

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

RÉMI LÉANDRE

Densité en temps petit d'un processus de saut

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p. 81-99

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__81_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DENSITE EN TEMPS PETIT D'UN PROCESSUS DE SAUTS

Rémi LEANDRE
Laboratoire de Mathématiques
Faculté des Sciences et des Techniques
16, Route de Gray
25030 BESANCON - FRANCE

INTRODUCTION :

Le calcul des variations permet de montrer que certains processus de sauts possèdent une densité ($[B]$, $[L.1]$, $[B.G.J]$).

Plus précisément, appelons $x_t(x)$ un processus de sauts purs issu de x , à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, de mesure de Lévy $g(x,z)dz$. Le fait qu'il possède une densité $p_t(x,y)$ se traduit par le fait que $\int g(x,z)dz = \infty$. Notre but est de montrer qu'en temps petit, on a, si $x \neq y$:

$$(0.1) \quad p_t(x,y) \sim g(x,y-x)t,$$

dès que $g(x,y-x) \neq 0$.

L'hypothèse $g(x,y-x) \neq 0$ traduit le fait que le processus peut sauter en un seul saut de x à y . (0.1) signifie que la trajectoire optimale qu'utilise le processus $x_t(x)$ pour aller de x à y est de sauter en une seule fois de x à y et de ne pas bouger avant et après le temps de saut. En temps petit, le processus tend à utiliser cette trajectoire optimale. Ainsi apparaît l'aspect combinatoire qui intervient dans l'estimation de $p_t(x,y)$: si le nombre minimum de sauts nécessaires pour aller de x à y était 2, on aurait un équivalent en Ct^2 ... Contrairement à ce qui se passe dans la théorie des grandes déviations ($[F.V]$), il faudrait utiliser un autre modèle pour faire apparaître une action et une décroissance exponentielle de la densité.

I. GENERALITES :

Considérons un champ de vecteurs X_0 sur $\mathbb{R}^d$, de dérivées de tous ordres bornées et une application bornée $\gamma(x,z)$ de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^d$, de dérivées de tous ordres bornées. Supposons que :

$$(1.1) \quad \gamma(x,0) = 0.$$

Introduisons un processus z_s à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, qui soit une martingale à accroissements indépendants, de mesure de Lévy $g(z)dz$. Supposons qu'il soit la somme compensée de ses sauts ($[J]$).

On suppose que g vérifie les conditions rendant possible le calcul des variations stochastiques ($[B]$, $[B.G.J]$) : elle est C^∞ sur $\mathbb{R}^p - (0)$, et pour $\varepsilon > 0$, on a :

$$(1.2) \quad \int_{|z| \geq \varepsilon} \frac{|\frac{\partial g}{\partial z}(z)|^2}{g(z)} dz < \infty.$$

Enfin, on suppose qu'il existe une fonction $v \in C^\infty$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$(1.3) \quad v(z) \leq C |z|^2$$

$$(1.4) \quad \int_{|z| \leq 1} \left| \frac{d}{dz} v(z) g(z) \right|^2 \frac{dz}{g(z)} < \infty.$$

De plus, supposons que $v(z) > 0$ si $g(z) > 0$ et si z est non nul.

Considérons la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$(1.5) \quad x_t(x) = x + \sum_{s \leq t}^c \gamma(x_{s-}(x), \Delta z_s) + \int_0^t X_0(x_s(x)) ds,$$

X_0 étant un champ de vecteurs de dérivées de tout ordre bornées. (L'opérateur de somme compensée $\sum_{s \leq t}^c$ est défini dans [J]).

En général, l'application Ψ_t qui à x associe $x_t(x)$, bien que presque sûrement C^∞ n'est pas un difféomorphisme ([L.2]). Toutefois, si l'on fait la restriction suivante :

$$(1.6) \quad \inf_{g(z) > 0, x \in \mathbb{R}^d} |\det(I + \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, z))| > 0,$$

Ψ_t est un difféomorphisme.

Notons $C\gamma$ la matrice :

$$(1.7) \quad C\gamma = \inf_{g(z) \neq 0, x \in \mathbb{R}^d} \frac{\partial \gamma}{\partial z}(x, z)^t \frac{\partial \gamma}{\partial z}(x, z).$$

Rappelons le théorème suivant ([B.G.J]).

Théorème I.1 : Supposons que (1.6) soit vérifiée, et que $C\gamma$ est inversible. Pour que $x_t(x)$ possède une densité C^∞ , il suffit qu'il existe un entier $\alpha \in]0, 2[$ tel que :

$$(1.8) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha \int_{|z| > \varepsilon} g(z) dz > 0.$$

Remarque : La condition " $C\gamma$ inversible" est beaucoup trop forte. Nous l'introduisons dans le but de simplifier les calculs qui suivront. Elle s'interprète de la façon suivante : appelons ε_C le plus grand réel > 0 tel que :

$$(1.9) \quad \int_{|z| > \varepsilon_C} g(z) dz > 0.$$

Considérons une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^p$ dans $[0, 1]$, notée ϕ_ε , nulle sur la boule de centre 0 et de rayon $\frac{\varepsilon_C}{2}$ et égale à 1 en dehors de la boule de rayon ε .

Introduisons la variable aléatoire X_ε à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et de loi :

$$(1.10) \quad dP(X_\varepsilon)(z) = \frac{\phi_\varepsilon(z) g(z) dz}{\int \phi_\varepsilon(z) g(z) dz}.$$

Il faut bien sûr supposer que $\varepsilon < \varepsilon_C$ dans (1.10).

Considérons la variable aléatoire $x + \gamma(x, X_\varepsilon)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Esquissons brièvement comment le calcul des variations stochastiques et la condition "C γ inversible" permettent de montrer que $x + \gamma(x, X_\varepsilon)$ possède une densité $g_\varepsilon(x, y)$ C^∞ en x et y , et que g_ε est bornée, γ possédant des dérivées de tout ordre bornées.

Introduisons une fonction $f \in C^\infty$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, à support compact, X un vecteur de $\mathbb{R}^d$ et λ un réel positif. Si λ est assez petit, $z \rightarrow z + \lambda \frac{\partial \gamma}{\partial z}(x, z) X$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$ noté Ψ_λ , de Jacobien J_λ . On a alors la formule de quasi-invariance :

$$(1.11) \quad \begin{aligned} & \int f(x + \gamma(x, z)) \phi_\varepsilon(z) g(z) dz = \\ & = \int f(x + \gamma(x, \Psi_\lambda(z))) \phi_\varepsilon(\Psi_\lambda(z)) g(\Psi_\lambda(z)) J_\lambda dz. \end{aligned}$$

En dérivant cette dernière expression en λ , on obtient une formule d'intégration par parties :

$$(1.12) \quad \begin{aligned} & E \left[\langle f'(x + \gamma(x, X_\varepsilon)), \frac{\partial \gamma}{\partial z}(x, X_\varepsilon)^t \frac{\partial \gamma}{\partial z}(x, X_\varepsilon) X \rangle \right] = \\ & = E [f(x + \gamma(x, X_\varepsilon)) L_\varepsilon(\gamma)]. \end{aligned}$$

L_ε s'interprète comme l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck associé à X_ε .

