Paul-André Meyer

Sur un théorème de B. Rajeev

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 141-143
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__141_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités

SUR UN THEOREME DE B. RAJEEV

par P.A. Meyer

Cette note présente un très joli théorème de B. Rajeev (contenu dans un preprint de l'Indian Statistical Institute, Calcutta, intitulé <u>On Sojourn Times of Martingales</u> ; à paraître). La démonstration de Rajeev est entièrement élémentaire, et celle que nous allons donner ici ne l'est pas - mais d'autre part, pour les lecteurs habitués aux discussions des séminaires de Paris ou de Strasbourg, elle est peut être plus parlante.

Voici le résultat. On considère une <u>martingale continue</u> (X_t), que l'on supposera de carré intégrable (jusqu'à l'infini) ; (A_t) est le processus croissant associé ; U est un intervalle $]a,b[$, et $\partial U=\{a,b\}$ est son bord. On pose

$$S = \inf\{t : X_t \notin U\} \ , \ T = \sup\{t \geq S : X_t \notin U\} \ (+\infty \text{ si } S=+\infty)$$

Si S est fini, X_S appartient à ∂U, donc $X_S \notin U$ et l'ensemble figurant dans la définition de T est non vide. T n'est pas un temps d'arrêt !

<u>Avec ces notations</u>, <u>on a</u>

$$(1) \qquad E[\int_0^\infty I_U(X_s)dA_s] = E[(X_S-X_0)^2] + (b-a)^2 E[T_a^b] + E[(X_\infty - X_T)^2]$$

T_a^b étant le nombre total des traversées (montées et descentes) de l'intervalle $[a,b]$.

DEMONSTRATION. Nous allons commencer par simplifier le problème. Nous remarquons d'abord que $X_. \in U$ sur $[0, S[$, donc

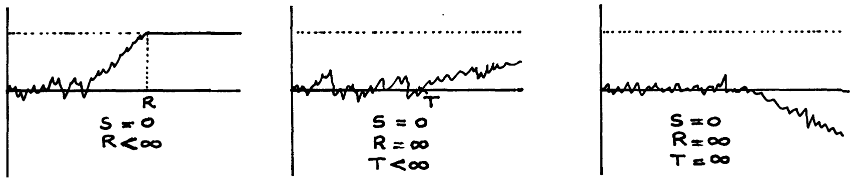
$$E[\int_0^S I_U(X_s)dA_s] = E[A_S] = E[(X_S-X_0)^2]$$

qui est le premier terme de droite. On se décale alors de S, et on est ramené à <u>démontrer le théorème lorsque</u> $X_0 \in \partial U$. Définissons par récurrence les temps d'arrêt successifs

$$R_0=0 \ , \ R_{n+1}=\inf\{t>R_n : X_t \in \partial U, \ X_t \neq X_{R_n}\}$$

(les intervalles $[R_n,R_{n+1}]$ correspondent aux traversées successives de U par la martingale ; T vient s'intercaler dans le dernier intervalle $[R_n,\infty[$, et correspond à une traversée inachevée). Il suffit d'établir la formule pour les martingales arrêtées à R_{n+1} et décalées de R_n , et de sommer sur n . Donc finalement il suffit de démontrer le théorème pour une martingale arrêtée à l'instant $R=R_1$. La valeur X_0 est égale à a ou b ; un conditionnement nous ramène à $X_0=a$ - pour fixer les idées. On se ramène alors à $a=X_0=0$, $b-a=\lambda>0$.

En définitive, on considère une martingale (X_t) issue de 0, qui n'a plus que trois types de trajectoires :



et pour une telle martingale, la formule à établir s'écrit

(2) $$E\left[\int_0^\infty I_{\{X_s\in U\}}dA_s\right] = \lambda^2 P\{R<\infty\} + E[X_\infty^2 I_{\{T<\infty\}}]$$

Voici un raisonnement heuristique qui rend cette formule intuitive. Comme $X_t^2-A_t$ est une martingale nulle en 0, le côté gauche s'écrit $E[\int_0^\infty I_{\{X_s\in U\}}d(X_s)^2]$. Nous écrivons ceci comme la somme des intégrales sur les composantes connexes de l'ouvert aléatoire $\{X_\cdot\in U\}$, qui sont de trois types

- des intervalles $]u,v[$ avec $X_u=X_v=0$; comme $\int_u^v d(X_s)^2=0$, leur contribution est nulle ;
- un seul intervalle $]u,R[$, si $R<\infty$; sa contribution est λ^2 ;
- un seul intervalle $]T,\infty[$, si $T<\infty$; sa contribution est X_∞^2 .

Ainsi la formule (2) est expliquée. Mais les composantes connexes de l'ensemble $\{X\in U\}$ ne sont pas des ensembles adaptés, et il faut donner une justification plus sérieuse. Nous passons donc à la vraie démonstration.

