SONIA FOURATI
ÉRIK LENGLART

Tribus homogènes et commutation de projections

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p. 276-288
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__276_0>

TRIBUS HOMOGENES ET COMMUTATION DE PROJECTIONS

par Sonia Fourati et Erik Lenglart

INTRODUCTION par C. Dellacherie

Puisque le hasard permet pour une fois au dactylographe de prendre la plume, je ne peux résister à la tentation. Dans sa thèse de 3e cycle dirigée par J. Azéma et E. Lenglart, S. Fourati a exposé sa belle découverte, une unification de la théorie générale des processus de Meyer [3] et de celle obtenue par retournement du temps par Azéma [2], en mettant à profit la notion de tribu de Meyer de Lenglart [7], et ses applications à la théorie des processus de Markov. L'article qui suit reprend, avec des aménagements et des améliorations, l'exposé de cet apogée de la théorie générale des processus, y compris le traitement unifié qu'il permet des problèmes de commutation de projections initiés par Azéma [2],[8] et Atkinson [1],[10]. Un second article de Fourati sera consacré aux applications à la théorie des processus de Markov.

La théorie générale des processus "classique" s'est imposée, au fil des années, comme un outil indispensable dans l'étude des processus de Markov indexés par $\mathbb{R}_+$. Maintenant que celle-ci fait aussi intervenir, par le biais du théorème de Kuznetsov, des processus indexés par $\mathbb{R}$, je ne serais pas étonné que la théorie présentée ici se révèle fort utile. Mais, laissons la parole aux auteurs.

TRIBUS HOMOGENES

La théorie des processus habituelle repose essentiellement sur les concepts de tribus prévisible ou optionnelle, ou, plus généralement, sur celui de <u>tribu de Meyer</u>, tribu sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ engendrée par des processus càdlàg et les processus déterministes, et stable par arrêt aux temps constants. En théorie des processus de Markov homogènes, l'opération d'arrêt aux temps constants détruit l'homogénéité, et c'est l'opérateur de translation qui prédomine. Nous allons, dans cette première section, exposer un cadre général recouvrant à la fois les tribus homogènes classiques et les tribus de Meyer.

Par raison de symétrie passé/futur, il est naturel de se placer ici sur $\mathbb{R}\times\Omega$. Etant donné $s\in\mathbb{R}$ et X un processus défini sur $\mathbb{R}$, nous noterons $\theta_s(X)$ le processus $(t,\omega)\to X_{t+s}(\omega)$.

DEFINITION 1.1.- <u>On appelle</u> tribu homogène du passé (<u>resp</u> du futur) <u>toute tribu $\underline{\underline{H}}$ sur</u> $\mathbb{R}\times\Omega$

- <u>engendrée par des processus càdlàg</u> (<u>resp</u> <u>càglàd</u>)
- <u>stable par translation vers le passé</u> (<u>resp vers le futur</u>) : pour tout $s\leq 0$ (resp $s\geq 0$) et tout processus $\underline{\underline{H}}$-mesurable X, le processus $\theta_s(X)$ est encore $\underline{\underline{H}}$-mesurable.

Par la suite, on réservera la notation $\underline{\underline{H}}$ à une tribu (homogène) du passé et on écrirera $\hat{\underline{\underline{H}}}$ une tribu (homogène) du futur. Et, comme la transformation de t en -t échange les rôles passé/futur, on privilégiera l'étude des tribus du passé. Pour situer ces tribus, montrons qu'il ne leur manque éventuellement que de "contenir" les processus déterministes (i.e. la tribu $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\times\{\emptyset,\Omega\}$) pour être des tribus de Meyer. Ceci jouera un rôle fondamental.

THEOREME 1.2.- <u>Soit $\underline{\underline{H}}$ une tribu homogène du passé</u>. <u>La tribu $\underline{\underline{H}}\vee\underline{\underline{D}}$ est une tribu de Meyer sur</u> $\mathbb{R}\times\Omega$.

<u>D</u>/ Il suffit de montrer que cette tribu est stable par arrêt aux temps constants. Soient X un processus càdlàg $\underline{\underline{H}}$-mesurable et $t\in\mathbb{R}$. On a

$$X^t = X1_{]\!]-\infty,t]\!]} + X_t 1_{]\!]t,+\infty[\![}$$

et il suffit donc de montrer que $X_t 1_{]\!]t,+\infty[\![}$ est $\underline{\underline{H}}\vee\underline{\underline{D}}$-mesurable. Posons

$$Y^n = \sum_{k\geq 0} \theta_{-k/n}(X) 1_{]\!]t+\frac{k}{n},t+\frac{k+1}{n}]\!]}$$

Il est clair que Y^n est $\underline{\underline{H}}\vee\underline{\underline{D}}$-mesurable, et que, par continuité à droite, Y^n converge simplement vers $X_t 1_{]\!]t,+\infty[\![}$. On termine la démonstration par un argument de classe monotone.

On voit donc qu'<u>une tribu homogène du passé est une tribu de Meyer</u> (<u>sur</u> $\mathbb{R}\times\Omega$) <u>si et seulement si elle "contient" les processus déterministes.</u> Pour bien comprendre le rôle des processus déterministes, considérons l'exemple suivant où X est un processus càdlàg. La plus petite tribu de Meyer rendant X mesurable est la tribu $\underline{\underline{A}}^X$ engendrée par le processus $(t,\omega) \to (t,X^t_{\bullet}(\omega))$; la plus petite tribu homogène du passé rendant X mesurable est la tribu $\underline{\underline{H}}^X$ engendrée par le processus $(t,\omega) \to \theta_t(X)^0_{\bullet}(\omega)$. Un processus Z est $\underline{\underline{A}}^X$-mesurable (resp $\underline{\underline{H}}^X$-mesurable) ssi il existe une fonction mesurable f telle que $Z_t = f(t,X^t_{\bullet})$ (resp $Z_t = f(\theta_t(X)^0_{\bullet})$ pour tout t. On peut aussi voir que la tribu $\underline{\underline{A}}^X$ est la tribu homogène $\underline{\underline{H}}^{\tilde{X}}$ où $\tilde{X}_t = (t,X_t(\omega))$.

Comme dans la théorie habituelle, il nous faut introduire les analogues des tribus prévisible et optionnelle associées à notre tribu homogène du passé $\underline{\underline{H}}$ ou du futur $\hat{\underline{\underline{H}}}$. Si $\underline{\underline{E}}$ est une tribu sur $\mathbb{R}\times\Omega$, nous noterons $\theta_t(\underline{\underline{E}})$ la tribu engendrée, pour $t\in\mathbb{R}$, par les processus $\theta_t(X)$ où X décrit les processus $\underline{\underline{E}}$-mesurables. La famille de tribus $(\theta_t(\underline{\underline{H}}))_{t\in\mathbb{R}}$

est croissante tandis que la famille $(\theta_t(\hat{\underline{\underline{H}}}))_{t\in\mathbb{R}}$ est décroissante.

DEFINITION 1.3.- Soit $\underline{\underline{H}}$ une tribu homogène du passé.

La tribu du passé strict de $\underline{\underline{H}}$, notée $\underline{\underline{S}}$, est égale à $\bigvee_{t<0} \theta_t(\underline{\underline{H}})$

La tribu progressive de $\underline{\underline{H}}$, notée $\underline{\underline{H}}^+$, est égale à $\bigcap_{t>0} \theta_t(\underline{\underline{H}})$

La tribu du passé large de $\underline{\underline{H}}$, notée $\underline{\underline{L}}$, est égale à la tribu engendrée par les processus càdlàg $\underline{\underline{H}}$-progressifs.