$\frac{\partial \gamma}{\partial z}(x, X_\varepsilon)^t \frac{\partial \gamma}{\partial z}(x, X_\varepsilon)$ s'interprète comme la matrice de Malliavin associé à γ ([B.G.J]).

Compte tenu du fait que C γ est inversible, on peut appliquer la procédure générale de ([I.W] [St]) pour en déduire l'existence de $g_\varepsilon(x, y)$ et sa régularité.

Bien évidemment, ceci résulte aussi du théorème des fonctions implicites, mais nous avons donné cette méthode à titre pédagogique. Elle s'applique aussi pour montrer que la transformée de $g(z) dz$ par $z \rightarrow x + \gamma(x, z)$ est une mesure μ_x possédant une densité $g(x, y) C^\infty$ en x et y si $x \neq y$. De plus si K est un compact de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ne rencontrant pas la diagonale, on peut choisir ε assez petit de sorte que pour tout (x, y) de K on ait :

$$(1.13) \quad g_\varepsilon(x, y) = \frac{g(x, y)}{\int \phi_\varepsilon(z) g(z) dz}.$$

Ceci provient du fait que $\gamma(x, 0) = 0$.

Revenons au théorème I. Notons $p_t(x, y)$ la densité de $x_t(x)$: elle est C^∞ en x, y et $t > 0$.

Proposition I.2 : Considérons la boule $B(y, r)$ de centre y et de rayon r .

Uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$, on a :

$$(1.14) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_{B(y,r)} p_t(x,y) dx = 1.$$

Preuve : Introduisons deux fonctions C^∞ $f_1(x)$ et $f_2(x)$, positives, égales à 1 sur un voisinage de l'origine. Supposons qu'elles encadrent la fonction indicatrice de $B(0,r)$. Il suffit de montrer qu'uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$:

$$(1.15) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int f_1(y-x) p_t(x,y) dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int f_2(y-x) p_t(x,y) dx.$$

Il suffit d'effectuer la démonstration pour f_1 . Soit $\mu_1(t)$ la mesure sur $\mathbb{R}^d$:

$$(1.16) \quad g \rightarrow \int E[f_1(x_t(x) - x) g(x_t(x))] dx.$$

On a évidemment :

$$(1.17) \quad \mu_1(t)(g) = \int g(y) dy \int f_1(y-x) p_t(x,y) dx.$$

La fonction $y \rightarrow \int f_1(y-x) p_t(x,y) dx$ est C^∞ en y , et est la densité de $\mu_1(t)$.

De plus, $x \xrightarrow{\psi_t} x_t(x)$ est un difféomorphisme de Jacobien $J_t^{-1}(x)$. La formule de Fubini et la formule du changement de variable impliquent que :

$$(1.18) \quad \begin{aligned} \mu_1(t)(g) &= E[\int f_1(x_t(x) - x) g(x_t(x)) dx] = \\ &= E[\int f_1(x - \psi_t^{-1}(x)) g(x) J_t^{-1}(x) dx]. \end{aligned}$$

Si nous identifions (1.17) et (1.18), nous obtenons :

$$(1.19) \quad \int f_1(y-x) p_t(x,y) dx = E[f_1(y - \psi_t^{-1}(y)) J_t^{-1}(y)].$$

Car il résulte de (1.18) que $y \rightarrow E[f_1(y - \psi_t^{-1}(y)) J_t^{-1}(y)]$ est une autre version C^∞ de la densité de $\mu_1(t)$. $\square$

L'hypothèse (1.7) implique que l'application

$$(1.20) \quad x \xrightarrow{H_z} x + \gamma(x,z)$$

est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ si $g(z) \neq 0$. Notons H_z^{-1} son inverse, et posons :

$$(1.21) \quad \tilde{\gamma}(x,z) = H_z^{-1}(x) - x.$$

(1.7) implique que $\tilde{\gamma}$ est C^∞ en x, z de dérivées de tout ordre bornées. De plus, on a $\tilde{\gamma}(x,0) = 0$ car $H_0(x) = x$.

Posons :

$$(1.22) \quad S_\gamma \sup_{x \in \mathbb{R}^d, g(z) > 0} |\tilde{\gamma}(x,z)|.$$

On a :

$$(1.23) \quad S_Y = \sup_{x \in \mathbb{R}^d_{g(z) > 0}} |\tilde{\gamma}(H_z(x), z)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^d_{g(z) > 0}} |\tilde{\gamma}(x, z)|$$

car $x \rightarrow H_z(x)$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$.

Proposition I.3 : Pour tout entier p, il existe un entier K tel que si $r > KS_Y$, on ait :

$$(1.24) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^p} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int_{B^c(y, r)} p_t(x, y) dx < \infty.$$

Preuve : Majorons la fonction indicatrice de $B^c(y, KS_Y)$ par une fonction $C^\infty f_1$, appliquant $\mathbb{R}^d$ dans $[0, 1]$. Supposons de plus que f_1 soit nulle sur $B(y, (K-1)S_Y)$, K étant un entier ≥ 2 .

Si l'on procède comme dans la proposition précédente, il suffit de prouver que :

$$(1.25) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{t^p} E[f_1(y - \Psi_t^{-1}(y))] < \infty$$

pour un entier K bien choisi.

Or $\Psi_t^{-1}(y)$ a même loi que la solution d'une équation différentielle stochastique. En effet, d'après l'appendice, $\Psi_t^{-1}(y)$ a même loi que la solution prise au temps t de l'équation différentielle stochastique :

$$(1.5)' \quad \tilde{x}_s(y) = y + \sum_{u \leq s}^c \tilde{\gamma}(\tilde{x}_u, \Delta \tilde{z}_u) + \int_0^s \tilde{X}_0(\tilde{x}_u) du,$$

$\tilde{z}_s$ étant une martingale à accroissement indépendant de mesure de Lévy $g(-z)dz$.

(1.25) résulte des deux propriétés suivantes :

La première affirme que :

$$(1.26) \quad \sup_{y \in \mathbb{R}^d} E[|J_t(y)|^2] < \infty$$

et provient de la théorie des flots stochastiques ([L.2], [M]).

