varepsilon)\{(\mathrm{Id}\,\hat{\otimes}\,\bar{\tau}_s^{-1}(y,x,\varepsilon))\\ &(S_{y,x}(\varepsilon)(\bar{x}_s(y,x,\varepsilon))\,.\,d\bar{x}_s(y,x,\varepsilon))(\mathrm{Id}\,\hat{\otimes}\,\bar{\tau}_s(y,x,\varepsilon))\\ &U_o(y,x,\varepsilon) = \mathrm{Id}_{\Lambda(TB)}\,\hat{\otimes}\,\mathrm{Id}. \end{aligned}$$

Ce qui est intéressant dans cette équation est que seuls figurent les termes d'interactions S^{inter} entre les df^α et les spineurs et les termes $S^+_{y,x}$ où ne figurent plus d'éléments spinoriels. La deuxième étape consiste à séparer la contribution de ces deux derniers termes.

<u>Deuxième étape</u> : <u>Calcul de</u> $U_2(y,x,\varepsilon)$ <u>par utilisation de la formule de Campbell-Hausdorff</u>.

On remarque que lorsque $\tilde{z}\in V_y$, $u\in T_{\tilde{z}}V_y$, $S^+_{y,x}(\tilde{z})(u)$ est un opérateur sur $\Lambda(B)\otimes S$ qui commute avec $S^{int}_{y,x}(\tilde{z})(v)$ $(v\in T_{\tilde{z}}V_y)$. On peut donc séparer dans (4.40) la contribution de $S^+_{y,x}(\tilde{z})$ et de $S^{int}_{y,x}(\tilde{z})$. Plus précisément, notons $V_s(y,x,\varepsilon)$ la solution de l'équation différentielle de Stratonovitch :

$$(4.41)\quad \begin{aligned} &dV_s(y,x,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\,V_s(y,x,\varepsilon)(\mathrm{Id}\,\hat{\otimes}\,\bar{\tau}_s^{-1}(y,x,\varepsilon))\\ &(S^{int}_{y,x}(\bar{x}_s(y,x,\varepsilon))\,.\,d\bar{x}_s(y,x,\varepsilon))(\mathrm{Id}\,\hat{\otimes}\,\bar{\tau}_s(y,x,\varepsilon)) =\\ &= V_s(y,x,\varepsilon)\,dH_s(y,x,\varepsilon)\\ &V_s(y,x,\varepsilon) = I\,\hat{\otimes}\,I. \end{aligned}$$

Puisque $S^+_{y,x}(\tilde{z})(u)$ et $S^{int}_{y,x}(\tilde{z})(v)$ <u>commutent</u> et puisque tous les opérateurs $S^+_{y,x}(\tilde{z})(u)$ <u>commutent entre eux</u> (les forces d'ordre pair commutent), on a :

$$(4.42)\quad \begin{aligned} &U_s(y,x,\varepsilon) =\\ &= V_s(y,x,\varepsilon)\{\hat{\exp}[\,\frac{1}{4\varepsilon^2}\sum_{\alpha,\beta}\int_0^s S_{\alpha,\beta,y,x}(\bar{x}_t(y,x,\varepsilon)).d\bar{x}_t(y,x,\varepsilon))\,df^\alpha\wedge df^\beta\} \end{aligned}$$

Le terme $\hat{\exp}$ désigne l'exponentielle extérieure des formes (c'est en fait un polynôme) ; il intervient dans (4.42) comme la solution déduite de (4.40) où ne figurent plus que les termes en $S^+_{y,x}(z)$.

Il ne reste plus qu'à calculer le terme d' "interaction" $V_s(y,x,\varepsilon)$. Pour cela, calculons le crochet de Lie des 2 opérateurs $df^\alpha\,\hat{\otimes}\,e_{j,y}(x)$ et $df^\beta\otimes e_{k,y}(x)$. On obtient $-df^\alpha\wedge df^\beta\,\hat{\otimes}\,e_{j,y}(x)\,e_{k,y}(x) + df^\beta\wedge df^\alpha\,\hat{\otimes}\,e_{k,y}(x)\,e_{j,y}(x)$. Ceci est égal à 0 si $j\neq k$ (car $e_j\,e_k = -e_k\,e_j$ dans l'algèbre de Clifford) et est égal à $2\,df^\alpha\wedge df^\beta$