On a bien entendu $\underline{\underline{S}}\subset\underline{\underline{H}}\subset\underline{\underline{L}}\subset\underline{\underline{H}}^+$; si X est làdlàg $\underline{\underline{H}}$-mesurable, alors X_- est $\underline{\underline{S}}$-mesurable et X_+ est $\underline{\underline{L}}$-mesurable. Dans le cas d'une tribu de Meyer $\underline{\underline{A}}$, de filtration $(\underline{\underline{A}}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ (i.e. $\underline{\underline{A}}_t = \sigma(X_t$, X $\underline{\underline{A}}$-mesurable), $\underline{\underline{S}}$ est la tribu prévisible de $(\underline{\underline{A}}_t)$ et $\underline{\underline{L}}$ est la tribu optionnelle de $(\underline{\underline{A}}_{t+})$.

On obtient évidemment par symétrie $(t \to -t)$ les notions analogues pour une tribu homogène du futur $\hat{\underline{\underline{H}}}$:

$\hat{S} = \bigvee_{t>0} \theta_t(\hat{\underline{\underline{H}}})$ est la tribu du futur strict de $\hat{\underline{\underline{H}}}$ (les "coprévisibles")

$\hat{\underline{\underline{H}}}^- = \bigcap_{t<0} \theta_t(\hat{\underline{\underline{H}}})$ est la tribu coprogressive de $\hat{\underline{\underline{H}}}$

$\hat{\underline{\underline{L}}}$ = la tribu engendrée par les processus càglàd coprogressifs est la tribu du futur large de $\hat{\underline{\underline{H}}}$ (les "cooptionnels"). On a $\hat{\underline{\underline{S}}}\subset\hat{\underline{\underline{H}}}\subset\hat{\underline{\underline{L}}}\subset\hat{\underline{\underline{H}}}^-$.

TEMPS D'ARRET, CO-TEMPS D'ARRET

DEFINITION 1.4.- Si $\underline{\underline{H}}$ est une tribu homogène du passé, on appelle temps d'arrêt de $\underline{\underline{H}}$ toute application T de Ω dans $[-\infty,+\infty]$ telle que l'intervalle stochastique $[\![T,+\infty[\![$ (sur $\mathbb{R}\times\Omega$) appartienne à $\underline{\underline{H}}$.

On note $\mathbb{T}(\underline{\underline{H}})$ l'ensemble des t.a. de $\underline{\underline{H}}$. $\mathbb{T}(\underline{\underline{H}})$ est stable par sup et inf finis, contient $-\infty$ et $+\infty$, et est stable par limite croissante et par limite stationnaire ; par translation, on voit que T+t est dans $\mathbb{T}(\underline{\underline{H}})$ pour $T\in\mathbb{T}(\underline{\underline{H}})$ et $t\geq 0$. Par ailleurs, on voit que $]\!]T,+\infty[\![\,\in\underline{\underline{H}}$ équivaut à $]\!]T,+\infty[\![\,\in\underline{\underline{S}}$, et aussi à $[\![T,+\infty[\![\,\in\underline{\underline{L}}$ et donc au fait que T est un temps d'arrêt de $\underline{\underline{L}}$. Nous appellerons t.a. larges de $\underline{\underline{H}}$ les t.a. de $\underline{\underline{L}}$.

Nous laissons au lecteur les énoncés équivalents pour le futur, la notion analogue à celle de temps d'arrêt de $\underline{\underline{H}}$ étant celle de cotemps d'arrêt de $\hat{\underline{\underline{H}}}$ (i.e. $]\!]-\infty,T]\!]\,\in\hat{\underline{\underline{H}}}$). Nous continuerons par la suite à privilégier l'étude d'une tribu homogène du passé $\underline{\underline{H}}$.

THEOREME 1.5.- Si T est une t.a. large de $\underline{\underline{H}}$ et X est $\underline{\underline{H}}$-mesurable, alors $X^T 1_{\{T>-\infty\}}$ est encore $\underline{\underline{H}}$-mesurable.

D/ On a $\mathbb{R}\times\{T=-\infty\} = \bigcap_{s\in\mathbb{Q}_+}]\!]T+s,+\infty[\![$, ce qui prouve que le processus constant $1_{\{T>-\infty\}}$ est $\underline{\underline{H}}$-mesurable. On peut alors supposer que $X_{-\infty} = 0$ et, par classe monotone, supposer que X est càdlàg. On a alors

$$X^T = X 1_{]\!]-\infty,T]\!]} + X_T 1_{]\!]T,+\infty[\![}$$

La démonstration est alors analogue à celle du théorème 1.2 en y remplaçant t par T.

Voici le théorème fondamental sur les temps d'arrêt. Nous supposons Ω équipé d'une probabilité P et d'une tribu $\underline{\underline{F}}$ P-complète, et $\underline{\underline{H}}$ incluse dans $\underline{\underline{B}}(\mathbf{R})\times\underline{\underline{F}}$.

THEOREME 1.6.- <u>Le début de tout ensemble $\underline{\underline{H}}$-progressif est p.s. égal à un temps d'arrêt large de $\underline{\underline{H}}$ (i.e. un t.a. de $\underline{\underline{L}}$).</u>

<u>D/</u> Si X est un processus, nous noterons $\bar{X}$ le processus défini sur $]0,+\infty[\times(\mathbf{R}\times\Omega)$ par $\bar{X}_s(t,\omega)=X_{t-s}(\omega)$. Si, pour un $\varepsilon>0$, X est un processus càdlàg $\Theta_\varepsilon(\underline{\underline{H}})$-mesurable, il est clair que, pour tout $s>\varepsilon$, le processus $\bar{X}_s$ est $\underline{\underline{S}}$-mesurable ; donc, le processus $\bar{X}$ restreint à $]\varepsilon,+\infty[\times(\mathbf{R}\times\Omega)$ est $\underline{\underline{B}}(]\varepsilon,+\infty[)\times\underline{\underline{S}}$-mesurable. Par classe monotone, cela s'étend à tout processus X $\Theta_\varepsilon(\underline{\underline{H}})$-mesurable ; par conséquent, si X est $\underline{\underline{H}}$-progressif, alors $\bar{X}$ est $\underline{\underline{B}}(]0,+\infty[)\times\underline{\underline{S}}$-mesurable.

Soit maintenant $A\varepsilon\underline{\underline{H}}^+$ et $D_A(\omega)=\inf\{t : (t,\omega)\varepsilon A\}$. D'après ce qui précède, l'ensemble $\bar{A}=\{(s,t,\omega)\varepsilon\,]0,+\infty[\times(\mathbf{R}\times\Omega) : (t-s,\omega)\varepsilon A\}$ appartient à $\underline{\underline{B}}(]0,+\infty[)\times\underline{\underline{S}}$ et donc $]\!]D_A,+\infty[\![$, projection de $\bar{A}$ sur $\mathbf{R}\times\Omega$, est $\underline{\underline{S}}$-analytique.