La seconde affirme que si l'on choisit un entier K assez grand, on a, si t est assez petit :

$$(1.27) \quad \sup_{y \in \mathbb{R}^d} E[f_1^2(y - \Psi_t^{-1}(y))] < Ct^{2p}.$$

En effet, $\phi_t^{-1}(y)$ se décompose d'après (1.5)' en la forme d'une variable aléatoire $M_t(y)$ et d'une variable $y + \int_0^t A_s ds$. De plus A_s est bornée, ceci implique que si t est assez petit :

$$(1.28) \quad \sup_{y \in \mathbb{R}^d} E[f_1^2(y - \Psi_t^{-1}(y))] \leq P\{\sup_{s \leq t} |M_s(y)| \geq (K-2)S_Y\}.$$

De plus $M_t(y)$ est la variable terminale associée à une martingale $s \rightarrow M_s(y)$ à sauts bornés par S_Y . Et l'on a d'après (1.5)'

$$(1.29) \quad \langle M_s(y), M_s(y) \rangle = \int_0^s du \int |u(\tilde{x}_u(x), z)|^2 g(-z) dz \leq ks.$$

On peut donc appliquer la proposition suivante qui généralise au cas des processus de sauts la majoration exponentielle habituellement utilisée pour les diffusions.

Proposition I.4 : Considérons une martingale M_t à valeurs dans R , dont les sauts sont bornés par S et dont le crochet oblique $\langle M, M \rangle$ vérifie :

$$(1.30) \quad \langle M, M \rangle_t \leq kt.$$

Il existe alors une constante $C(k, S)$ qui ne dépend que de k et de S tel que pour tout $t \leq 1$, on ait :

$$(1.31) \quad P \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} |M_s| \geq pS \right\} \leq C(k, S) t^p.$$

Preuve : L'inégalité exponentielle de [L.M] implique que :

$$(1.32) \quad P \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} |M_s| \geq C \right\} \leq 2 \exp \left[-\lambda C + \frac{\lambda^2}{2} S^2 kt(1 + \exp[\lambda S]) \right]$$

pour $C > 0$, $\lambda > 0$.

Il suffit de prendre $C = pS$ et $\lambda = \frac{\log |t|}{S}$.

II. MINORATION DE LA DENSITE :

Considérons une fonction ϕ_ε de R^p dans R égale à 1 en dehors de la boule de centre 0 et de rayon ε et égale à 0 sur la boule de centre 0 et de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$. De plus $0 \leq \phi_\varepsilon \leq 1$.

Considérons deux martingales à accroissements indépendants, indépendantes entre elles. L'une, notée $z_t(\varepsilon)$ a pour mesure de Lévy $\phi_\varepsilon(z)g(z)dz$, et l'autre, notée $z'_t(\varepsilon)$ a pour mesure de Lévy $(1 - \phi_\varepsilon(z))g(z)dz$.

z_t a même loi que $z_t(\varepsilon) + z'_t(\varepsilon)$. Grâce à cette décomposition, on va pouvoir séparer dans $p_t(x, y)$ la contribution des grands sauts de z_t et celle des petits sauts de z_t .

Comme $z_t(\varepsilon)$ possède une mesure de Lévy de masse finie, les temps de sauts de $z_s(\varepsilon)$ constituent un processus de Poisson ponctuel $N_s(\varepsilon)$ de paramètre $\int \phi_\varepsilon(z)g(z)dz$.

A une trajectoire $s \rightarrow N_s(\varepsilon)$, $s \leq t$, on associe la subdivision S_t de $[0, t]$ correspondant aux temps de sauts $s_1 < s_2, \dots < s_k$ de $N_s(\varepsilon)$ avant t . On définit ainsi une mesure $\tilde{P}_{t, \varepsilon}$ sur l'espace de toutes les subdivisions de $[0, t]$.

Considérons une infinité de variables aléatoires $X_1(\varepsilon)$ indépendantes de même

$$\text{loi } \frac{\phi_\varepsilon(z)g(z)dz}{\int \phi_\varepsilon(z)g(z)dz}.$$

Fixons une subdivision S_t finie de $[0, t]$ et considérons la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x_s(\varepsilon, S_t, x) = & x + \sum_{u \leq s}^c \gamma(x_{u-}(\varepsilon, S_t, x), \Delta z'(\varepsilon)) + \\ & + \sum_{s_i \in S_t} \sum_{s_i \leq s} \gamma(x_{s_i-}(\varepsilon, S_t, x), \Delta X_i(\varepsilon)) + \\ & + \int_0^s X_0(x_u(\varepsilon, S_t, x)) du - \int_0^s du \int \phi_\varepsilon(z) \gamma(x_u(\varepsilon, S_t, x), z) g(z) dz. \end{aligned}$$

Du fait de la condition (1.6), elle possède un flot stochastique $\Psi_s(\varepsilon, S_t, x)$, $0 \leq s \leq t$.

On peut effectuer le calcul des variations stochastiques sur $\Psi_s(\varepsilon, S_t, x)$. Considérons donc la forme quadratique de Malliavin $K_t(\varepsilon, S_t, x)$ associée à $x_t(\varepsilon, S_t, x)$. Rappelons ([B.G.J]) que :

$$(2.2) \quad \begin{aligned} K_t(\varepsilon, S_t, x) = & \sum_{s \leq t} v(\Delta z'_s(\varepsilon)) \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial x}(\varepsilon, S_t, x) \right)^{-1} \frac{\partial \gamma}{\partial z}(x_{s-}(\varepsilon, S_t, x), \\ & \Delta z'_s(\varepsilon)) \gamma \left(\frac{\partial \gamma}{\partial z}(x_{s-}(\varepsilon, S_t, x), \Delta z'_s(\varepsilon))^t \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial s}(\varepsilon, S_t, x) \right)^{-1} + \right. \\ & + \sum_{s_i \in S_t} v(X_i(\varepsilon)) \left(\frac{\partial \Psi_{s_i}}{\partial x}(\varepsilon, S_t, x) \right)^{-1} \frac{\partial \gamma}{\partial z}(x_{s_i-}(\varepsilon, S_t, x), X_i(\varepsilon)), \\ & \left. \frac{\partial \gamma}{\partial z}(x_{s_i-}(\varepsilon, S_t, x), X_i(\varepsilon))^t \frac{\partial \Psi_{s_i}}{\partial x}(\varepsilon, S_t, x) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Comme $K_t^{-1}(\varepsilon, S_t, x)$ existe et est dans tous les L^p , $x_t(\varepsilon, S_t, x)$ possède une densité $p_t(\varepsilon, S_t, x, y)$.

De plus, comme $z'_t(\varepsilon)$ et $z_t(\varepsilon)$ sont indépendants, on a :

$$(2.3) \quad p_t(x, y) = \int p_t(\varepsilon, S_t, x, y) d\tilde{P}_{t, \varepsilon}(S_t).$$

On distingue trois cas :

- $z_s(\varepsilon)$ ne saute pas entre 0 et t
- $z_s(\varepsilon)$ saute une fois entre 0 et t
- $z_s(\varepsilon)$ saute au moins deux fois entre 0 et t.