sinon. D'autre part, lorsque u et v décrivent $T_{\tilde{z}}V_y$ ($\tilde{z}\in V_y$), les crochets de Lie $[S^{int}_{y,x}(\tilde{z})(u),\ S^{int}_{y,x}(\tilde{z})(v)]$ commutent. $V_s(y,x,\varepsilon)$ est donc solution d'une équation linéaire $dU_s(y,x,\varepsilon) = V_s(y,x,\varepsilon)\ dH_s(y,x,\varepsilon)$, chaque $H_s(y,x,\varepsilon)$ étant un processus dans une algèbre d'Heisenberg. La formule de Campbell-Hausdorff implique que :

$$V_s(y,x,\varepsilon) = \exp\,[H_s(y,x,\varepsilon) + \frac{1}{2}\int_o^s [H_t(y,x,\varepsilon)\ dH_t(y,x,\varepsilon)]]. \tag{4.43}$$

Pour bien comprendre le sens de cette expression, on remarque qu'il existe des processus scalaires $A_{\alpha,i,s}(y,x,\varepsilon)$ et $A_{\alpha,\beta,s}(y,x,\varepsilon)$ tels que :

$$\begin{aligned} H_s(y,x,\varepsilon) &= \sum_{\alpha,i} A_{\alpha,i,s}(y,x,\varepsilon)\,df^\alpha\hat{\otimes}e_i\ \int_0^1[H_t(y,x,\varepsilon),dH_t(y,x,\varepsilon)] = \\ &= \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta,s}(y,x,\varepsilon)\ df^\alpha\wedge\ df^\beta\ \hat{\otimes}I \end{aligned} \tag{4.44}$$

Dans (4.44), les e_i désignent la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Ces deux derniers termes commutent. Donc $V_s(y,x,\varepsilon)$ se décompose en le produit de $\widehat{\exp}\,[\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta,s}(y,x,\varepsilon)\,df^\alpha\wedge df^\beta]\hat{\otimes}I$ et de $\exp\,[\sum_{\alpha,i} A_{\alpha,i,s}(y,x,\varepsilon)\,df^\alpha\hat{\otimes}e_i]$. Ces exponentielles ne peuvent contenir que des produits extérieurs $df^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge df^{\alpha_p}$ contenant au plus n df^{α_i}. Ce sont donc en fait des polynômes, et pour calculer ces polynômes, on tient compte des relations de commutations entre les $df^\alpha\hat{\otimes}e_i$ et $df^\alpha\wedge df^\beta$.

Nous pouvons désormais récapituler tous nos calculs. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} G(y,x,\varepsilon) = \mathrm{Tr}_s\ [\![&\chi_{y,x}(x_1(y,x,\varepsilon)) \\ &\widehat{\exp}\,[\frac{1}{\varepsilon^2}\int_o^2 S^+_{y,x}(\bar{x}_s(y,x,\varepsilon)\,.\,d\bar{x}_s(y,x,\varepsilon)] \\ &\widehat{\exp}\,[\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_o^2 [\int_o^t \{I\hat{\otimes}\bar{\tau}_s^{-1}(y,x,\varepsilon)\}(S^{int}_{y,x}(\bar{x}_s(y,x,\varepsilon))\,. \\ &d\bar{x}_s(y,x,\varepsilon))\{I\hat{\otimes}\bar{\tau}_s(y,x,\varepsilon)\},\{I\hat{\otimes}\bar{\tau}_t^{-1}(y,x,\varepsilon)\} \\ &(S^{int}_{y,x}(\bar{x}_t(y,x,\varepsilon))\,.\,d\bar{x}_t(y,x,\varepsilon))\{I\otimes\bar{\tau}_t(y,x,\varepsilon)\}]] \\ &\exp\,[\frac{1}{\varepsilon}\int_o^2 (Id\hat{\otimes}\bar{\tau}_s^{-1}(y,x,\varepsilon))(S^{int}_{y,x}(\bar{x}_s(y,x,\varepsilon))\,. \\ &d\bar{x}_s(y,x,\varepsilon))(Id\hat{\otimes}\bar{\tau}_s(y,x,\varepsilon))](Id\hat{\otimes}\bar{\tau}_2^{-1}(y,x,\varepsilon))]\!] \\ &\exp\,[\frac{-\varepsilon^2}{8}\int_o^2 K_y(\bar{x}_s(y,x,\varepsilon))\,ds]. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Cette formule explicite permet de montrer le :

Lemme IV.3 : $G(y,x,\varepsilon)$ vérifie H_1 et H_3.

