

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN-FRANÇOIS LE GALL

Sur les fonctions polaires pour le mouvement brownien

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 186-189

[<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__186_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__186_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES FONCTIONS POLAIRES POUR LE MOUVEMENT BROWNIEN

Jean-François Le Gall^(*)

1. Soit $W = (W_t ; t \geq 0)$ un mouvement brownien plan. Une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ est dite polaire pour W si

$$P[\exists t > 0 : W_t = f(t)] = 0.$$

On vérifie aisément que cette propriété ne dépend pas du point de départ de W . Graversen [1] a étudié les fonctions polaires pour le mouvement brownien plan et montré en particulier que pour tout $\alpha < \frac{1}{2}$ il existe des fonctions höldériennes d'exposant α qui ne sont pas polaires. Graversen conjecture que toutes les fonctions höldériennes d'exposant $\frac{1}{2}$ sont polaires, et donne une réponse partielle en montrant que si $f = (f_1, f_2)$, où f_1 est höldérienne d'exposant $\frac{1}{2}$ et f_2 höldérienne d'exposant γ pour un $\gamma > \frac{3}{4}$, alors f est polaire. L'objet principal de cette note est de démontrer la conjecture de Graversen en établissant le résultat un peu plus précis suivant.

THEOREME 1 : Supposons que pour tout $K > 0$ il existe une constante $\delta > 0$ telle que, pour tous s, t avec $0 \leq s < t \leq K$ et $t-s < \delta$,

$$|f(t) - f(s)| \leq (2(t-s) \log \log (\frac{1}{t-s}))^{1/2}.$$

Alors f est polaire pour W .

PREUVE : Il suffit de montrer, pour $0 < a < b$,

$$P[\exists t \in [a, b] : W_t = f(t)] = 0.$$

Nous établirons cette dernière égalité dans le cas particulier $a = 1, b = 2$. Pour tout $t \geq 1$ la densité de la loi de $W_t - f(t)$ est majorée par $(2\pi)^{-1}$. On en

(*) UNIVERSITE P. & M. CURIE - Laboratoire de Probabilités - 4, place Jussieu -
Tour 56 - 3ème Etage - F. 75252 PARIS CEDEX 05

déduit immédiatement, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$E\left[\int_1^3 I(|W_s - f(s)| < \varepsilon) ds\right] \leq 2 \cdot (2\pi)^{-1} \pi \varepsilon^2 = \varepsilon^2.$$

Posons $T_\varepsilon = \inf \{t \geq 1 ; |W_t - f(t)| < \varepsilon\}$ et remarquons que :

$$E\left[\int_1^3 I(|W_s - f(s)| < \varepsilon) ds\right] \geq P[T_\varepsilon \leq 2] \cdot E\left[\int_{T_\varepsilon}^{T_\varepsilon+1} I(|W_s - f(s)| < \varepsilon) dx / T_\varepsilon \leq 2\right].$$

Appliquons la propriété de Markov au temps T_ε . Soient $t \in [1; 2]$ et $w_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que $|w_0 - f(t)| \leq \varepsilon$:

$$\begin{aligned} E\left[\int_{T_\varepsilon}^{T_\varepsilon+1} I(|W_s - f(s)| < \varepsilon) ds / T_\varepsilon = t, W_{T_\varepsilon} = w_0\right] \\ = \int_0^1 ds \int_{\mathbb{R}^2} (2\pi s)^{-1} \exp(-|w|^2/2s) I(|w_0 + w - f(t+s)| < \varepsilon) dw \\ \geq (2\pi)^{-1} \int_\varepsilon^1 \frac{ds}{s} (\pi \varepsilon^2) \exp(-(2\varepsilon + |f(t+s) - f(t)|)^2/2s) \\ \geq \frac{1}{2} \exp(-2\varepsilon - 4M) \varepsilon^2 \int_\varepsilon^\delta \frac{ds}{s \log(1/s)} \end{aligned}$$

où pour la dernière inégalité on a utilisé l'hypothèse du théorème et noté M une constante majorant $|f|$ sur $[0; 3]$. En mettant bout à bout les inégalités ainsi obtenues on trouve, pour une certaine constante $C > 0$ et pour tout $\varepsilon \in [0; \delta]$

$$\varepsilon^2 \geq P[T_\varepsilon \geq 2] \cdot C \varepsilon^2 \int_\varepsilon^\delta \frac{ds}{s \log(1/s)}$$

$$\text{d'où : } P[T_\varepsilon \leq 2] \leq (C \int_\varepsilon^\delta \frac{ds}{s \log(1/s)})^{-1}.$$