On en déduit la décomposition de $p_t(x, y)$.

$$\begin{aligned}
 p_t(x, y) &= p_t(0, \varepsilon, x, y) + p_t(1, \varepsilon, x, y) + p_t(2, \varepsilon, x, y) = \\
 (2.4) \quad &= \int_{\#S_t=0} p_t(\varepsilon, S_t, x, y) d\tilde{P}_{t, \varepsilon}(S_t) + \int_{\#S_t=1} p_t(\varepsilon, S_t, x, y) d\tilde{P}_{t, \varepsilon}(S_t) + \\
 &+ \int_{\#S_t \geq 2} p_t(\varepsilon, S_t, x, y) d\tilde{P}_{t, \varepsilon}(S_t).
 \end{aligned}$$

Pour obtenir la minoration désirée de $p_t(x, y)$, nous allons utiliser l'inégalité

$$(2.5) \quad p_t(x, y) \geq p_t(1, \varepsilon, x, y)$$

qui découle de (2.4), toutefois il nous faudra auparavant choisir ε assez petit.

Il n'y a évidemment qu'une seule subdivision S_t de cardinal nul : notons-la $\emptyset$.

Considérons la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{aligned}
 (2.5) \quad x_t(\varepsilon, \emptyset, x) &= x + \sum_{u \leq t}^c \gamma(x_{u-}(\varepsilon, \emptyset, x), \Delta z'_u(\varepsilon)) + \\
 &+ \int_0^t X_0(x_u(\varepsilon, \emptyset, x)) - \int_0^t du \int \phi_\varepsilon(z) \gamma(x_u(\varepsilon, \emptyset, x), z) g(z) dz.
 \end{aligned}$$

Elle aussi possède du fait de (1.4) un flot stochastique noté $\Psi_t(\varepsilon, \emptyset, x)$. $x_t(\varepsilon, \emptyset, x)$ possède la densité $p_t(\varepsilon, \emptyset, x, y)$. Supposons que $S_t = \{s\}$.

Rappelons que le processus $x_u\{\varepsilon, \{s\}, x\}$ a même loi sur $[0, s[$ que le processus $x_u\{\varepsilon, \emptyset, x\}$, en s il saute de $x_{s-}(\varepsilon, \emptyset, x)$ suivant la loi $g_\varepsilon(x_{s-}(\varepsilon, \emptyset, x), z) dz$ qui a été définie en (1.11), et après suit la même loi que $x_u(\varepsilon, \emptyset, x_s(\varepsilon, \{s\}))$. Il résulte de cela que l'on a la formule :

$$(2.6) \quad p_t(\varepsilon, \{s\}, x, y) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} p_s(\varepsilon, \emptyset, x, z) g_\varepsilon(z, z') p_{t-s}(\varepsilon, \emptyset, z', y) dz dz'.$$

De plus, la loi de l'unique temps de saut de $N_s(\varepsilon)$ conditionnée par le fait que $N_t(\varepsilon) = 1$ est une loi uniforme sur $[0, t]$. Donc :

$$\begin{aligned}
 (2.7) \quad p_t(1, \varepsilon, x, y) &= \frac{1}{t} \int_0^t p_t(\varepsilon, \{s\}, x, y) ds = \int \phi_\varepsilon(z) g(z) dz \\
 &\exp \left[-t \int \phi_\varepsilon(z) g(z) dz \right]
 \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
 (2.7)' \quad p_t(1, \varepsilon, x, y) &= \int \phi_\varepsilon(z) g(z) dz \exp \left[-t \int \phi_\varepsilon(z) g(z) dz \right] \\
 &\int_0^t p_t(\varepsilon, \{s\}, x, y) ds.
 \end{aligned}$$

Rappelons que $g(x, y)$ a été défini peu avant (1.13).

Proposition II.1 : Considérons un compact de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ne rencontrant pas la diagonale. Uniformément sur K , on a :

$$(2.8) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_t(x, y)}{t} \geq g(x, y)$$

si (1.8) est vérifiée et si $C\gamma$ est inversible.

Preuve : en vertu de (2.7)', il suffit de montrer que l'on peut choisir un ε assez petit pour que :

$$(2.9) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \inf_{s \in [0, t]} p_t(\varepsilon, \{s\}, x, y) \geq \frac{g(x, y)}{\int \phi_\varepsilon(z) g(z) dz}.$$

Il résulte de (2.6) que :

$$(2.10) \quad \begin{aligned} p_t(\varepsilon, \{s\}, x, y) &\geq \int_{|x-y| \leq \eta} \int_{|y-z'| \leq \eta} g_\varepsilon(z, z') \\ p_s(\varepsilon, \emptyset, x, z) p_{t-s}(\varepsilon, \emptyset, x, z) dz dz'. \end{aligned}$$

Fixons $\varepsilon_0 > 0$.

Choisissons ε assez petit et de η assez petit pour que :

$$(2.11) \quad g_\varepsilon(z, z') \geq \frac{g(x, y) - \varepsilon_0}{\int \phi_\varepsilon(z) g(z) dz}$$

dès que $|z' - y| \leq \eta$, $|z - x| \leq \eta$, $(x, y) \in K$. Ceci est possible en vertu de la continuité de g en dehors de la diagonale de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ et en vertu de (1.13).

(2.10) et (2.11) impliquent alors que :

$$(2.12) \quad \begin{aligned} p_t(\varepsilon, \{s\}, x, y) &\geq \frac{g(x, y) - \varepsilon_0}{\int \phi_\varepsilon(z) g(z) dz} \cdot \int_{|z-x| < \eta} p_s(\varepsilon, \emptyset, x, z) dz \\ &\cdot \int_{|y-z| \leq \eta} p_{t-s}(\varepsilon, \emptyset, z, y) dz. \end{aligned}$$

Or :

$$(2.13) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \inf_{s \leq t, x \in \mathbb{R}^d} \int_{|z-x| \leq \eta} p_s(\varepsilon, \emptyset, x, z) dz = 1.$$

Car on a évidemment :

$$(2.14) \quad \int_{|z-x| \leq \eta} p_s(\varepsilon, \emptyset, x, z) dz = P\{|x_s(\varepsilon, \emptyset, x) - x| \leq \eta\}.$$

De plus il résulte de (1.14) que :

$$(2.15) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \inf_{s \leq t, (x, y) \in K} \int_{|y-z| \leq \eta} p_{t-s}(\varepsilon, \emptyset, z, y) dz = 1.$$

(2.9) découle alors de (2.12), (2.14) et (2.15).

III. MAJORATION DE LA DENSITE :

Rappelons le principe de la méthode ; on distingue 3 cas :

- $z_s(\varepsilon)$ ne saute pas entre 0 et t ,
- $z_s(\varepsilon)$ saute une fois entre 0 et t ,
- $z_s(\varepsilon)$ saute au moins deux fois entre 0 et t .

On en déduit la décomposition de $p_t(x, y)$ en trois densités.

$$(3.1) \quad p_t(x, y) = p_t(0, \varepsilon, x, y) + p_t(1, \varepsilon, x, y) + p_t(2, \varepsilon, x, y).$$

Dans une première étape, nous montrerons que la contribution de $p_t(0, \varepsilon, x, y)$ et $p_t(2, \varepsilon, x, y)$ est négligeable devant t .