Preuve : Remarquons d'abord que la seule exponentielle qui ne soit pas un polynôme dans (4.45) est exp $[\frac{-\varepsilon^2}{8} \int_0^1 K_y(x_s(y,x,\varepsilon))\,ds]$, qui vérifie clairement H_1. Les autres exponentielles sont en réalité des polynômes et, a priori, ce sont les seuls termes gênants, car on y voit apparaître des divisions par ε et par ε^2. Mais, en fait, $\bar{x}_2(y,x,\varepsilon) = 0$, $d\bar{x}_s(y,x,\varepsilon) = O(\varepsilon)$ et $\bar{x}_s(y,x,\varepsilon) = O(\varepsilon)$ quand $\varepsilon \to 0$. Donc les termes en $\frac{1}{\varepsilon}$ et en $\frac{1}{\varepsilon^2}$ disparaissent. Par suite, $G(y,x,\varepsilon)$ vérifie H_1.

Montrons maintenant que $G(y,x,\varepsilon)$ vérifie H_3. A cette fin, posons $Z_s = (w_{1,s},\ldots,w_{d,s})$. Remarquons que $Z_1 = F(y,x,0)$, car en 0, les champs $X_{i,y,x}(0)$ sont égaux aux éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^d$ (ou du moins, on peut le supposer) si $i \leq d$ ou nuls si $i=0$, $i>d$. On a alors :

$$(4.46)\qquad \begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^2 S^+_{y,x}(\bar{x}_s(y,x,\varepsilon))\,.\,d\bar{x}_s(y,x,\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^2}\, S^+_{y,x}(\bar{x}_2(y,x,\varepsilon))\,.\,\bar{x}_2(y,x,\varepsilon) - \\ &- \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\, S^+_{y,x}(\bar{x}_s(y,x,\varepsilon))\,.\,d\bar{x}_s(y,x,\varepsilon)\right)\bar{x}_s(y,x,\varepsilon).\end{aligned}$$

Or $\bar{x}_2(y,x,\varepsilon) = 0$, $d\bar{x}_s(y,x,\varepsilon) \simeq \varepsilon\, dZ_s$ si $s \leq 1$, et à $-\varepsilon Z_1\, ds$ si $s > 1$. On en déduit que :

$$(4.47)\qquad \begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^2 S^+_{y,x}(\bar{x}_s(y,x,\varepsilon))\,.\,d\bar{x}_s(y,x,\varepsilon) = \\ &- \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\, S^+_{y,x}(0)\,.\,dZ_s\right) Z_s + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\, S^+_{y,x}(0)\,.\,Z_1\right) Z_1.\end{aligned}$$

On traite de façon analogue le terme qui intervient dans la deuxième exponentielle extérieure. Il tend quand $\varepsilon \to 0$ vers :

$$(4.48)\qquad \frac{1}{2}\int_0^1 [S^{int}_{y,x}(0)\, Z_s,\ S^{int}_{y,x}(0)\, dZ_s] - \frac{1}{4}\, [S^{int}_{y,x}(0)\, Z_1, S^{int}_{y,x}(0)\, Z_1]$$

Or la supertrace de $\eta \hat{\otimes} U$ est égale à $\eta\,\mathrm{Tr}_s U$ si η est une forme extérieure scalaire et U un opérateur agissant sur les spineurs. On en déduit que quand $\varepsilon \to 0$, puisque l'algèbre des formes paires est commutative :

$$(4.49)\qquad \begin{aligned}G(y,x,\varepsilon) \simeq \hat{\exp}\,&\Big[-\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\, S^+_{y,x}(0)\, dZ_s\right) Z_s + \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^1 [S^{int}_{y,x}(0)\, Z_s,\ S^{int}_{y,x}(0)\, dZ_s]\Big] \times \hat{\exp}\,\Big[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\, S^+_{y,x}(0)\, Z_1\right) Z_1 - \\ &- \frac{1}{4}\,[S^{int}_{y,x}(0)\, Z_1,\ S^{int}_{y,x}(0)\, Z_1]\Big] \times \mathrm{Tr}_s\, [\![\chi_{y,x}(x_1(y,x,\varepsilon)) \\ &\exp\Big[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^2 (I \hat{\otimes} \bar{\tau}_s^{-1}(y,x,\varepsilon))\,(S^{int}_{y,x}(\bar{x}_s(y,x,\varepsilon))\,.\,d\bar{x}_s(y,x,\varepsilon))\end{aligned}$$

$$(I \hat{\otimes} \bar{\tau}_s(y,x,\varepsilon))]\ I \hat{\otimes} \bar{\tau}_2^{-1}(y,x,\varepsilon)]\!].$$