Arrivé à ce point, nous allons utiliser un outil "essentiel" (bien que caché au "coeur" de la théorie) : <u>la régularisation pour la topologie essentielle</u>. Nous renvoyons le lecteur à [3] pour cette notion et ses propriétés. Considérons la mesure $\lambda\times P$ sur $(\mathbf{R}\times\Omega,\underline{\underline{M}})$ où λ désigne la mesure de Lebesgue et $\underline{\underline{M}}$ la tribu $\underline{\underline{B}}(\mathbf{R})\times\underline{\underline{F}}$. Il existe $B\varepsilon\underline{\underline{S}}$ tel que $\{1_{]\!]D_A,+\infty[\![}\neq 1_B\}$ soit $\lambda\times P$-négligeable. D'après le théorème de Fubini, il existe alors un ensemble négligeable N de $\underline{\underline{F}}$ tel que, pour $\omega\notin N$, on ait $1_{]\!]D_A,+\infty[\![}(t,\omega)=1_B(t,\omega)$ pour presque tout t. Posons alors

$$Z_t(\omega) = \operatorname*{sup\,ess}_{s<t} 1_B(s,\omega)$$

On voit sans peine que le processus Z est $\underline{\underline{S}}$-mesurable, continu à gauche et à valeurs dans $\{0,1\}$. Pour $\omega\notin N$, $Z.(\omega)$ est λ-p.p. égal à $1_B(.,\omega)$ et donc à $1_{]\!]D_A,+\infty[\![}$. Soit alors $T=\inf\{t : Z_t=1\}$: $]\!]T,+\infty[\![$, égal à $\{Z=1\}$, appartient à $\underline{\underline{S}}$, et, pour $\omega\notin N$, on a $]T(\omega),+\infty[\,=\,]D_A(\omega),+\infty[$. Finalement, on a $T=D_A$ P-p.s..

Voici un autre résultat fondamental, mais de démonstration très classique (elle repose sur le fait que T est un t.a. de $\underline{\underline{H}}$ ssi on a $]\!]T,+\infty[\![\,\varepsilon\underline{\underline{S}}$ et $[\![T]\!]\varepsilon\underline{\underline{H}}$).

THEOREME 1.7.- <u>Soit</u> X <u>un processus càdlàg $\underline{\underline{H}}$-mesurable à valeurs dans un espace métrisable</u> E <u>et</u> F <u>un fermé de</u> E(*). <u>Alors</u>

$$T = \inf\{t : X_t\varepsilon F \text{ ou } X_{t-}\varepsilon F\}$$

<u>est un temps d'arrêt de $\underline{\underline{H}}$.</u>

(*) en considérant $d(X_t,F)$, où d est une distance définissant la topologie de E, on se ramène au cas où $E=\mathbf{R}_+$ et $F=\{0\}$!

FILTRATION ET TRIBU DE SECTION ASSOCIEES A $\underline{\underline{H}}$

Etant donné une tribu homogène du passé $\underline{\underline{H}}$, nous désignerons par $\underline{\underline{H}}_{-\infty}$ la tribu sur Ω engendrée par les v.a. $X_{-\infty} = \lim_{t\to-\infty} X_t$ où X parcourt les processus $\underline{\underline{H}}$-mesurable ayant une limite en $-\infty$, et par $\underline{\underline{H}}_{+\infty}$ la tribu sur Ω engendrée par les v.a. de la forme $X_T 1_{\{T\in\mathbb{R}\}}$ où X parcourt les processus $\underline{\underline{H}}$-mesurables et T les t.a. de $\underline{\underline{H}}$. Un processus X défini sur $\overline{\mathbb{R}}$ sera alors dit $\underline{\underline{H}}$-mesurable si $X_{-\infty}$ (resp $X_{+\infty}$) est $\underline{\underline{H}}_{-\infty}$- (resp $\underline{\underline{H}}_{+\infty}$-) mesurable et si $X_{|\mathbb{R}\times\Omega}$ est $\underline{\underline{H}}$-mesurable.

DEFINITION 1.8.- Si T est un temps (i.e. une v.a. à valeurs dans $[-\infty,+\infty]$), on appelle tribu des évènements antérieurs à T la tribu $\underline{\underline{H}}_T$ sur Ω engendrée par les v.a. X_T où X parcourt les processus définis sur $\overline{\mathbb{R}}$ et $\underline{\underline{H}}$-mesurables.

On voit facilement que, si S et T sont des t.a. larges de $\underline{\underline{H}}$ avec $S\leq T$, on a $\underline{\underline{H}}_S\subset\underline{\underline{H}}_T$. Par ailleurs, du fait que, pour X $\underline{\underline{H}}$-mesurable et $T\in\mathbb{T}(\underline{\underline{H}})$, $X_T 1_{[\![T,+\infty[\![}$ est $\underline{\underline{H}}$-mesurable si $X_{-\infty}$ existe (démonstration analogue à celle du th.1.2), on voit que l'on a $A\in\underline{\underline{H}}_T$ ssi $T_A\in\mathbb{T}(\underline{\underline{H}})$ pour tout $T\in\mathbb{T}(\underline{\underline{H}})$. Enfin, pour $S\in\mathbb{T}(\underline{\underline{L}})$ et T quelconque, on a $\{S<T\}\in\underline{\underline{H}}_T$; pour $S\in\mathbb{T}(\underline{\underline{H}})$, on a aussi $\{S=T\}\in\underline{\underline{H}}_T$.

DEFINITION 1.9.- Nous appellerons tribu de section la tribu $\underline{\underline{H}}^s$ sur $\mathbb{R}\times\Omega$ engendrée par les intervalles stochastiques $[\![T,+\infty[\![$, T t.a. de $\underline{\underline{H}}$.

Il est clair que $\underline{\underline{H}}^s$ est une tribu homogène du passé incluse dans $\underline{\underline{H}}$. Si $\underline{\underline{A}}$ est une tribu de Meyer, on sait que $\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{A}}^s$. Dans notre cadre, on peut avoir $\underline{\underline{H}}\neq\underline{\underline{H}}^s$.

THEOREME 1.10.- La tribu $\underline{\underline{H}}^s$ est engendrée par les processus càdlàg $\underline{\underline{H}}$-mesurables ayant une limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$) en $-\infty$.

D/ Il est clair que $\underline{\underline{H}}^s$ est engendrée par de tels processus. Soit maintenant X un processus de ce type. Quitte à considérer $\operatorname{Arctg} X$, on peut supposer la limite $X_{-\infty}$ finie. Le processus constamment égal à $X_{-\infty}$ est $\underline{\underline{H}}$-mesurable (car égal à $\lim_n \theta_{-n}(X)$). Montrons que X est $\underline{\underline{H}}^s$-mesurable. Soit $\varepsilon>0$; posons $T_0^\varepsilon=-\infty$, puis, par récurrence

$$T_{n+1}^\varepsilon = \inf\{t : |X_t - X_{T_n}| \geq \varepsilon \text{ ou } |X_{t-} - X_{T_n}| \geq \varepsilon\}$$

Les T_n^ε sont des t.a. de $\underline{\underline{H}}$ (th.1.7), et on a $|X-X^\varepsilon|\leq\varepsilon$ où on a posé

$$X^\varepsilon = \sum X_{T_n^\varepsilon} 1_{[\![T_n^\varepsilon,T_{n+1}^\varepsilon[\![}$$

On est donc ramené aux processus de la forme $X_T 1_{[\![T,+\infty[\![}$, et finalement aux processus $1_A 1_{[\![T,+\infty[\![} = 1_{[\![T_A,+\infty[\![}$ avec $A\in\underline{\underline{H}}_T$.

COROLLAIRE 1.11.- On a $\underline{\underline{H}}=\underline{\underline{H}}^s$ ssi $\underline{\underline{H}}$ est engendrée par des processus càdlàg ayant une limite en $-\infty$.