En faisant tendre ε vers 0 on trouve le résultat voulu. $\square$

REMARQUES. (i) La méthode de preuve ci-dessus donne aussi des renseignements sur la probabilité que $|W_t - f(t)|$ prenne des petites valeurs. Dans le cas particulier où f est höldérienne d'exposant $1/2$ on obtient aisément, pour une certaine constante $C > 0$,

$$P[\inf \{ |W_t - f(t)| ; 1 \leq t \leq 2 \} < \varepsilon] \leq C (\log \frac{1}{\varepsilon})^{-1}$$

Remarquons que même dans le cas où f est constante on ne peut pas améliorer cette inégalité : voir Spitzer [4] (lemma 1), ou Le Gall [2] pour des arguments proches de la démonstration ci-dessus.

(ii) Soient $B = (X, Y, Z)$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction continue. Des arguments semblables à ceux de la preuve du théorème 1 permettent d'estimer la probabilité que $|(X_t, Y_t) - g(Z_t)|$ prenne des petites valeurs, ou, en d'autres mots, la probabilité que le mouvement brownien B s'approche de la courbe $(x, y) = g(z)$ (voir [3]).

(iii) Yor [5] a montré que les fonctions à variation finie sur les compacts sont polaires : l'idée de la preuve est d'utiliser le calcul stochastique pour étudier la semi-martingale $\log |W_t - f(t)|$.

2. Supposons maintenant que W est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ pour $d \geq 3$. On peut encore définir une notion de fonction polaire pour W et on a l'analogue suivant du théorème 1.

THEOREME 2. Supposons que $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ vérifie, pour tout $K > 0$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\substack{0 \leq s < t \leq K \\ t-s < \delta}} \frac{|f(t) - f(s)|}{(t-s)^{1/d}} = 0.$$

Alors f est polaire pour W .

PREUVE : On écrit d'abord, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$E \left[\int_1^3 I(|W_s - f(s)| \leq 3\varepsilon) ds \right] \leq C_d \varepsilon^d.$$

Comme précédemment, on définit

$$T_\varepsilon = \inf \{ t \geq 1 ; |W_t - f(t)| < \varepsilon \},$$

et on remarque que, pour $t \in [1; 2]$ et pour $w_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $|w_0 - f(t)| \leq \varepsilon$,

$$\begin{aligned}
& E \left[\int_{T_\epsilon}^{T_\epsilon + 1} I(|W_s - f(s)| \leq 3\epsilon) ds / T_\epsilon = t, W_{T_\epsilon} = w_0 \right] \\
&= \int_0^1 ds P_0[|w_0 + W_s - f(t+s)| \leq 3\epsilon] \\
&\geq \int_0^{n\epsilon^d} ds P_0[|W_s| \leq \epsilon],
\end{aligned}$$

où pour écrire la dernière inégalité on choisit $n \geq 1$ puis ϵ suffisamment petit (en fonction de n) de façon que les inégalités $0 \leq s < t \leq 3$ et $t-s < n\epsilon^d$ entraînent $|f(t)-f(s)| < \epsilon$. On trouve finalement que, toujours pour ϵ assez petit, on a :

$$C_d \epsilon^d \geq \frac{1}{2} n \epsilon^d P[T_\epsilon \leq 2]$$

d'où $P[T_\epsilon \leq 2] \leq 2 C_d / n$. Comme n est arbitraire on obtient que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P[T_\epsilon \leq 2] = 0$, d'où aisément le résultat du théorème. $\square$

REMARQUE. Par analogie avec les résultats de Graversen pour le mouvement brownien plan il serait intéressant de montrer que pour tout $\alpha < 1/d$ il existe des fonctions höldériennes d'exposant α qui ne sont pas polaires.

REFERENCES

- [1] GRAVERSEN, S.E : "Polar" - Functions for Brownian Motion. Z. Wahrsch. verw - Gebiete 61, 261-270 (1982).
- [2] LE GALL, J.F : Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement brownien. Ann. Probab. 14, 1219-1244 (1986).
- [3] LE GALL, J.F et YOR, M : Enlacements du mouvement brownien autour des courbes de l'espace. Preprint (1987).
- [4] SPITZER, F : Some theorems concerning two-dimensional Brownian motion. Trans. Amer. Math. Soc. 87, 187-197 (1958).
- [5] YOR, M : Les fonctions continues à variation bornée sont polaires pour le mouvement brownien plan. Manuscrit non publié.