Il y a deux types d'opérateurs qui apparaissent dans la supertrace dans (4.49) : le premier mélange les multiplications par $d f^{\alpha}$ et les multiplications par $e_{i,y}(x)$. Le record ne fait intervenir que des multiplications de Clifford. Toutefois, on sait que la super-trace d'un produit $e_{1,y}(x),\dots,e_{d,y}(x)$ est égale à $(-2i)^{\frac{d}{2}}$ ([B.1], 4.34), et que celle de tout autre produit de Clifford est nulle. Il suffira donc de garder la contribution des produits de Clifford $e_{1,y}(\tilde{z}),\dots,e_{d,y}(\tilde{z})$ dans la super-trace. D'après (4.36), $\bar{\tau}_s(y,x,\varepsilon)$ est donné par l'équation :

$$d\bar{\tau}_s(y,x,\varepsilon) = -(A'_{y,x}(\bar{x}_s(y,x,\varepsilon))\,.\,d\bar{x}_s(y,x,\varepsilon). \tag{4.50}$$

Or $A_{y,x}(0) = 0$ car nous sommes en coordonnées exponentielles. De plus, au voisinage de x ($\equiv 0$), V_y est égale à $\mathbb{R}^d$. Quand $\varepsilon \to 0$, on a donc pour $s \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} d\bar{\tau}_s(y,x,\varepsilon) &= -(\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} A_{y,x}(0)\,.\,Z_s)\,.\,dZ_s + 0(\varepsilon^2) \\ d\bar{\tau}_s^{-1}(y,x,\varepsilon) &= \varepsilon^2(\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} A_{y,x}(0)\,.\,Z_s)\,dZ_s + 0(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{4.51}$$

et si $s \in [1,2]$:

$$\begin{aligned} d\bar{\tau}_s(y,x,\varepsilon) &= -\varepsilon^2(\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} A_{y,x}(0)\,.\,Z_1)\,Z_1(2-s)\,ds + 0(\varepsilon^2) \\ d\bar{\tau}_s^{-1}(y,x,\varepsilon) &= \varepsilon^2(\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} A_{y,x}(0)\,.\,Z_1)Z_1(2-s)\,ds + 0(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{4.52}$$

Il s'ensuit que lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_2^{-1}(y,x,\varepsilon) = I - \frac{\varepsilon^2}{2}\ [\textstyle\int_0^1 (\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} A_{y,x}(0)\,.\,Z_s)\,.\,dZ_s\ - \\ - \textstyle\int_0^1 (\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} A_{y,x}(0)\,dZ_s)\,.\,Z_s] + 0(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{4.53}$$

Par définition, la courbure de la connexion de Levi-Civita sur V_y en x, $R_{y,x}$, vérifie, puisque nous sommes en coordonnées exponentielles, pour tout (X,Y) de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ([D-N-F]) :

$$R_{y,x}(X,Y) = (\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} A_{y,x}(0)\,.\,Y)\,.\,X - (\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} A_{y,x}(0)\,.\,X)\,.\,Y. \tag{4.54}$$

Dans (4.53), on reconnaît, lorsque $\varepsilon \to 0$:

$$\bar{\tau}_2^{-1}(y,x,\varepsilon) = Id - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^1 R_{y,x}(dZ_s,Z_s) + 0(\varepsilon^2). \tag{4.55}$$

Or dans (4.49), il faut interpréter $\bar{\tau}_2^{-1}(y,x,\varepsilon)$ comme un opérateur linéaire sur l'espace des spineurs. Par suite, la matrice antisymétrique $R_{y,x}(dZ_s,Z_s) =$ $= (R_{i,j,y,x}(dZ_s,Z_s))$ doit être écrite comme $\frac{1}{4} \sum_{i,j} R(dZ_s,Z_s)\,e_i\,e_j$, et sous ce point de vue :

$$\bar{\tau}_2^{-1}(y,x,\varepsilon) = \exp\left[-\frac{1}{8}\int_0^1 \sum_{i,j} R_{i,j,y,x}(dZ_s,Z_s)\,\varepsilon e_i\ \varepsilon e_j + O(\varepsilon^3)\right]. \tag{4.56}$$