Ce résultat peut encore s'interpréter en disant qu'on a $\underline{\underline{H}}=\underline{\underline{H}}^s$ ssi

$\underline{\underline{H}}$ est engendrée par des processus càdlàg transients dans le passé. On retrouve là, dans le passé, ce que Meyer appelle hypothèse de transience dans [8].

TEMPS DE NAISSANCE, INTERVALLE DE VIE

Nous supposons $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ complet et $\underline{\underline{H}}$ incluse dans $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\times\underline{\underline{F}}$. La tribu $\underline{\underline{N}}$ des ensembles évanescents mesurables est une tribu homogène et on appellera P-complétée de $\underline{\underline{H}}$ la tribu $\underline{\underline{H}}^P = \underline{\underline{H}}\vee\underline{\underline{N}}$, qui est la tribu des processus mesurables indistinguables d'un processus $\underline{\underline{H}}$-mesurable. Un t.a. de $\underline{\underline{H}}^P$ est un temps p.s. égal à un t.a. de $\underline{\underline{H}}$, et réciproquement. Enfin, si T est un temps, on a $\underline{\underline{H}}^P_T = \underline{\underline{H}}_T\vee\underline{\underline{N}}_{\underline{\underline{F}}}$ où $\underline{\underline{N}}_{\underline{\underline{F}}}$ est la tribu engendrée par les éléments négligeables de $\underline{\underline{F}}$.

Nous supposerons désormais que $\underline{\underline{H}}$ est P-complète, ce qui ne nuira pas à la généralité mais rendra les énoncés plus simples (débarrassés des "p.s.", "indistinguables", etc).

DEFINITION 1.12.- Nous dirons qu'un temps T est $\underline{\underline{H}}$-accessible s'il existe une suite (S_n) de t.a. de $\underline{\underline{H}}$ telle que $P[\bigcup_n\{S_n = T < \infty\}] = P[T < +\infty]$.

Nous dirons qu'un temps T est totalement $\underline{\underline{H}}$-inaccessible si, pour tout t.a. S de $\underline{\underline{H}}$, on a $P[S = T < \infty] = 0$.

Soit T un temps, $A = \operatorname{ess\,sup}\{\bigcup_n\{T_n = T < \infty\}\ ;\ (T_n)$ suite de t.a. de $\underline{\underline{H}}\}$ et $B = \{T<\infty\}\cap A^c$: on a clairement $A\in\underline{\underline{F}}_T$, T_A $\underline{\underline{H}}$-accessible (on le notera T_h) et T_B totalement $\underline{\underline{H}}$-inaccessible (on le notera T_i).

DEFINITION 1.13.- Nous appellerons temps de naissance de $\underline{\underline{H}}$ tout t.a. large α de $\underline{\underline{H}}$ vérifiant $\alpha = \operatorname{ess\,inf}\{T\in\mathbb{T}(\underline{\underline{H}})\ :\ T > -\infty\}$.

On peut démontrer que α_h est un t.a. de $\underline{\underline{H}}$ et que l'intervalle $[\![\alpha_h]\!]\cup]\!]\alpha,+\infty[\![$ est le plus grand intervalle stochastique $\underline{\underline{H}}$-mesurable inclus dans $[\![\alpha,+\infty[\![$ (à l'indistinguabilité près). Nous l'appellerons l'intervalle de vie de $\underline{\underline{H}}$ et le noterons $V(\underline{\underline{H}})$.

Il est clair que $V(\underline{\underline{L}}) = [\![\alpha,+\infty[\![$. On peut démontrer (cf [5]) qu'il existe une suite (T_n) de t.a. de $\underline{\underline{H}}$ telle que $T_n\downarrow\alpha$, $T_n > -\infty$ et que $V(\underline{\underline{H}}) = \bigcup_n[\![T_n,+\infty[\![$. On voit facilement qu'on a $V(\underline{\underline{H}})\in\underline{\underline{H}}^s$ et $\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{H}}^s$ sur $V(\underline{\underline{H}})$.

THEOREME 1.14.- Soit X un processus $\underline{\underline{H}}$-mesurable ayant une limite en $-\infty$. Alors X est constant en t sur $V(\underline{\underline{H}})^c$.

D/ Notons $X_{-\infty}$ la limite de X_t, que nous pouvons supposer finie. Soit $\varepsilon>0$ et $T = \inf\{t : |X_t - X_{-\infty}| \geq \varepsilon\}$. On a $T\in\mathbb{T}(\underline{\underline{L}})$ et donc $T+\frac{1}{n}\in\mathbb{T}(\underline{\underline{H}})$. On en déduit que $]\!]\alpha,+\infty[\![$ contient $]\!]T,+\infty[\![$. Par suite, on a $X_t(\omega) = X_{-\infty}(\omega)$ pour $t<\alpha(\omega)$. Posons $Y = X_{-\infty}1_{V(\underline{\underline{H}})^c} + X1_{V(\underline{\underline{H}})}$. Les processus Y et X ne diffèrent qu'en un instant au plus (sur α^-). Posons $S = \inf\{t : X_t \neq Y_t\}$. On a $\{X\neq Y\} = [\![S]\!]$, et donc $S\in\mathbb{T}(\underline{\underline{H}})$ et $S>-\infty$. Ainsi, on a $[\![S]\!]\subset V(\underline{\underline{H}})$ et donc $S = +\infty$, ce qui prouve que $X = Y$.

LES TROIS GRANDS THEOREMES

Nous allons maintenant énoncer les trois principaux théorèmes de la théorie générale des processus (section, projection, projection duale). On sait que ceux-ci sont vrais pour une tribu de Meyer (cf [7]). En fait, nous ne saurons les démontrer que sur $V(\underline{\underline{H}})^{(*)}$, et les démonstrations reposent essentiellement sur le fait que "après un t.a. de $\underline{\underline{H}}$, $\underline{\underline{H}}$ est une tribu de Meyer", que nous établissons maintenant.

THEOREME 1.15.- Soit $T\in\mathbb{T}(\underline{\underline{H}})$ tel que $T>-\infty$ et $T\not\equiv+\infty$, et $\underline{\underline{H}}_{[T}$ la tribu sur $\mathbb{R}_+\times\{T<+\infty\}$ engendrée par les processus Y de la forme $Y_t(\omega)=X_{T+t}(\omega)$ où X est $\underline{\underline{H}}$-mesurable.

1) La tribu $\underline{\underline{H}}_{[T}$ est une tribu de Meyer.
2) Un temps S est un t.a. de $\underline{\underline{H}}_{[T}$ ssi $T+S$ est un t.a. de $\underline{\underline{H}}$.
3) Si S est un t.a. de $\underline{\underline{H}}_{[T}$, alors on a $(\underline{\underline{H}}_{[T})_S=\underline{\underline{H}}_{T+S}$.

D/ La tribu $\underline{\underline{H}}_{[T}$ est engendrée par des processus càdlàg, et contient les processus déterministes car $1_{[\![t,+\infty[\![}(s)=1_{[\![T+t,+\infty[\![}(T+s)$. Vérifions la stabilité par arrêt aux temps constants. Si Y est $\underline{\underline{H}}_{[T}$-mesurable et $s\geq0$, le processus $u\to Y_{u-s}1_{[t+s,+\infty[}(u)=\theta_{-s}(X1_{[\![T+t,+\infty[\![})(T+u)$ est clairement $\underline{\underline{H}}_{[T}$-mesurable. La démonstration du th.1.2 montre alors que $X_t1_{[t,+\infty[}$ est $\underline{\underline{H}}_{[T}$-mesurable, et donc aussi X^t. Cela termine le point 1). Les points 2) et 3) sont très simples et ne nécessitent qu'une vérification.