Première étape : Majoration de $p_t(0, \varepsilon, x, y)$

Reprenons les notations de la partie II. On a l'égalité :

$$(3.2) \quad p_t(0, \varepsilon, x, y) \leq p_t(\varepsilon, \emptyset, x, y).$$

Rappelons que $K_t(\varepsilon, \emptyset, x)$ est la forme quadratique définie par :

$$(3.3) \quad K_t(\varepsilon, \emptyset, x) = \sum_{s \leq t} v(\Delta z'_s(\varepsilon)) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}(\varepsilon, \emptyset, x) \right)^{-1} \\ \frac{\partial Y}{\partial z}(x_{s-}(\varepsilon, \emptyset, x), \Delta z'_s(\varepsilon)) \frac{\partial Y}{\partial z}(x_{s-}(\varepsilon, \emptyset, x), \Delta z'_s(\varepsilon))^t \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}(\varepsilon, \emptyset, x) \right)^{-1}.$$

Lemme III.1 : Pour tout $p > 1$, il existe un entier $n(p)$ indépendant de ε tel que pour $t \leq 1$:

$$(3.4) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^d, \varepsilon' > \varepsilon} E[|K_t^{-1}(\varepsilon, \emptyset, x)|^p] \leq C(\varepsilon) t^{-n(p)}$$

dès que (1.8) est vérifiée et dès que C_Y est inversible.

Preuve : Elle est très proche de celle que Bismut donne dans [B] p.200, 210 (on peut voir aussi [L.1] sur ce point).

Aussi n'en rappellerons-nous que les grandes lignes.

Considérons un vecteur f de norme 1 et un réel p positif ≥ 1 .

D'après [I.W], Lemme 8.4, il suffit de montrer que :

$$(3.5) \quad \sup_{\|f\|=1, x \in \mathbb{R}^d, \varepsilon' > \varepsilon} E[|K_t(\varepsilon, \emptyset, x)(f)|^{-p}] \leq C(\varepsilon) t^{-n'(p)}$$

pour en déduire (3.4). Posons :

$$(3.6) \quad \tilde{K}_t(\varepsilon, \emptyset, x) = \sum_{s \leq t} v(\Delta z'_s(\varepsilon)) \frac{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}^s(\varepsilon, \emptyset, x) \right)^{-1}}{\left| \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}^{s-}(\varepsilon, \emptyset, x) \right)^{-1} \right|} \frac{\frac{\partial Y}{\partial z}(x_{s-}(\varepsilon, \emptyset, x), \Delta z'_s(\varepsilon))}{\frac{\partial Y}{\partial z}(x_{s-}(\varepsilon, \emptyset, x), \Delta z'_s(\varepsilon))} \frac{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}^s(\varepsilon, \emptyset, x) \right)^{-1}}{\left| \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}^{s-}(\varepsilon, \emptyset, x) \right)^{-1} \right|}.$$

Comme :

$$(3.7) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^d, \varepsilon \leq 1} E \left[\sup_{s \leq 1} \left| \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}^s(\varepsilon, \emptyset, x) \right)^{-1} \right|^{-p} \right] < \infty,$$

il suffit pour montrer (3.5) de montrer que :

$$(3.5)' \quad \sup_{\|f\|=1, x \in \mathbb{R}^d, \varepsilon' > \varepsilon} E \left[\left| \tilde{K}_t(\varepsilon', \emptyset, x)(f) \right|^{-p} \right] \leq C(\varepsilon) t^{-n'(p)}.$$

Notons $\Gamma(p)$ la fonction d'Euler. On a la relation fondamentale :

$$(3.8) \quad E \left[\left| \tilde{K}_t(\varepsilon', \emptyset, x)(f) \right|^p \right] = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty r^{p-1} E[\exp[-r \tilde{K}_t(\varepsilon', \emptyset, x)(f)]] dr.$$

$s \rightarrow \tilde{K}_s(\varepsilon, \emptyset, x)(f)$ est un processus de sauts strictement croissant. Notons $d\tilde{\mu}(\varepsilon', \emptyset, f)(u)$ sa mesure de Lévy.

Le processus :

$$(3.9) \quad t \rightarrow \exp[-r \tilde{K}_t(\varepsilon', \emptyset, x)(f)]_t + \int_0^t ds \int (1 - \exp[-ru]) d\tilde{\mu}_s(\varepsilon', \emptyset, x, f)(u)$$

est une martingale de carré intégrale. On a donc :

$$(3.10) \quad E \left[\left| \tilde{K}_t(\varepsilon', \emptyset, x)(f) \right|^p \right] \leq \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty r^{p-1} [E[\exp[\int_0^t 2 ds \int (\exp[-\frac{ru}{2}] - 1) d\tilde{\mu}_s(\varepsilon', \emptyset, x, f)(u)]]]^{\frac{1}{2}} dr.$$

Or $\tilde{\mu}_s(\varepsilon', \emptyset, x, f)$ est la transformée de la mesure sur $\mathbb{R}^p$ $(1 - \phi_\varepsilon(z))g(z)dz$ par l'application H de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ qui est donnée par :

$$(3.11) \quad z \rightarrow v(z) \left| \frac{\partial Y}{\partial z}(x_{s-}(\varepsilon', \emptyset, x), z) \right| \frac{\frac{\partial Y}{\partial z}(x_{s-}(\varepsilon', \emptyset, x), z)}{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}^{s-}(\varepsilon', \emptyset, x) \right)^{-1} f} \left| \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}^{s-}(\varepsilon', \emptyset, x)}{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}^{s-}(\varepsilon', \emptyset, x) \right)^{-1} f} \right|^2.$$

Or la mesure $g(z)dz$ vérifie (1.8). $C\gamma$ est inversible, donc il est possible de trouver un réel $\beta \in]0, 2[$ tel que :

$$(3.12) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \inf_{t < 0, x \in \mathbb{R}^d, \varepsilon < \varepsilon', \|f\|=1} \eta^\beta \tilde{\mu}_t(\varepsilon', \emptyset, x) \{[\eta, \infty[> C(\varepsilon) > 0.$$

Appliquons alors le théorème taubérien de [B], p.200-210.

On peut trouver un réel $\gamma' > 0$ tel que :

$$(3.13) \quad \begin{aligned} & \sup_{\|f\|=1, x \in \mathbb{R}^d, \varepsilon' > \varepsilon} E[|K_t(\varepsilon', \emptyset, x)(f)|^{-p}] \leq \\ & \leq C_1(\varepsilon) + C_2(\varepsilon) \int_1^\infty r^{2p} \exp[-C_3(\varepsilon) \text{tr} \gamma'] dr. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à poser $\text{tr} \gamma' = r^{\gamma'}$ dans la dernière intégrale pour en déduire (3.7).

On a alors la proposition suivante :

Proposition III.2 : Supposons que $C\gamma$ est inversible et que g vérifie (1.8).