Il est important de remarquer que dans (4.57), tout produit de Clifford $e_{i1},\dots,e_{ik}$ apparaîtra avec un ε élevé au moins à une puissance supérieure à k. Pour montrer que $G(y,x,\varepsilon)$ vérifie H_3, il suffit de montrer que l'exponentielle qui apparaît dans la super-trace dans (4.49) vérifie la même propriété. Appelons-la exp [A]. En intégrant par parties, et en utilisant le fait que $\bar{x}_2(y,x,\varepsilon) = 0$, on obtient comme dans (4.46) :

$$\begin{aligned}\exp[A] = \exp\Big[&-\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 \sum_{\alpha,i}\Big(\frac{\partial}{\partial\bar z} S_{\alpha,i,y,x}(0)\,dZ_s\Big)Z_s \\ &d f^{\alpha}\hat{\otimes} e_i + \frac{\varepsilon}{4}\sum_{\alpha,i}\Big(\frac{\partial}{\partial\bar z} S_{\alpha,i,y,x}(0)\,Z_1\Big)Z_1\, d f^{\alpha}\hat{\otimes} e_i\Big].\end{aligned} \tag{4.57}$$

exp [A] vérifie donc la même propriété que $\bar{\tau}_2^{-1}(y,x,\varepsilon)$. Donc H_3 est vérifiée ▪

On remarque que dans exp [A] $(1\hat{\otimes}\tau_2^{-1}(y,x,\varepsilon))$, le terme en ε^d dans la super-trace ne provient que des produits de Clifford $e_1,\dots,e_d$ minimum, car $e_i^2 = -1$: cela signifie que si $e_1,\dots,e_d$ est obtenu à partir d'un produit de Clifford où apparaissent des e_j à une puissance impaire > 1, alors ce produit de Clifford sera multiplié par une puissance de ε strictement plus grande que d. Cela suggère que l'on peut remplacer les produits de Clifford par e_i par des produits extérieurs par dx^i pour estimer la supertrace. Donnons auparavant quelques définitions. Soient deux formes η et η' sur V_y (à valeur dans $\Lambda(T_yB)$). On dira que $\eta \underset{d}{\equiv} \eta'$ si leurs composantes de degré d en dx^i sont égales. Soit $d\pi_y(x)$ la mesure riemanienne sur V_y. C'est une d-forme extérieure en x.

Z_s est un mouvement brownien plat sur $\mathbb{R}^d$, de point de départ 0. Z_1 suit donc une distribution gaussienne de covariance l'idendité. On peut désintégrer la mesure de Wiener, en conditionnant suivant la valeur au temps 1 de Z_s. On obtient ainsi une famille de mesure paramétrée par la valeur de Z_1. Lorsque $Z_1 = 0$, on a une mesure sur l'espace des laçets de $\mathbb{R}^d$ issue de 0 . Notons la P_0. C'est la loi du pont brownien partant de 0 et arrivant en 0 ([I-W]).

Proposition IV.4 : Lorsque $\varepsilon \to 0$, on a uniformément sur $B\times V$ ([B.1], p. 137)

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} q_{y,x,\varepsilon}(0)\,d\pi_y(x) = \Big(-\frac{i}{\pi}\Big)^{\frac{d}{2}} E^{P_0}\Big[\widehat{\exp}\Big[\frac{1}{2}\int_0^1 [S^{int}_{y,x}(0)\,Z_s, S^{int}_{y,x}(0)\,dZ_s] \,- \\ - \int_0^1\Big(\frac{\partial}{\partial\bar z} S^{+}_{y,x}(0)\,dZ_s\Big).Z_s\Big]\,\widehat{\exp}\Big[-\frac{1}{2}\int_0^1 \sum_{\alpha,i}\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial\bar z} S^{int}_{\alpha,i,y,x}(0)\,dZ_s\Big).Z_s\Big) \\ d f^{\alpha}\wedge dx^i\Big]\,\widehat{\exp}\Big[-\frac{1}{8}\int_0^1\Big(\sum_{i,j}\big(R_{i,j,y,x}(0)\,dZ_s\big).Z_s\Big) d f^{\alpha}\wedge dx^j\Big].\end{aligned} \tag{4.58}$$

Preuve : On peut appliquer le théorème IV.2. La densité de Z_1 en 0 est $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^d$. Multipliée par la contribution de la super-trace $e_1,\ldots,e_d$, on obtient $(-\frac{i}{\pi})^{\frac{d}{2}}$. Les termes quadratiques en Z_1 qui apparaissent dans (4.49) disparaissent ∎