THEOREME DE SECTION 1.16.- Soit $B\in\underline{\underline{H}}$, inclus dans $V(\underline{\underline{H}})$. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe un t.a. T de $\underline{\underline{H}}$ à valeurs dans $]-\infty,+\infty]$ tel que $[\![T]\!]\subset B$ et $P[\mathrm{proj}_\Omega(B)]\leq P[T<+\infty]+\varepsilon$.

D/ Sur $B\cap]\!]\alpha,+\infty[\![$, prenons une suite (S_n) de t.a. de $\underline{\underline{H}}$ vérifiant $S_n>-\infty$ et $S_n\downarrow\alpha$, $S_n>\alpha$ (quitte à prendre $S_n+\frac{1}{n}$). Considérons $B_n=B\cap[\![S_n,S_{n+1}[\![$ et $\underline{\underline{H}}_{[S_n}$: on est ramené au théorème de section pour les tribus de Meyer, d'où l'existence d'un t.a. T_n de $\underline{\underline{H}}$ tel que $[\![T_n]\!]$ soit inclus dans B_n et $P[\mathrm{proj}_\Omega(B_n)]$ majoré par $P[T_n<+\infty]+\varepsilon2^{-n}$. Par découpage et recollement on obtient un t.a. T' "convenanble à ε près" pour $B'=B\cap]\!]\alpha,+\infty[\![$, et il n'y a plus qu'à poser $T=T'\wedge T''$ où T'' est le t.a. de graphe $B\cap[\![\alpha_h]\!]$.

THEOREME DE PROJECTION 1.17.- Soit Z un processus mesurable borné. Il existe un unique (à l'indistinguabilité près) processus $\underline{\underline{H}}$-mesurable X, nul sur $V(\underline{\underline{H}})^c$, tel que, pour tout t.a. T de $\underline{\underline{H}}$, on ait

$$E[Z_T\,|\,\underline{\underline{H}}_T]1_{\{T\in\mathbb{R}\}}=X_T1_{\{T\in\mathbb{R}\}}$$

On dit que X est la $\underline{\underline{H}}$-projection de Z, et on le note ${}^hZ$.

D/ On procède de la même façon que pour le théorème précédent : après un t.a., on utilise le théorème analogue pour les tribus de Meyer (cf [7])

(*) hors de $V(H)$, il n'y a plus de t.a., et nous sortons de la théorie classique !

puis on procède par recollement sur $V(\underline{\underline{H}})$. Remarquons au passage que, si Z est $\underline{\underline{H}}$-mesurable, alors ${}^{h}Z = Z1_{V(\underline{\underline{H}})}$.

On voit très facilement, en se reportant aux résultats sur les tribus de Meyer, que, si Z est làdlàg, alors ${}^{h}Z$ est làdlàg et on a ${}^{\ell}(Z_+) = {}^{h}(Z_+)_+$ et ${}^{s}(Z_-) = {}^{h}(Z_-)_-$ hors de $[\![\alpha_s]\!]$, qui joue dans cette théorie le rôle du diable comme 0 dans la théorie habituelle.

DEFINITION 1.18.- 1) <u>On appelle</u> $\underline{\underline{H}}$-mesure aléatoire intégrable <u>toute mesure aléatoire mesurable</u> $\mu(\omega,ds)$ <u>finie dont le processus croissant associé</u> $M_t(\omega) = \mu(\omega,]-\infty,t])$ <u>est</u> $\underline{\underline{H}}$<u>-mesurable et tel que</u> $E[M_{+\infty}] < +\infty$.

2) <u>On appelle</u> $\underline{\underline{H}}$-mesure aléatoire σ-finie <u>toute mesure aléatoire</u> $\mu(\omega,ds)$ <u>telle qu'il existe une partition</u> $\underline{\underline{H}}$<u>-mesurable</u> (C_n) <u>de</u> $\mathbf{R}\times\Omega$ <u>de sorte que</u>, <u>pour tout</u> n, $1_{C_n}(t,\omega)\mu(\omega,dt)$ <u>soit une</u> $\underline{\underline{H}}$<u>-mesure aléatoire intégrable</u>.

En procédant de la même façon que précédemment, on obtient

THEOREME DE PROJECTION DUALE 1.19.- <u>Soit</u> μ <u>une mesure aléatoire intégrable</u>. <u>Il existe une</u> $\underline{\underline{H}}$<u>-mesure aléatoire</u> ν <u>unique</u>, <u>portée par</u> $V(\underline{\underline{H}})$, <u>telle que</u>, <u>pour tout processus mesurable borné</u> Z, <u>on ait</u>

$$E[\int {}^{h}(Z)_s\,\mu(\omega,ds)] = E[\int Z_s\,\nu(\omega,ds)]$$

<u>On dit que</u> ν <u>est la</u> $\underline{\underline{H}}$-projection duale de μ, <u>et on la note</u> μ^h.

Remarquons que, si μ est une $\underline{\underline{H}}$-mesure, alors $\mu^h = 1_{V(\underline{\underline{H}})}\mu$. D'autre part, si M désigne le processus croissant associé à μ, nous noterons M^h celui associé à μ^h et dirons encore que c'est la $\underline{\underline{H}}$-projection duale de M. On peut voir que $\Delta M^h = {}^{h}(\Delta M)$.

COMMUTATION DE PROJECTIONS

Le problème général que nous nous proposons de traiter ici est le suivant : étant données une tribu homogène du passé $\underline{\underline{H}}$ et une tribu homogène du futur $\hat{\underline{\underline{H}}}$, définies sur le même espace, à quelles conditions leurs projections commutent-elles ? Nous pouvons encore supposer que $\underline{\underline{H}}$ et $\hat{\underline{\underline{H}}}$ sont P-complètes. Par ailleurs, nous noterons $V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{H}}})$ l'intervalle stochastique $V(\underline{\underline{H}})\cap V(\hat{\underline{\underline{H}}})$.

DEFINITION 2.1.- <u>Soit</u> $V\subset\mathbf{R}\times\Omega$. <u>Nous dirons que</u> $\underline{\underline{H}}$ et $\hat{\underline{\underline{H}}}$ commutent sur V, <u>et nous noterons</u> $\underline{\underline{H}}\leftrightarrow\hat{\underline{\underline{H}}}$ sur V <u>si</u> V <u>appartient à</u> $\underline{\underline{H}}\cap\hat{\underline{\underline{H}}}$ <u>et si</u>, <u>pour tout processus mesurable borné</u> Z, <u>on a</u>, <u>à l'indistinguabilité près</u>,

$${}^{h\hat{h}}(Z)1_V = {}^{\hat{h}h}(Z)1_V$$

<u>Lorsque</u> $V = V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{H}}})$, <u>nous dirons simplement que</u> $\underline{\underline{H}}$ et $\hat{\underline{\underline{H}}}$ commutent <u>et nous noterons</u> $\underline{\underline{H}}\leftrightarrow\hat{\underline{\underline{H}}}$.

Remarquons que la condition $\underline{\underline{H}}\leftrightarrow\hat{\underline{\underline{H}}}$ équivaut à ${}^{h\hat{h}}(Z)$ et ${}^{\hat{h}h}(Z)$ sont indistinguables lorsque Z est mesurable borné (prendre $Z = 1$ pour voir que $V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{H}}})$ appartient à $\underline{\underline{H}}\cap\hat{\underline{\underline{H}}}$).