Nous faisons le changement de temps familier, qui nous ramène au cas où $X_t=B_{t\wedge\tau}$, $A_t=t\wedge\tau$, (B_t) étant un mouvement brownien issu de 0 et τ un temps d'arrêt. L'hypothèse faite sur (X_t) signifie que τ est majoré par $\inf\{t : B_t\geq\varepsilon\}$; par ailleurs, on peut supposer τ borné (par tronquation).

Enumérons par ordre croissant les composantes connexes de $\{X_\cdot\in U\}$ de longueur $>\varepsilon$: $]L_1,K_1[$, $]L_2,K_2[$ ... ; il est bien connu que les K_i sont des temps d'arrêt, ainsi que les v.a. $J_i=L_i+\varepsilon$. Soit V_ε la réunion des $]J_i,K_i[$: c'est un ouvert adapté, qui tend en croissant vers $\{X_\cdot\in U\}$ lorsque $\varepsilon\downarrow 0$. Par conséquent $E[\int I_{V_\varepsilon}(s)dA_s]$ tend vers $E[\int_{\{X\in U\}}dA_s]$ et cette espérance vaut d'autre part $E[\Sigma_i (X_{K_i}-X_{J_i})^2]$, somme que nous décomposons en deux : un unique terme (le dernier) pour lequel $X_{K_i}\neq 0$ (ou bien $K_i=R$, ou bien $K_i=+\infty$), et des termes pour lesquels $X_{K_i}=0$: le terme correspondant de la somme vaut donc simplement $X_{J_i}^2$.

L'unique terme pour lequel $X_{K_i} \neq 0$ va fournir, lorsque $\varepsilon \downarrow 0$, le côté droit de la formule (2), et tout revient à démontrer que l'espérance

(3) $$E[\,\Sigma_i\, X^2_{J_i} I_{\{X_{K_i}=0\}}\,] \quad \text{tend vers 0 lorsque } \varepsilon \downarrow 0$$

Or remarquons que chacun des $]L_i,K_i[$ de ce type est un intervalle d'excursion du mouvement brownien (B_t), pour lequel l'excursion est

- positive et de hauteur $< \lambda$
- complétée dans l'intervalle borné $[0,\tau]$.

Soit C une borne pour τ . Enumérons en une suite (e_n) les excursions du brownien complétées dans l'intervalle $[0,C]$, positives, de hauteur $<\lambda$. Soit h_n la hauteur de l'excursion e_n . Il résulte sans peine de la connaissance de la mesure caractéristique du processus de Poisson ponctuel des hauteurs d'excursions que la v.a. $\Sigma_n h_n^2$ est intégrable. Désignons la par M.

Désignons par f_n^ε la v.a. suivante : rappelons que e_n est une trajectoire définie sur un intervalle $[0,\ell_n]$ (ℓ_n est la longueur d'excursion) et nulle aux deux extrémités de cet intervalle. Alors

$$f_n^\varepsilon = e_n(\varepsilon) \quad \text{si } \ell_n > \varepsilon \ , \text{ et sinon } f_n^\varepsilon = 0 \ .$$

Pour tout n on a $f_n^\varepsilon \leq h_n$, et $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} f_n^\varepsilon = 0$. Par convergence dominée, on voit que $E[\Sigma_n (f_n^\varepsilon)^2]$ tend vers 0 lorsque $\varepsilon \downarrow 0$. Or la somme sous le signe E[ ] majore la somme correspondante de (3). La démonstration est achevée.

Pour les virtuoses du grossissement, le résultat apparaîtra comme lié à celui de Jeulin : on peut grossir initialement la filtration de (B_t) par l'ensemble des zéros de (B_t), le processus (B_t^2) restant une semimartingale. Cela permet, en raisonnant sur le mouvement brownien, de justifier sans aucun calcul le raisonnement heuristique de la page précédente (mais c'est utiliser un canon de 75 pour tuer une mouche).

Commentaire du Séminaire (Marc Yor). Il est possible de démontrer cette formule sans aucun passage à la limite, à partir de la formule de balayage donnée dans Temps Locaux, Astérisque n°52-53, p.9. Considérons le processus croissant continu non adapté

$$J_t = \inf_{s \geq t} X_s \quad (J_\infty = X_\infty)$$

Le processus $B_t = (J_0 - X_\infty)^2 - (J_t - X_\infty)^2$ est croissant continu nul en 0 et sa projection duale prévisible est (A_t). On a donc

$$E[\int I_{\{X_s \in U\}} dA_s] = E[\int I_{\{X_s \in U\}} dB_s] \ .$$

Puisque B est à variation finie, cette intégrale est la somme des intégrales étendues aux composantes connexes de $\{X \in U\}$, et l'on obtient la formule (2) sans aucune difficulté, en analysant les différents termes.