Lorsqu'on regroupe les termes qui apparaissent dans les exponentielles extérieures dans (4.58), on obtient une 2-forme sur $T_x M$: elle est intimement liée à la connexion de Levi-Civita sur M. Soient en effet X et Y deux vecteurs sur $T_x M$. On vérifie (B.1 : th. 4.14) que :

$$\langle X,Y\rangle_M = \frac{1}{4}\int_0^1 \langle R^{V_y}(X,Y)\,Z_s, dZ_s\rangle_M \,, \tag{4.59}$$

R étant la courbure de la restriction de la connexion de Levi-Civita sur M à TV_y (X et Y sont des vecteurs tangents à M dans (4.59), si X est un champ sur M et Y un champ sur TV, la restriction de cette connexion est égale à la projection de $\nabla_X^M Y$ sur TV). On a donc le théorème suivant :

Théorème IV.5 : Lorsque $\varepsilon \to 0$, on a uniformément sur $B \times V$ ([B.1] p. 142) :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} q_{y,x,\varepsilon}(0)\, d\pi_y(x) \underset{d}{\equiv} \left(-\frac{i}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} E^{P_o}\left[\widehat{\exp}\left[\frac{1}{4}\int_0^1 \langle R^{V_y}(.,.)Z_s, dZ_s\rangle\right]\right] \tag{4.59}$$

Nous allons faire maintenant quelques rappels sur les classes caractéristiques d'une variété : cela peut sembler un peu incohérent, car nous avons déjà parlé de ces classes en dimension infinie. Toutefois, ce n'est qu'à partir de ce moment que nous en aurons besoin, afin d'exprimer de façon cohomologique la formule (4.59) ([D-N-F], [K-N]).

Considérons un fibré principal (de dimension finie) $E \xrightarrow{\pi} V$ sur une variété V de dimension d, de groupe structural G et d'algèbre de Lie g. On dit qu'une application k-linéaire f $g \times g \times \ldots \times g \to C$ appartient à $I_k(G)$ si elle est invariante par l'action de G. Par exemple, si $G = G\ell_d(\mathbb{R}^d)$, l'algèbre de Lie de G est l'ensemble des matrices carrées, l'application trace appartient à $I_1(G)$ tandis que l'application déterminant appartient à $I_d(G)$. Introduisons une connexion ∇ sur ce fibré ; son tenseur de courbure est une 2-forme à valeurs dans l'algèbre de Lie g. Si $f \in I_k(G)$, considérons la 2k-forme extérieure $\Phi_\nabla f$ définie par

$$\begin{aligned}&\Phi_\nabla f(X_1,\ldots,X_{2k}) = \\ &= \frac{1}{2k!}\sum_{\sigma \in S_{2k}} \varepsilon_\sigma\, f(R(X_{\sigma(1)},X_{\sigma(2)}),\ldots,R(X_{\sigma(2k-1)}, X_{\sigma(2k)}))\end{aligned} \tag{4.60}$$

la somme étant prise sur les permutations σ de $\{1,\dots,2k\}$, la signature d'une permutation étant notée ε_σ. La remarque essentielle est que si l'on change de connexion ∇ G invariante, $\Phi_\nabla(f)$ ne varie que d'une 2k-forme exacte (c'est ce qui découle de ce qu'on appelle une formule de transgression, comme dans le théorème II.3). On peut donc définir la classe de cohomologie de $\Phi_\nabla f$ sans aucune ambiguïté. L'application Φ de $I_k(G)$ dans le $2^{k\text{-ième}}$ groupe de cohomologie de V s'appelle l'homomorphisme de Weil. On peut étendre Φ de la façon suivante, en introduisant $I(G) = \sum_{k=1}^{\infty} I_k(G)$. f est dans I(G) si f s'écrit Σf_k, $f_k \in I_k(G)$. Dans ce cas, $\Phi_\nabla f = \Sigma\, \Phi_\nabla(f_k)$, la somme étant en réalité finie car il n'y a pas de formes extérieures non nulles de degré $> d$.