Voici le résultat fondamental de cette seconde section.

THEOREME 2.2.- *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

a) $\underline{\underline{H}}\Leftrightarrow\hat{\underline{\underline{H}}}$

b) $V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{H}}})$ *appartient à* $\underline{\underline{H}}\cap\hat{\underline{\underline{H}}}$ *et, pour tout processus* $\hat{\underline{\underline{H}}}$*-mesurable borné* X, *le processus* ${}^{h}(X)1_{V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{H}}})}$ *est* $\hat{\underline{\underline{H}}}$*-mesurable*(*).

Il est clair que a)$\Rightarrow$b). La démonstration de la réciproque passe par plusieurs points que nous énoncerons sous forme de lemmes. Nous continuons à noter $\underline{\underline{S}}$ et $\underline{\underline{L}}$ les tribus du passé strict et large associées à $\underline{\underline{H}}$, et α son temps de naissance tandis que les notations $\hat{\underline{\underline{S}}}$, $\hat{\underline{\underline{L}}}$, β correspondent aux notions analogues pour $\hat{\underline{\underline{H}}}$. Enfin, les lemmes sont énoncés sous l'hypothèse que le point b) du th.2.2 est vérifié.

LEMME 2.3.- *On a* $\underline{\underline{L}}\Leftrightarrow\hat{\underline{\underline{S}}}$ *sur* $[\![\alpha,\beta[\![$ *et* $\underline{\underline{S}}\Leftrightarrow\hat{\underline{\underline{L}}}$ *sur* $]\!]\alpha,\beta]\!]$.

d/ Remarquons que $1_{[\![\alpha,\beta[\![} = (1_{V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{H}}})})_+$ est $\underline{\underline{L}}\cap\hat{\underline{\underline{S}}}$-mesurable et que de même $1_{]\!]\alpha,\beta]\!]} = (1_{V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{H}}})})_-$ est $\underline{\underline{S}}\cap\hat{\underline{\underline{L}}}$-mesurable. Soit $\bar{X}$ un processus $\hat{\underline{\underline{S}}}$-mesurable càdlàg. Sa $\underline{\underline{L}}$-projection est encore continue à droite, et coincide sur $[\![\alpha,\beta[\![$ avec le processus ${}^{h}(\bar{X})_+$ qui est $\hat{\underline{\underline{S}}}$-mesurable. Soit maintenant X un processus mesurable càdlàg et borné. Les processus $Y = {}^{\ell\hat{s}}(X)1_{[\![\alpha,\beta[\![}$ et $Z = {}^{\hat{s}\ell}(X)1_{[\![\alpha,\beta[\![}$ sont alors tous deux $\hat{\underline{\underline{S}}}$-mesurables et continus à droite. Pour montrer qu'ils sont égaux, il suffit donc de vérifier que, pour tout processus $\hat{\underline{\underline{S}}}$-mesurable borné U, on a $E[\int U_sY_s ds] = E[\int U_sZ_s ds]$ (prendre ensuite $U = \mathrm{sgn}(Y-Z)$). Considérons alors la mesure aléatoire $\mu(\omega,dt) = 1_{[\![\alpha,\beta[\![}(t,\omega)\,dt$: on voit facilement que c'est à la fois une $\underline{\underline{L}}$-mesure et une $\hat{\underline{\underline{S}}}$-mesure. Par suite

$$E[\int {}^{\hat{s}\ell}(X)\,U\,d\mu] = E[\int {}^{\ell}(X)\,U\,d\mu] = E[\int {}^{\ell}(X)\,{}^{\ell}(U)\,d\mu] =$$
$$E[\int X\,{}^{\ell}(U)\,d\mu] = E[\int {}^{\hat{s}}(X)\,{}^{\ell}(U)\,d\mu] = E[\int {}^{\ell\hat{s}}(X)\,U\,d\mu]$$

Comme $\underline{\underline{M}}$ est engendrée par des processus càdlàg bornés, on en déduit $\underline{\underline{L}}\Leftrightarrow\hat{\underline{\underline{S}}}$ sur $[\![\alpha,\beta[\![$. Le résultat symétrique s'en déduit en prenant les limites à gauche des projections.

LEMME 2.4.- *La* $\underline{\underline{H}}$*-projection duale d'une* $\hat{\underline{\underline{H}}}$*-mesure portée par* $V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{H}}})$ *est une* $\hat{\underline{\underline{H}}}$*-mesure*.

d/ Il est clair que la $\underline{\underline{H}}$-projection duale d'une telle mesure sera encore portée par $V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{H}}})$, et il suffit de démontrer le lemme pour les $\hat{\underline{\underline{H}}}$-mesures de la forme $\varepsilon_{[\![T]\!]}(\omega,ds)$ où T est un cot.a. de $\hat{\underline{\underline{H}}}$. En utilisant la décomposition classique qui se généralise sans problème à notre cadre (th.1.12), il suffit de considérer les cas où T est $\underline{\underline{H}}$-accessible

---

(*) Il est clair qu'on peut intervertir les rôles de $\underline{\underline{H}}$ et de $\hat{\underline{\underline{H}}}$ en retournant le temps ($t\to -t$) !

ou totalement $\underline{\underline{H}}$-inaccessible. Nous noterons μ la $\underline{\underline{H}}$-projection duale de $\varepsilon_{[\![T]\!]}(ds)$, et nous renvoyons le lecteur à [7] pour les notions et résultats utilisés. Si T est $\underline{\underline{H}}$-accessible, la mesure μ est discrète et $s \to \mu(\{s\})$ est égal à ${}^{h}(1_{[\![T]\!]})$, qui est $\hat{\underline{\underline{H}}}$-mesurable par hypothèse : on voit donc bien que μ est une $\hat{\underline{\underline{H}}}$-mesure. Si T est totalement $\underline{\underline{H}}$-inaccessible, la mesure μ est alors diffuse et donc égale à sa $\underline{\underline{S}}$-projection duale. Le lemme 2.3 implique que μ est alors une $\hat{\underline{\underline{L}}}$-mesure, diffuse, portée par $V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{H}}})$. C'est donc une $\hat{\underline{\underline{S}}}$-mesure et finalement une $\hat{\underline{\underline{H}}}$-mesure.

<u>Démonstration du théorème</u> :

Soit X un processus mesurable borné nul hors de $V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{H}}})$. Si T est un cot.a. de $\hat{\underline{\underline{H}}}$ dont le graphe est inclus dans $V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{H}}})$ et μ désigne la $\underline{\underline{H}}$-projection duale de $\varepsilon_{[\![T]\!]}(ds)$, on a

$$E[{}^{h\hat{h}}(X)_T 1_{\{T\in\mathbf{R}\}}] = E[\textstyle\int {}^{\hat{h}}(X)\,d\mu] = E[\int X\,d\mu] =$$
$$E[\textstyle\int {}^{h}(X)\,d\mu] = E[\int {}^{h\hat{h}}(X)\,d\mu] = E[{}^{\hat{h}h}(X)_T 1_{\{T\in\mathbf{R}\}}]$$

Par suite, par projection et section, on obtient aisément ${}^{\hat{h}h\hat{h}}(X) = {}^{\hat{h}h}(X)$. L'hypothèse b) montre qu'on a aussi ${}^{h\hat{h}}(X) = {}^{\hat{h}h\hat{h}}(X)$, d'où ${}^{\hat{h}h}(X) = {}^{h\hat{h}}(X)$.