Considérons un réel $p > 1$ et un réel η . Il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour $t \leq 1$ et pour $0 < \varepsilon' < \varepsilon$

$$(3.14) \quad \sup_{|x-y| \geq \eta} p_t(0, \varepsilon', x, y) \leq C(\eta, \varepsilon') t^p.$$

Preuve : Elle est très proche de celle donnée dans [K.S] pour obtenir des majorations des densités des diffusions, en n'utilisant que le calcul de Malliavin. Toutefois une difficulté apparaît ici dans la majoration exponentielle, moins simple à utiliser que celle des diffusions.

Soit f une fonction C^∞ à support compact de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, et soit un multi-indice (α) . D'après le calcul de Malliavin sur les processus de sauts [B.G.J], on a la formule d'intégration par parties :

$$(3.15) \quad E\left[\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} f(x_t(\varepsilon', \emptyset, x))\right] = E\left[J_t^{(\alpha)}(\varepsilon', \emptyset, x) f(x_t(\varepsilon', \emptyset, x))\right],$$

$J_t^{(\alpha)}(\varepsilon', \emptyset, x)$ étant une "expression universelle" qui résulte du calcul des variations stochastiques.

De plus :

$$(3.16) \quad J_t^{(\alpha)}(\varepsilon', \emptyset, x) = |K_t(\varepsilon', \emptyset, x)^{-1}|^{2|\alpha|} Q_t^{(\alpha)}(\varepsilon', \emptyset, x)$$

avec :

$$(3.17) \quad \sup_{\varepsilon \leq 1, x \in \mathbb{R}^d, t \leq 1} E[|Q_t^{(\alpha)}(\varepsilon', \emptyset, x)|^p] < \infty.$$

Utilisons le lemme III.1. Il existe un entier N tel que pour $t \leq 1$

$$(3.18) \quad \sup_{\varepsilon < \varepsilon' < 1, x \in \mathbb{R}^d} E[|J_t^{(\alpha)}(\varepsilon', \emptyset, x)|^p] < \frac{C(\varepsilon)}{t^N}.$$

N ne dépend que de p et (α) , et pas de ε .

Fixons η et prenons un entier N' arbitraire. D'après la majoration exponentielle de [L.M], on peut trouver un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour $t < 1$:

$$(3.19) \quad \sup_{\varepsilon' < \varepsilon, x \in \mathbb{R}^d} P\{|x_t(\varepsilon', \emptyset, x) - x| \geq \eta\} < C t^{N'}.$$

Revenons à la formule d'intégration par partie (3.16) et à (3.18). Considérons une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, à support compact, nulle en dehors de la boule de centre 0 et de rayon η . (3.19) implique alors que l'on peut choisir un ε tel qu'il existe une constante $C(\varepsilon')$ telle que pour $0 < \varepsilon' < \varepsilon$

$$(3.20) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^d} E\left[\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} f(x_t(\varepsilon', \emptyset, x) - x)\right] \leq C(\varepsilon') t^p \|f\|_\infty$$

si $|\alpha| \leq d$.

Deuxième étape : Majoration de $p_t(2, \varepsilon, x, y)$

Proposition III.3 : Supposons que C_Y est inversible et que g vérifie (1.8). Il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour $t < 1$, on ait :

$$(3.21) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d} p_t(2, \varepsilon', x, y) \leq C(\varepsilon') t^2$$

dès que $0 < \varepsilon' < \varepsilon < 1$.

Preuve : Rappelons que d'après (2.4), on a :

$$(3.22) \quad \int_{\#S_t \geq 2} p_t(\varepsilon', S_t, x, y) d\tilde{P}_{t, \varepsilon'}(S_t) = p_t(2, \varepsilon, x, y).$$

Il suffit alors de montrer que l'on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, on ait :

$$(3.23) \quad \sup_{\#S_t \geq 2, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d} p_t(\varepsilon', S_t, x, y) \leq C(\varepsilon') < \infty.$$

En effet :

$$(3.24) \quad \tilde{P}_{t, \varepsilon'}(\{\#S_t \geq 2\}) \leq C(\varepsilon') t^2.$$

Considérons maintenant la forme quadratique de Malliavin $K_t(\varepsilon', S_t, x)$ associée à $x_t(\varepsilon', S_t, x)$. Si $\#S_t \geq 2$,

$$\begin{aligned}
 (3.25) \quad K_t(\varepsilon', S_t, x) &\geq \sum_{i=1}^2 v(X_i(\varepsilon')) \left(\frac{\partial \Psi_{s_i}}{\partial x}(\varepsilon', S_t, x) \right)^{-1} \\
 &\frac{\partial Y}{\partial z}(x_{s_{i-}}(\varepsilon', S_t, x), X_i(\varepsilon)) \\
 &{}^t \frac{\partial Y}{\partial z}(x_{s_{i-}}(\varepsilon', S_t, x), X_i(\varepsilon)) \left(\frac{\partial \Psi_{s_i}}{\partial x}(\varepsilon', S_t, x) \right)^{-1},
 \end{aligned}$$

ce que nous écrirons plus simplement :

$$(3.26) \quad K_t(\varepsilon', S_t, x) \geq \tilde{K}_t(\varepsilon', S_t, x).$$

De plus v est > 0 et g est à support compact. Donc $v(X_i(\varepsilon')) > C(\varepsilon')$. Donc :

$$\begin{aligned}
 (3.27) \quad &\sup_{\# S_t \geq 2, x \in \mathbb{R}^d, t \leq 1} E[|\tilde{K}_t^{-1}(\varepsilon', S_t, x)|^p] \leq C(\varepsilon').
 \end{aligned}$$

La démonstration est alors identique à celle du théorème III.2. Soit une fonction C^∞ à support compact de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. Notons-la f . Soit un multi-indice (α) .

Il existe une fonctionnelle $J_t^{(\alpha)}(\varepsilon', S_t, x)$ "universelle" telle que :

$$(3.15)' \quad E \left[\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} f(x_t(\varepsilon', S_t, x)) \right] + E[J_t^{(\alpha)}(\varepsilon', S_t, x) f(x_t(\varepsilon', S_t, x))] = 0.$$

De plus :

$$(3.16)' \quad J_t^{(\alpha)}(\varepsilon', S_t, x) = |K_t^{-1}(\varepsilon', S_t, x)|^{2|\alpha|} Q^{(\alpha)}(\varepsilon', S_t, x)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 (3.17)' \quad &\sup_{\# S_t \geq 2, \varepsilon' \leq \varepsilon, x \in \mathbb{R}^d, t \leq 1} E[|Q_t^{(\alpha)}(\varepsilon', S_t, x)|^p] < \infty.
 \end{aligned}$$

D'après (3.26), (3.15)', (3.16)' et (3.17)' et (3.27), on a :

$$\begin{aligned}
 (3.20)' \quad &\sup_{\# S_t \geq 2, \varepsilon' \leq 1, x \in \mathbb{R}^d, t \leq 1} E \left[\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} f(x_t(\varepsilon', S_t, x)) \right] \leq C \|f\|_\infty
 \end{aligned}$$

pour tout multi-indice (α) tel que $|\alpha| \leq d$. D'où (3.23).