Considérons maintenant quelques exemples : supposons que G = SO(d), d paire = 2ℓ, et que V est une variété riemannienne orientée.L'algèbre de Lie de G est donc l'ensemble des matrices antisymétriques. Si A est une matrice antisymétrique, A se décompose dans une base orthonormée directe en bloc de la forme $\begin{bmatrix} 0 & x_j \\ -x_j & 0 \end{bmatrix}$. L'ensemble des x_j intervenant dans cette décomposition reste invariant si on change de base orthonormée directe. Le pfaffien de A est égal à $\prod_{j=1}^{\ell} x_j$. C'est un polynôme homogène en les x_j. Si on considère la fonction f(A)

$$A \to \prod_{j=1}^{\ell} \frac{\frac{x_j}{2}}{\operatorname{sh}(\frac{x_j}{2})} . \tag{4.61}$$

On obtient une forme $\Phi_\nabla f$ appelée genre d'Atiyah-Singer (en forme, et non en cohomologie). Elle représente lorsqu'on change de connexion ∇ qui préserve l'action de SO(d) une seule classe de cohomologie sur V, appelée classe d'Atiyah-Singer. Le caractère de Chern (dont nous avons rappelé la définition dans la partie I) rentre dans ce cadre : le fibré E est complexe, le groupe structural G est le groupe linéaire $G\ell_{\dim\xi}(C)$, A est une matrice complexe à dim ξ lignes et dim ξ colonnes dont les vecteurs propres sont notés x_j. L'application f associe à A l'expression $\sum_j \exp\left[\frac{i x_j}{2\pi}\right]$.

Dans la situation présente, notre variété est M, le fibré est TV ; il a pour groupe structural SO(d). La connexion sur TV est la projection de la connexion de Levi-Civita de M sur TV. On peut donc définir le genre (en forme) d'Atiyah-Singer $\hat{A}(R^{V}{}_{y})$. C'est une forme sur TM. On a le théorème.

Théorème IV.6 : En cohomologie, Ch ([Ind D.]) est la forme C^∞ sur B :

$$(4.62)\qquad \int_{V_y} \hat{A}\left(\frac{R^{V_y}}{2\pi}\right) = \mathrm{Ch}\ ([\mathrm{Ind}\ D_.]).$$

Schéma de la preuve : On fait disparaître les i qui apparaissent dans (4.59) en nous servant du fait que le théorème II.4 nous donne $\overline{\mathrm{Ch}}$ [Ind D.] et non Ch [Ind D.]. On obtient alors :

$$(4.62)\qquad \mathrm{Ch}\ [\mathrm{Ind}\ D_.] = \int_{V_y} E^{P_o}[\widehat{\exp}\ [-\frac{1}{4\pi}\int_o^1 \langle R_x^{V_y}(\dot{.},.)Z_s, dZ_s\rangle]].$$

On utilise ensuite les formules d'aires de Paul Levy pour en déduire le théorème ([Y]).

Remarque : La méthode ici utilisée peut être appliquée au cas où l'on ajoute un fibré auxiliaire ξ.

Remarque : Ikeda et Watanabe ont développé une méthode similaire pour la preuve du théorème de Hirtzebruch, généralisable à notre cas [I.W].

REMERCIEMENTS : Nous remercions J.M. Bismut pour des explications données sur son article. Nous remercions aussi D. Bakry, D. Bennequin, J. Brody et M. Emery pour avoir assisté sans broncher à la série d'exposés que nous avons consacrés à ce théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[A] ATIYAH M.F. : K-Theory. New-York, Benjamin 1967.

[A-S.1] ATIYAH M.F., SINGER I.M. : The index of elliptic operators. I. Ann. of Math. 86. 374-407 (1967).

[A-S.2] ATIYAH M.F., SINGER I.M. : The index of elliptic operators III. Ann. of Math. 88. 451-491 (1968).

[A-S.3] ATIYAH M.F., SINGER I.M. : The index of elliptic operators IV. Ann. of Math. 93. 119-138 (1971).

[Au] AUBIN T. : Non linear analysis on manifolds.Monge- Ampere Equations 1982 Springer-Verlag.

[B.1] BISMUT J.M. : The Atiyah-Singer index theorem for families of Dirac operators : Two heat equation proofs. Invent. Math. 83. 91-151 (1986).

[B.2] BISMUT J.M. : Localization formulas, superconnections and the index theorem for families. Comm. Math. Physi. 103. 127-166 (1986).

[B.3] BISMUT J.M. : The Atiyah-Singer theorem : a probabilistic approach. I.J.F.A. 57. 56-99 (1984).

[B.4] BISMUT J.M. : Mécanique aléatoire. Lec. Notes Math. 866, Springer 1981.

[B.5] BISMUT J.M. : Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general Hörmander's conditions. 56. 469-505 (1981).

[B.6] BISMUT J.M. : Large deviations and the Malliavin calculus. Progress Math. 45. Birkhäuser (1984).

[Bl] BLAU M. : Connections on Clifford bundles and the Dirac operators. Lett. in Math. Phy. 13. 83-92 (1987).

