CHRISTOPHE STRICKER

# À propos d'une conjecture de Meyer

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 22 (1988), p. 144-146
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__144_0>

# A PROPOS D'UNE CONJECTURE DE MEYER

par C. Stricker

Dans [2] (page 262) Meyer s'intéresse aux martingales de carré intégrable $(X_t)$ nulles en 0 possédant la propriété de représentation prévisible (notée (RP)) et de crochet $\langle X,X\rangle_t = t$. Cette classe de martingales sera notée $\mathcal{M}$. Voici quelques représentants :

- le mouvement brownien standard $X_t^o = B_t$.
- les processus de Poisson compensés $X_t^\rho = \rho(\nu_t^\rho - \frac{t}{\rho^2})$, où $\nu^\rho$ est un processus de Poisson à sauts unité, d'intensité $1/\rho^2$ ($\rho \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ; lorsque $\rho$ tend vers 0 on retrouve le mouvement brownien qui peut être noté $X_t^o$).

D'après un résultat de Lazaro et Yor [4] (page 302) ces processus sont <u>les seules martingales homogènes dans le temps</u> possédant (RP). Comme le souligne Meyer il est facile de construire des martingales Y non homogènes dans le temps en faisant varier $\rho$ en fonction du temps. Il est alors tentant de conjecturer que toute martingale de carré intégrable possédant (RP) et de crochet $\langle X,X\rangle_t = t$ est de la forme $X^{\rho(t)}$ où $\rho$ est une fonction borélienne du temps. L'objet principal de cette note est de fournir un contre-exemple à cette conjecture.

On considère un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ vérifiant les conditions habituelles et on suppose qu'il existe dans cette filtration un processus de Poisson compensé Q d'intensité 1 et un mouvement brownien standard $(B_t)$ <u>indépendants</u>. Si $(X_t)$ est un processus, nous désignerons par $(\mathcal{F}_t^X)$ la plus petite filtration vérifiant les conditions habituelles et à laquelle X est adapté. Soit T un temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_t^B)$.

PROPOSITION. Le processus $X_t = B_t^T + Q_{(t-T)^+}$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle de crochet $\langle X,X\rangle_t = t$ et possède (RP).

DEMONSTRATION. D'après un résultat d'Engelbert et Hess [1] on sait que $(\mathcal{F}^B_{t\wedge T}) = (\mathcal{F}_t^{B^T})$ et que $(B^T, \mathcal{F}^{B^T})$ possède (RP). Rappelons le théorème 1 de [3] : Soient $(M^i)_{i\geq 0}$ une suite de $(\mathcal{F}_t^{M^i})$ martingales locales indépendantes et $(A^i)_{i\geq 1}$ une suite de processus croissants, continus, nuls en 0, $(\mathcal{F}_t^{M^o})$ adaptés et vérifiant $A_\infty^i = +\infty$ pour tout i. On pose pour $i \geq 1$, $\overline{M}^i = M^i_{A^i}$ et $(\mathcal{H}_t) = (\mathcal{F}_t^{M^o}) \vee (\mathcal{F}_t^{\overline{M}^1}) \vee \dots$ .

Si, pour $i \geq 0$, les processus croissants $[M^i,M^i]_{A^i}$ (avec la convention $A_t^o = t$) sont portés par des ensembles $(\mathcal{H}_t)$ prévisibles deux à deux disjoints et si $([M^o,M^o] + \sum_{i\geq 1} [M^i,M^i]_{A^i})^{1/2}$ est localement intégrable dans $(\mathcal{H}_t)$, alors $M = M^o + \sum_{i\geq 1} \overline{M}^i$ est une $(\mathcal{H}_t)$-martingale locale. Si de plus pour $i \geq 0$ $(M^i,(\mathcal{F}_t^{M^i}))$ possède (RP), alors $(M,(\mathcal{H}_t))$ possède aussi (RP). Ce résultat s'applique aisément à notre situation en prenant $M^o = B^T$, $M^1 = Q$, $A_t^1 = (t-T)^+$, $A_t^i = t$ et $M^i = 0$ pour $i \geq 2$. En outre $(\mathcal{F}_t^X) = (\mathcal{F}_t^{M^o}) \vee (\mathcal{F}_t^{\overline{M}^1})$ car $[X,X]_t = t \wedge T + \sum_{s\leq t} \Delta X_s$.

REMARQUES.

1) Plus généralement considérons un ensemble prévisible D tel que $M = 1_D \cdot B$ possède (RP) dans $(\mathcal{F}_t^M)$. Si $A_t = \int_o^t 1_{D^c}\, ds$, un raisonnement analogue à celui développé ci-dessus montre que le processus $X_t = M_t + Q_{A_t} - A_t$ appartient à $\mathcal{M}$. Ceci est notamment le cas si D <u>ne dépend pas de</u> w, c'est-à-dire si $1_D$ est <u>déterministe</u>.

2) On peut noter que si $(X_t)$ est une martingale de $\mathcal{M}$, il existe toujours un ensemble prévisible D vérifiant $d\langle X^c,X^c\rangle_s = 1_D\, ds$. En effet la propriété (RP) nous fournit deux processus prévisibles $(H_s)$ et $(K_s)$ tels que

$$X_t^c = \int_o^t H_s\, dX_s = \int_o^t H_s\, dX_s^c$$

$$X_t^d = \int_o^t K_s\, dX_s = \int_o^t K_s\, dX_s^c.$$

Ainsi $d\langle X^c,X^c\rangle_s = H_s^2\, ds$, $d\langle X^d,X^d\rangle_s = K_s^2\, ds$ et ces deux mesures sont étrangères. Or $ds = d\langle X,X\rangle_s = d\langle X^c,X^c\rangle_s + d\langle X^d,X^d\rangle_s$. Donc $d\langle X^c,X^c\rangle_s = 1_{\{H\neq 0\}}\, ds$ et $d\langle X^d,X^d\rangle_s = 1_{\{H=0\}}\, ds$.

3) Bien entendu on pourrait échanger les rôles de B et Q dans la proposition ci-dessus ou dans les remarques précédentes.

4) Il serait <u>intéressant</u> de savoir si la martingale $(X_t)$ définie dans la proposition ci-dessus possède <u>la propriété de développement en chaos</u> : est-ce que toute variable aléatoire Z appartenant à $L^2(\mathcal{F}_\infty^X)$ peut s'écrire sous la forme

$$X = \sum_n \int_{s_1<\dots<s_n} f(s_1,\dots,s_n)\, dX_{s_1} \dots dX_{s_n} \quad , \quad f_n \in L^2(\mathbb{R}_+^n).$$

Nous ne sommes pas parvenus à répondre à cette question.

[1] H.J. ENGELBERT and J. HESS : Integral representation with respect to stopped continuous local martingales. Stochastics 4 (1980), pp. 121-142.

[2] P.A. MEYER : Eléments de probabilités quantiques. Séminaire de Probabilités XX. Lecture Notes in M. 1204. Springer Verlag 1986.

[3] C. STRICKER : Représentation prévisible et changement de temps. The Annals of Probability (1986), vol. 14, No 3, pp. 1070-1074.

[4] M. YOR : Sous-espaces denses dans $L^1$ ou $H^1$ et représentation des martingales. Séminaire de Probabilités XII. Lecture Notes in M. 649. Springer Verlag 1978.

Christophe STRICKER
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
16, Route de Gray
25030 BESANCON Cedex
FRANCE