Troisième étape : Majoration de la densité $p_t(1, \varepsilon, x, y)$

On réutilise les résultats et les notations de la partie II. Rappelons que :

$$\begin{aligned}
 (3.28) \quad p_t(1, \varepsilon', x, y) &= \int \phi_\varepsilon(z) g(z) dz \cdot \exp[-t \int \phi_\varepsilon(z) g(z) dz] \\
 &\therefore \int_0^t p_t(\varepsilon', \{s\}, x, y) ds
 \end{aligned}$$

et que :

$$(3.29) \quad p_t(\varepsilon', \{s\}, x, y) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} p_s(\varepsilon', \emptyset, x, z) g_\varepsilon^1(z, z') \\ p_{t-s}(\varepsilon', \emptyset, z', y) dz \, dz'.$$

Soit un réel $\eta > 0$.

Décomposons $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ en $A_1(\eta) \cup A_2(\eta) \cup A_3(\eta) \cup A_4(\eta)$ avec :

$$(3.30) \quad \begin{aligned} A_1(\eta) &= \{(z, z') \mid |x - z| \leq \eta, |y - z| \leq \eta\} \\ A_2(\eta) &= \{(z, z') \mid |x - z| \leq \eta, |y - z'| > \eta\} \\ A_3(\eta) &= \{(z, z') \mid |x - z| > \eta, |y - z'| \leq \eta\} \\ A_4(\eta) &= \{(z, z') \mid |x - z| > \eta, |y - z'| > \eta\}. \end{aligned}$$

On déduit de (3.29) 4 intégrales notées $I_{i,t,\eta}(\varepsilon', \{s\}, x, y)$.

Lemme III.4 : Considérons un compact K de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ne rencontrant pas la diagonale, et un réel $\eta > 0$. Il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour $\varepsilon' < \varepsilon$ et pour $t \leq 1$, on ait :

$$(3.31) \quad \sup_{s \leq t(x,y) \in K} \sum_{i=2}^4 I_{i,t,\eta}(\varepsilon', \{s\}, x, y) \leq C(\varepsilon', \eta) t^2.$$

Preuve : Rappelons que $g_{\varepsilon'}(z, z')$ est borné par $C(\varepsilon')$.

On en déduit que :

$$(3.32) \quad \begin{aligned} I_{2,t,\eta}(\varepsilon', \{s\}, x, y) + I_{4,t,\eta}(\varepsilon', \{s\}, x, y) &\leq \\ &\leq C(\varepsilon') \int_{|z-y| > \eta} p_{t-s}(\varepsilon', \emptyset, z, y) dz \leq C(\varepsilon', \eta) t^2 \end{aligned}$$

si ε' est assez petit par rapport à η , d'après la proposition (I.3).

On en déduit aussi que :

$$(3.33) \quad \begin{aligned} I_{3,t,\eta}(\varepsilon', \{s\}, x, y) &\leq C(\varepsilon') P\{|x_s(\varepsilon, \emptyset, x) - x| \geq \eta\} \\ &\int_{|z-y| \leq \eta} p_{t-s}(\varepsilon', \emptyset, z, y) dy. \end{aligned}$$

Or la deuxième intégrale est bornée; d'après la majoration exponentielle,

$$(3.34) \quad P\{|x_s(\varepsilon', \emptyset, x) - x| > \eta\} \leq C(\varepsilon', \eta) t^2$$

si ε' est assez petit par rapport à η . D'où le lemme.

On peut en déduire maintenant le résultat suivant :

Proposition III.5 : Supposons que $C\gamma$ est inversible et que g vérifie (1.8).

Soit un compact K de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ne rencontrant pas la diagonale.

Alors :

$$(3.35) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \sup_{s \leq t(x,y) \in K} p_t(\varepsilon, \{s\}, x, y) \leq \frac{g(x, y)}{\int \phi_\varepsilon(z) g(z) dz}$$

si ε est assez petit.

Preuve : Soit $\varepsilon_0 > 0$. Si on utilise le lemme précédent, il suffit de montrer que l'on peut choisir η assez petit et ε assez petit pour que uniformément sur K

$$(3.36) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \sup_{s \leq t} p_t(\varepsilon, \{s\}, x, y) \leq \frac{g(x, y) + \varepsilon_0}{\int \phi_\varepsilon(z) g(z) dz}.$$

C'est exactement la même preuve que (2.9).

Nous pouvons maintenant donner la conclusion de cette partie :

Proposition III.6 : Supposons que C_Y est inversible et que g vérifie (1.8).

Alors uniformément sur K , on a :

$$(3.37) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{p_t(x, y)}{t} \leq g(x, y).$$

Preuve : D'après les propositions III.2 et III.3, on a si ε est assez petit :

$$(3.38) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \sup_{(x, y)} \frac{p_t(0, \varepsilon, x, y) + p_t(2, \varepsilon, x, y)}{t} = 0.$$

Par ailleurs il résulte de (3.35) et de (3.28) que :

$$(3.39) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{p_t(0, \varepsilon, x, y)}{t} \leq g(x, y)$$

uniformément sur K , si ε est assez petit.

APPENDICE : ETUDE DU FLOT RETOURNE

Considérons un processus à accroissements indépendants z_t à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Supposons qu'il soit la somme compensée de ses sauts, et, afin de simplifier, qu'il soit de carré intégrable. Notons $\mu(z)$ sa mesure de Lévy ([J]). Supposons qu'elle soit à support compact dans $\mathbb{R}^p$.

Fixons $t_0 > 0$.

Considérons le processus $z'_t = z_{t_0-t} - z_{t_0}$ défini pour $0 \leq t \leq t_0$. Puisque les trajectoires de z_t sont continues à droite et limitées à gauche, celles de z'_t sont continues à gauche et limitées à droite.

Régularisons les trajectoires de z'_t de façon à ce qu'elles soient continues à droite et limitées à gauche.

Notons $\tilde{z}_t$ le processus obtenu.

$\tilde{z}_t$ est la somme compensée de ses sauts, et est de carré intégrable. De plus sa mesure de Lévy $\tilde{\mu}$ construite à partir de sa filtration naturelle vérifie :

$$(A.1) \quad \int f(z) d\tilde{\mu}(z) = \int f(-z) d\mu(z).$$

Introduisons une application $C^\infty \gamma(x, z)$ de source $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, dont les dérivées de tout ordre en $x \in \mathbb{R}^d$ et $z \in \text{Supp } \mu$ sont bornées.

Notons H_z l'application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$

$$(A.2) \quad x \rightarrow x + \gamma(x, z).$$

Supposons que z appartienne au support de μ .

Pour que H_z soit un difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, il suffit que l'on ait :

$$(A.3) \quad \inf_{z \in \text{Supp } \mu, x \in \mathbb{R}^d} \left| \det \left[I + \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, z) \right] \right| > 0.$$

$H_z(x)$ et $H_z^{-1}(x)$ dépendent de façon C^∞ de z et x .