[B-V] BERLINE N., VERGNE M. : A proof of Bismut local index theorem for a family of Dirac operators. A paraître.

[D-N-F] DOUBROVINE D., NOVIKOV S., FOMENKO A. : La géométrie contemporaine, Tomes I - II, Editions de Moscou (1979).

[Gi] GILKEY P.B. : Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer theorem : Publish or Perish n° 11 (1984).

[H] HÖRMANDER L. : The analysis of linear partial differential operators.
Tome I : Springer-Verlag 1983
Tome II : Springer-Verlag 1983
Tome III : Springer-Verlag 1984
Tome IV : Springer-Verlag 1984.

[J] JACOD J. : Calcul stochastique et problèmes des martingales. Lec. Notes in Math. 714 Springer-Verlag (1979).

[I-W] IKEDA N., WATANABE S. : Stochastic differential equations and diffusion processes. North-Holland (1981).

[K-N] KOBAYASHI S., NOMIZU S. : Foundations of differential geometry, Tome II. Interscience (1969)

[L.1] LEANDRE R. : Sur le théorème d'Atiyah-Singer (Preprint).

[L.2] LEANDRE R. : Intégration dans la fibre associée à une diffusion dégénérée. Probability theory and related fields 76 (341-358) 1987.

[L-J] LE-JAN Y. : Sur la représentation des fonctionnelles du temps local et leur renormalisation. C.R.A.S, t 304, série I, n°15, 1987, p455-457

[M] MALLIAVIN P. : Géométrie différentielle stochastique. Presses de l'Université de Montréal, Montréal 1978.

[Me.1] MEYER P.A. : Géométrie stochastique sans larmes. Sémi. de Proba. XV. Lect. Notes in Math. n° 850. Springer 1981. pp. 44-102.

[Me.2] MEYER P.A. : Le calcul de Malliavin et un peu de pédagogie. R.C.P. 34. Université de Strasbourg.(1984)

[Me D] MEYER P.A., DELLACHERIE C. : Probabilité et potentiel. Tomes I - II. Hermann (1980).

[N] NORRIS J. : Simplified Malliavin Calculus. Séminaire de Proba. n° XX. Lectures Notes in Math n° 1204. Springer 1986.

[Q] QUILLEN D. : Superconnections and the Chern character. Topology 24. 89-95 (1985).

[S] SOHNIUS M.F. : Introducing supersymmetry. Phy. Reports. 128 n° 2 et 3. pp. 41-204.

[Sch] SCHWARTZ L. : Construction directe d'une diffusion sur une variété. Séminaire de Proba. n° XIX. pp. 91-113. Lect. Notes 1123. Springer 1983/84.

[Sj] SJÖSTRAND J. : Thèse(Sans référence plus précise, d'après une information de J.M Bismut)

[S-V] STROOCK D.W., VARADHAN S.R.S. : Multidimensional diffusion processes. Springer-Verlag 1979.

[Tr] TRÊVES F. : Introduction to pseudo-differential operators and Fourier integral operators. Vol. 1. Plenum-Press (1981).

[Y] YOR M. : Remarques sur une formule de P. Levy. Séminaire de Strasbourg n° XIV. pp 343-346. Lect. Notes in Math n° 784. Springer 1980.

[W] WILLIAMS D. : Diffusion, Markov processes and martingales. Wiley 1979.

[Wa] WATANABE S. : Analysis of Wiener Functionals and its applications to heat kernels. Ann of Proba 15. n° 1 (1987) p1-39.

[I.W] IKEDA. N. WATANABE S. : Malliavin Calculus for Wiener's functionals and its applications. In "From local time to global geometry" Ed. D. Elworthy Pitman (1986)

[Do] DONNELY H : Local index for families. Preprint.

&1 Remarque sur le début du chapitre I 1 : En fait, il y a une difficulté supplémentaire qui provient du fait que l'on n'a pas de règles de simplification des fibrés : si $E + E'$ et $E = E''$ sont isomorphes, E' et E'' ne le sont pas forcément. Pour contourner cet obstacle, on dit que (E_1, E_2) est équivalent à (E'_1, E'_2) si il existe deux fibrés F et F' tels que $(E_1 \oplus F,\ E_2 \oplus F')$ soit isomorphe en tant que fibré à $(E'_1 \oplus F',\ E'_2 \oplus F')$.

Rémi Léandre

Département de Mathématiques

Faculté des Sciences.

25030 BESANCON Cedex.

FRANCE.