Si nous ne savons pas à l'avance que $V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{H}}})$ appartient à $\underline{\underline{H}}\cap\hat{\underline{\underline{H}}}$, mais seulement, par exemple, que $V(\underline{\underline{H}})$ appartient à $\hat{\underline{\underline{H}}}$, nous pouvons encore démontrer la commutation en renforçant la seconde part du b) du th.2.2.

THEOREME 2.5.- <u>Si, pour tout processus $\hat{\underline{\underline{H}}}$-mesurable borné</u> X, <u>la $\underline{\underline{H}}$-projection de</u> X <u>est un processus $\hat{\underline{\underline{H}}}$-mesurable, alors on a $\underline{\underline{H}}\leftrightarrow\hat{\underline{\underline{H}}}$</u>.

<u>D</u>/ Remarquons que ${}^{h}(1) = 1_{V(\underline{\underline{H}})}$ si bien que $V(\underline{\underline{H}})$ est $\hat{\underline{\underline{H}}}$-mesurable. D'après le théorème 2.2, il nous suffit de montrer que $V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{H}}})$ appartient à $\underline{\underline{H}}\cap\hat{\underline{\underline{H}}}$. Nous allons le démontrer à l'aide de deux lemmes très "techniques".

LEMME 2.6.- <u>Le temps $\gamma = \alpha\vee\beta$ est un t.a. de $\underline{\underline{L}}$ (un t.a. large de $\underline{\underline{H}}$)</u>.

<u>d</u>/ Soit $T = \inf\{t : {}^{\ell}(1_{[\![\beta,+\infty[\![}) = 1\}$; c'est un t.a. de $\underline{\underline{L}}$ et nous allons montrer que $T = \gamma$. Soit (T_n) une suite de cot.a. tendant en croissant vers β et tels que $T_n < +\infty$. Le processus ${}^{\ell}(1_{[\![T_n,+\infty[\![})$ est trace sur $V(\underline{\underline{L}})$ d'un processus $\hat{\underline{\underline{S}}}$-mesurable (immédiat à partir de l'hypothèse du th.2.5 par limite à droite) et admet une limite en $+\infty$. Il est donc constant après β et égal à sa limite (th.1.13). Par suite, on a

$${}^{\ell}(1_{[\![T_n,+\infty[\![}) = E[1_{\{T_n,+\infty\}}|\underline{\underline{L}}_{+\infty}] = 1 \text{ sur } [\![\alpha,+\infty[\![\cap]\!]\beta,+\infty[\![$$

Par passage à la limite, on a aussi ${}^{\ell}(1_{[\![\beta,+\infty[\![}) = 1$ sur $[\![\alpha,+\infty[\![\cap]\!]\beta,+\infty[\![$, ce qui prouve que $\alpha \leq T \leq \beta$ sur $\{\alpha\leq\beta\}$ et $T = \alpha$ sur $\{\beta<\alpha\}$. Le processus ${}^{\ell}(1_{[\![\beta,+\infty[\![})$ est continu à droite et vaut donc 1 à l'instant T sur $\{T<+\infty\}$. En prenant les espérances à l'instant T, on a $P[\beta \leq T < +\infty] = P[T < +\infty]$ et donc $\beta \leq T$. Ceci montre bien que $T = \alpha\vee\beta$.

LEMME 2.7.- $V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{H}}})$ <u>appartient à $\underline{\underline{H}}\cap\hat{\underline{\underline{H}}}$</u>.

d/ On a vu que l'hypothèse du th.2.5 implique $V(\underline{\underline{H}}) \in \underline{\underline{H}} \cap \hat{\underline{\underline{H}}}$. On a de plus $]\alpha,\beta] =]\alpha,\gamma] \in \underline{\underline{H}}$. On peut écrire $V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{L}}}) =]\alpha,\gamma] \cup [T]$ où $T = \alpha_{h\{\alpha_h \leq \beta\}}$. Or, on a vu que α_h est un t.a. de $\underline{\underline{H}}$; on en déduit que T est un t.a. de $\underline{\underline{H}}$ et donc que $V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{L}}})$ appartient à $\underline{\underline{H}}$. Il ne nous reste donc plus à démontrer que $A = V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{L}}}) - V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{H}}})$ appartient à $\underline{\underline{H}}$. Montrons que $A = B$ où

$$B = \{{}^h(1_{V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{H}}})}) = 0\} \cap V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{L}}})$$

Comme $V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{L}}})$ est $\underline{\underline{H}}$-mesurable, on a ${}^h(1_{V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{H}}})}) \leq 1_{V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{L}}})}$ et donc ce processus, $\hat{\underline{\underline{H}}}$-mesurable d'après l'hypothèse du th.2.5, est nul sur $]\beta,+\infty[$, donc aussi sur $V(\underline{\underline{H}})^c$ (th.1.14), et finalement sur A. D'où on a $A \subset B$. Un moment de réflexion montre que B est à coupes dénombrables, et donc est union d'une famille dénombrable de graphes de t.a. de $\underline{\underline{H}}$. Si S est un t.a. de $\underline{\underline{H}}$ dont le graphe est inclus dans B, on a alors $[S] \subset V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{L}}})$ et $E[1_{V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{L}}})}(S) \mid \underline{\underline{H}}_S] 1_{\{S \in \mathbf{R}\}} = 0$, ce qui prouve que $[S] \subset V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{H}}})^c$ et donc que $[S] \subset A$. On en déduit que $B \subset A$ et finalement que $A = B$.

Nous allons maintenant énoncer un théorème dont les hypothèses sont calquées sur la théorie des processus de Markov. Nous y prenons $\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{L}}$ et $\hat{\underline{\underline{H}}} = \hat{\underline{\underline{L}}}$.

THEOREME 2.8.- <u>Supposons que</u> $\hat{\underline{\underline{L}}} = (\underline{\underline{L}} \cap \hat{\underline{\underline{L}}}) \vee \hat{\underline{\underline{S}}}$ <u>sur</u> $[\alpha,\beta]$. <u>Si</u>, <u>pour tout processus</u> $\hat{\underline{\underline{S}}}$<u>-mesurable borné</u> X, ${}^\ell(X)$ <u>est</u> $\hat{\underline{\underline{S}}}$<u>-mesurable</u>, <u>alors on a</u> $\underline{\underline{L}} \leftrightarrow \hat{\underline{\underline{L}}}$.

D/ Le théorème 2.5 montre qu'on a $\underline{\underline{L}} \leftrightarrow \hat{\underline{\underline{S}}}$ et on en déduit aussitôt que $[\alpha,\beta] \in \underline{\underline{L}} \cap \hat{\underline{\underline{L}}}$. Soit X un processus de la forme $X = ab1_{[\alpha,\beta]}$ où a est $\underline{\underline{L}} \cap \hat{\underline{\underline{L}}}$-mesurable et b est $\hat{\underline{\underline{S}}}$-mesurable. On a alors ${}^\ell(X) = a{}^\ell(b)1_{[\alpha,\beta]}$ $\hat{\underline{\underline{L}}}$-mesurable. Par classe monotone, on en déduit que c'est vrai pour tout X borné, $\hat{\underline{\underline{L}}}$-mesurable, nul hors de $[\alpha,\beta] = V(\underline{\underline{L}},\hat{\underline{\underline{L}}})$. On conclut alors en appliquant le théorème 2.2.