Leurs dérivées de tout ordre sont bornées. De plus $H_0(x) = x$ et

$$(A.4) \quad \frac{\partial}{\partial z} H_0(x) - \frac{\partial}{\partial z} H_0^{-1}(x) = 0.$$

Comme μ est une mesure de Lévy à support compact, il résulte de (A.4) que le champ de vecteur $\tilde{X}_0$ défini par :

$$(A.5) \quad \tilde{X}_0(x) = \int (H_z(x) - H_z^{-1}(x)) d\mu(z) - X_0(x)$$

est C^∞ , de dérivées de tout ordre bornées.

De plus, posons si z est dans le support de $\tilde{\mu}$:

$$(A.6) \quad \tilde{\gamma}(x, z) = H_z^{-1}(x) - x.$$

$\tilde{\gamma}$ dépend de façon C^∞ de $x \in \mathbb{R}^d$ et $z \in \text{Supp } \tilde{\mu}$. Elle se prolonge en une application C^∞ de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$. De plus les dérivées de tout ordre de $\tilde{\gamma}$ en $x \in \mathbb{R}^d$ et $z \in \text{Supp } \tilde{\mu}$ sont bornées.

Enfin, si $\gamma(x, 0) = 0$, on a aussi $\tilde{\gamma}(x, 0) = 0$.

Introduisons les deux équations différentielles stochastiques :

$$(A.7) \quad x_t(x) = x + \sum_{s \leq t}^c \gamma(x_{s-}(x), \Delta z_s) + \int_0^t X_0(x_s(x)) ds$$

$$(A.7) \quad \tilde{x}_t(x) = x + \sum_{s \leq t}^c \tilde{\gamma}(\tilde{x}_{s-}(x), \Delta \tilde{z}_s) + \int_0^t \tilde{X}_0(\tilde{x}_s(x)) ds.$$

Comme γ vérifie (A.3), et comme X_0 et γ ont des dérivées de tout ordre bornées, $x_t(x)$ possède un flot stochastique $\psi_t(x)$, pour $t \leq t_0$.

De plus les dérivées de tout ordre de $\tilde{\gamma}$ en $x \in \mathbb{R}^d$, $z \in \text{Supp } \tilde{\mu}$ sont bornées.

$$(A.7) \quad \inf_{z \in \text{Supp } \tilde{\mu}, x \in \mathbb{R}^d} \left| \det \left[I + \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial x}(x, z) \right] \right| =$$

$$\inf_{z \in \text{Supp } \tilde{\mu}, x \in \mathbb{R}^d} \left| \det \left[\frac{\partial H_z^{-1}}{\partial x}(x) \right] \right| > 0.$$

Enfin, les dérivées de tout ordre de $\tilde{X}_0$ sont bornées.

Donc (A.7) possède un flot stochastique $\tilde{\Psi}_t(x)$ pour $t \leq 0$.

Théorème A.1 : Il existe un ensemble de probabilité 1 tel que pour tout x :

$$(A.8) \quad \Psi_{t_0}(\tilde{\Psi}_{t_0}(x)) = \tilde{\Psi}_{t_0}(\Psi_{t_0}(x)) = x.$$

Preuve : Considérons un réel $\varepsilon > 0$. Introduisons le processus $z_s(\varepsilon)$ défini par :

$$(A.9) \quad z_s(\varepsilon) = \sum_{u \leq s}^c 1_{[\varepsilon, \infty[}(|\Delta z_s|) \Delta z_s.$$

Introduisons le processus $\tilde{z}_s(\varepsilon)$ construit à partir de $z_s(\varepsilon)$ par le procédé donné au début de l'appendice. $\tilde{X}_0$ est transformé en $\tilde{X}_0(\varepsilon)$:

$$(A.10) \quad \tilde{X}_0(\varepsilon) = \int_{|z| \geq \varepsilon} (H_z(x) - H_z^{-1}(x)) d\mu(z) - X_0(x).$$

Considérons les équations (A.7)(ε) et (A.7)(ε) correspondantes.

Elles possèdent des flots stochastiques $\Psi_t(\varepsilon, x)$ et $\tilde{\Psi}_t(\varepsilon, x)$.

De plus, il existe un ensemble de probabilité 1 tel que pour tout x , tout $t \leq t_0$, on ait :

$$(A.11) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi_t(\varepsilon, x) = \Psi_t(x)$$

$$(A.12) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\Psi}_t(\varepsilon, x) = \tilde{\Psi}_t(x).$$

Donc il suffit de montrer que :

$$(A.13) \quad \Psi_{t_0}(\varepsilon, \tilde{\Psi}_{t_0}(\varepsilon, x)) = \tilde{\Psi}_{t_0}(\varepsilon, \Psi_{t_0}(\varepsilon, x)) = x$$

pour montrer (A.8).

Or $z_s(\varepsilon)$ et $\tilde{z}_s(\varepsilon)$ ne possèdent qu'un nombre fini de sauts. On peut donc résoudre les équations (A.7)(ε) et (A.7)(ε) trajectoires par trajectoires, pour en déduire (A.13), l'adjonction dans $\tilde{X}_0(\varepsilon)$ du terme intégré provenant des compensations.

BIBLIOGRAPHIE

- [B] J.M. BISMUT : Calcul des variations stochastiques et processus de sauts. Z.W. 63 (147-235) (1983).
- [B.G.J] K. BICHTLER - GRAVEREAUX - J. JACOD : Malliavin calculus for processes with jumps (à paraître).
- [F.W] M.I. FREIDLIN - A.D. WENTZELL : Random perturbations of dynamical systems. Grund. Math. Wis. n°260 (1984) Berlin - Springer.
- [I.W] N. IKEDA - S. WATANABE : Stochastic differential equations and diffusion processes - Amsterdam : North-Holland (1981).
- [J] J. JACOD : Calcul stochastique et problème des martingales. Lecture Notes in Math. n°714 Berlin - Springer (1979).
- [K.S] S. KUSUOKA - D.W. STROOCK : Applications of the Malliavin calculus, Part II (à paraître).
- [L.1] R. LEANDRE : Thèse de 3ème cycle - Université de Besançon.
- [L.2] R. LEANDRE : Flot d'une équation différentielle stochastique avec semi-martingale directrice discontinue. Séminaire de probabilités n° XIX (271-275), Lecture Notes in Math. n°1123 Berlin - Springer (1984).
- [L.M] J.P. LEPELTIER - R. MARCHAL : Problèmes de martingales associées à un opérateur integro différentiel - Ann. I.H.P. B. 12 43.103 (1976).
- [M] P.A. MEYER : Flot d'une équation différentielle stochastique. Séminaire de Probabilités n° XV (103-117), Lecture Notes in Math. n°850 Berlin - Springer (1981).
- [St] D.W. STROOCK : Some applications of stochastic calculus to partial differential equations in Ecole d'Eté de Saint-Flour pp. 267-382. Lecture Notes in Math. n°976 Berlin - Springer (1983).