REMARQUE.- On pourrait mettre comme autre hypothèse $\underline{\underline{L}} \subset \underline{\underline{S}} \vee (\underline{\underline{L}} \cap \hat{\underline{\underline{L}}}) \vee \hat{\underline{\underline{S}}}$ (ou $\hat{\underline{\underline{L}}} \subset \underline{\underline{S}} \vee (\underline{\underline{L}} \cap \hat{\underline{\underline{L}}}) \vee \hat{\underline{\underline{S}}}$) sur $[\alpha,\beta]$. La conclusion aurait été alors que $\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{S}} \vee (\underline{\underline{L}} \cap \hat{\underline{\underline{L}}})$ (ou $\underline{\underline{L}} = (\underline{\underline{L}} \cap \hat{\underline{\underline{L}}}) \vee \hat{\underline{\underline{S}}}$) sur $]\alpha,\beta]$ et $\underline{\underline{L}} \leftrightarrow \hat{\underline{\underline{L}}}$ sur $]\alpha,\beta]$. En effet, on a encore $\underline{\underline{L}} \leftrightarrow \hat{\underline{\underline{S}}}$. On en déduit par limite à droite que $\underline{\underline{S}} \leftrightarrow \hat{\underline{\underline{L}}}$ mais seulement a priori sur $]\alpha,\beta]$, d'où l'on tire très simplement le résultat (mais seulement sur $]\alpha,\beta]$). On sait, par hypothèse, que $\underline{\underline{L}}_\alpha$ et $\hat{\underline{\underline{S}}}_\alpha$ sont conditionnellement indépendantes, mais on ne le sait pas pour $\underline{\underline{L}}_\alpha$ et $\hat{\underline{\underline{L}}}_\alpha$ (encore une fois, α joue le "rôle du diable").

EN GUISE DE CONCLUSION

L'un des buts de la théorie exposée est évidemment d'unifier les différents théorèmes de commutation rencontrés en théorie des processus de Markov homogènes ([2]), ou inhomogènes ([1]). Ceci sera fait en détail dans un second article consacré à l'étude de la propriété de Markov sous divers aspects. Nous allons ici nous borner à esquisser une définition générale des processus de Markov et en montrer le lien avec la théorie classique sans chercher la plus grande généralité.

Soit $\underline{\underline{H}}$ (resp $\hat{\underline{\underline{H}}}$) une tribu homogène du passé (resp futur) P-complète sur $\mathbb{R}\times\Omega$ et soit X un processus à valeurs dans un espace mesurable. Nous notons $\bar{\sigma}(X)$ la tribu sur $\mathbb{R}\times\Omega$ engendrée par X et les parties mesurables évanescentes.

DEFINITION.- <u>On dit que</u> X <u>est un</u> $(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{H}}})$-<u>processus de Markov si</u>

1) X <u>est</u> $\underline{\underline{H}}\cap\hat{\underline{\underline{H}}}$-<u>mesurable</u>

2) <u>Pour tout processus</u> $\hat{\underline{\underline{H}}}$-<u>mesurable borné</u> Z, <u>la</u> $\underline{\underline{H}}$-<u>projection de</u> Z <u>est</u> $\bar{\sigma}(X)$-<u>mesurable</u>.

On reconnait en 2) une formulation de la propriété de Markov forte. Le théorème suivant découle alors immédiatement du th.2.5.

THEOREME.- <u>Si</u> X <u>est un</u> $(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{H}}})$-<u>processus de Markov</u>, <u>alors</u>

1) $\underline{\underline{H}} \leftrightarrow \hat{\underline{\underline{H}}}$

2) $\underline{\underline{H}}\cap\hat{\underline{\underline{H}}} = \bar{\sigma}(X)$ <u>sur</u> $V(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{H}}})$.

On retrouve ici l'idée célèbre (et symétrique) que le "passé" ($\underline{\underline{H}}$) et le "futur" ($\hat{\underline{\underline{H}}}$) sont indépendants étant donné le "présent" ($\bar{\sigma}(X)$).

Voyons rapidement comment se traduit la théorie classique dans notre cadre. Considérons par exemple la réalisation canonique d'un processus de Hunt. On prolonge d'abord X_t en posant $X_t = \delta'$ pour $t<0$. On prend ensuite pour $\underline{\underline{H}}$ la tribu engendrée par les processus nuls avant 0 et égaux à un processus optionnel après 0 : on a $\alpha = 0$, $\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{L}}$ et $V(\underline{\underline{H}}) = [\![0,+\infty[\![$. Enfin on prend pour $\hat{\underline{\underline{H}}}$ la tribu engendrée par les processus $\theta_t(X)$, $t \geq 0$. Comme X est càdlàg, on a ici $\hat{\underline{\underline{H}}} = \underline{\underline{S}}$;
la propriété de Markov forte classique nous dit que, pour tout t.a. T de $\underline{\underline{H}}$, toute f borélienne bornée et tout $t \geq 0$, on a

$$E[f(X_{T+t})\,|\,\underline{\underline{F}}_T]1_{\{T<+\infty\}} = E^{X_T}[f(X_t)]1_{\{T<+\infty\}}.$$

Ceci implique que X est un $(\underline{\underline{H}},\hat{\underline{\underline{H}}})$-processus de Markov, auquel donc le théorème précédent s'applique. Remarquons qu'ici on a $\hat{\underline{\underline{L}}} = (\underline{\underline{L}}\cap\hat{\underline{\underline{L}}})\vee\underline{\underline{S}}$ si bien qu'on a aussi $\underline{\underline{L}} \leftrightarrow \hat{\underline{\underline{L}}}$ d'après le th.2.8.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATKINSON B. : Generalized Strong Markov properties and Application (Z. Wahr. verw. Geb. 60, 1982)

[2] AZEMA J. : Théorie générale des processus et retournement du temps (Ann. Sci. E.N.S. 4e série, 6, 1973)

[3] DELLACHERIE C. et MEYER P.A. : Probabilités et Potentiel, tome 1. (Hermann, Paris, 1980)

[4] DYNKIN E.B. : Markov systems and their additive functionals (Ann. of Proba., 15 n.5, 1977)

[5] FOURATI S. : Thèse de 3e cycle, Université de Paris VI

[6] LEJAN Y. : Tribus markoviennes, résolvantes et quasi-continuité (C.R. Acad. Sci. Paris, t.288, p.739-740, 1979)

[7] LENGLART E. : Tribus de Meyer et théorie des processus. (Sém. Proba. Strasbourg XIV, L.N. in Math. n.784, Springer, 1980)

[8] MEYER P.A. : Les travaux d'Azéma sur le retournement du temps. (Sém. Proba. Strasbourg VIII, L.N. in Math. n.381, Springer, 1974)

[9] MEYER P.A. et YOR M. : Sur la théorie de la prédiction et le problème de décomposition des tribus $\underline{\underline{F}}^{o}_{t+}$. (Sém. Proba. Strasbourg X, L.N. in Math. n.511, Springer, 1976)

[10] MEYER P.A. : Résultats d'Atkinson sur les processus de Markov. (Sém. Proba. Strasbourg n.XVI, L.N. in Math. n.920, Springer, 1982)

[11] SHARPE M. : General theory of Markov processes (à paraitre).

Sonia FOURATI

UFR Sc. Eco.
Université Paris X

200 Av. de la République
92001 NANTERRE Cédex

Erik LENGLART

Lab. de Math. appl.
I.N.S.A. de Rouen

4 Pl. E. Blondel
76130 Mt St AIGNAN (BP08)