SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JACQUES AZÉMA
MARC YOR

Interprétation d'un calcul de H. Tanaka en théorie générale des processus

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p. 262-269
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__262_0>

INTERPRETATION D'UN CALCUL DE H. TANAKA EN THEORIE GENERALE DES PROCESSUS.

J. AZEMA et M. YOR (*)

1. H. Tanaka [9] prouve l'existence d'une loi asymptotique pour une solution (en loi) de l'équation :

$$(1) \qquad dX_t = dB_t - \frac{1}{2} W'(X_t)dt, \qquad X_o = 0$$

où $W(x) = |\beta(x)|$, si $x \geq 0$; $= |\tilde{\beta}(-x)|$, si $x \leq 0$,

β et $\tilde{\beta}$ désignant deux mouvements browniens réels indépendants, issus de 0, et indépendants de B, autre mouvement brownien réel.

Nous ne discuterons pas ici de l'interprétation à donner à l'équation (1) ; cette Note est uniquement consacrée à l'étude de la loi asymptotique μ obtenue par Tanaka. Cette loi est caractérisée comme suit :

__Théorème__ (H. Tanaka [9]) : *1)* $\frac{1}{(\log t)^2} X_t$ *converge en loi, lorsque* $t \to \infty$, *vers une probabilité* μ *symétrique sur* $\mathbb{R}$, *caractérisée par :*

pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, *borélienne,*

$$(2) \qquad \int_0^\infty f(x)\, d\mu(x) = E\Big[\frac{1}{\ell_\sigma + \tilde{\ell}_{\tilde{\sigma}}} \int_0^\sigma d\ell_x\, f(x)\Big]$$

où $\sigma = \inf\{x \geq 0 : |\beta(x)| = 1\}$, $(\ell_x, x \geq 0)$ *est le temps local en* 0 *de* β, *et* $\tilde{\sigma}$ *et* $\tilde{\ell}$ *sont les quantités analogues associées à* $\tilde{\beta}$.

2) De plus, la transformée de Laplace de $\mu_{|\mathbb{R}_+}$ *est donnée par :*

$$(3) \qquad \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, d\mu(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^2} \frac{1}{(t + \sqrt{2\lambda}\ \coth(\sqrt{2\lambda}))}$$

2. L'objet de ce paragraphe est :

(i) de donner une autre interprétation du membre de droite de (2), puis :

(ii) d'en déduire une démonstration de l'identité des membres de droite de (2) et (3), pour $f(x) = e^{-\lambda x}$.

Nous notons désormais $a \equiv a(\lambda) = \sqrt{2\lambda}\ \coth(\sqrt{2\lambda}) - 1$.

(*) *UNIVERSITE PARIS VI - Laboratoire de Probabilités - 4 Place Jussieu - Tour 56 3ème Etage - 75252 PARIS CEDEX 05*

Le membre de droite de (3) s'écrit alors :

$$\int_1^\infty \frac{du}{u^2(u+a)} = \frac{1}{a^2}\int_{1/a}^\infty \frac{du}{u^2(u+1)} = \frac{1}{a^2}\int_0^a \frac{x\,dx}{x+1} = \frac{1}{a^2}(a - \log(1+a)).$$

Il s'agira donc de montrer :

(3') $$E\Big[\Big(\int_0^\sigma d\ell_x\, e^{-\lambda x}\Big)\frac{1}{\ell_\sigma+\tilde{\ell}_\sigma}\Big] = \frac{1}{a^2}(a - \log(1+a)).$$

(2.a) Le lemme suivant explicite la loi conjointe de ℓ_σ et $L \equiv \sup\{x \leq \sigma : \beta(x) = 0\}$, qui, comme nous le verrons, joue un rôle central dans la suite.

__Lemme__ : *1) On a, pour tous* $\nu,\lambda \geq 0$:

$$E\Big[\exp - (\nu\ell_\sigma + \lambda\sigma)\Big] = \Big(ch(\sqrt{2\lambda}) + \frac{\nu}{\sqrt{2\lambda}}\, sh(\sqrt{2\lambda})\Big)^{-1}.$$

2) En conséquence :

$$P(\ell_\sigma \in d\ell) = e^{-\ell}\, d\ell \quad ; \qquad E\Big[e^{-\lambda L} \,|\, \ell_\sigma = x\Big] = e^{-xa}.$$

Démonstration : Ces résultats sont bien connus (voir, par exemple, Pitman-Yor [8], theorem (4.2)).

1) La première partie du lemme peut être obtenue en appliquant le théorème d'arrêt au temps σ à la martingale :

$$\phi(\beta_t)\exp\{-\nu\ell_t - \lambda t\}, \quad \text{où } \phi(x) = ch(\sqrt{2\lambda}\,|x|) + \frac{\nu}{\sqrt{2\lambda}}\, sh(\sqrt{2\lambda}\,|x|).$$

2) D'après D. Williams [11], σ-L est indépendant de la tribu, engendrée par β, des événements antérieurs à L, et $E[\exp - \lambda(\sigma - L)] = \dfrac{\sqrt{2\lambda}}{sh(\sqrt{2\lambda})}$.

La partie 2) du lemme découle maintenant de la partie 1.

(2.b) Remarquons maintenant que pour tout processus $(\mathcal{F}_x)$-prévisible borné Z, on a :

(4) $$E[Z_L] = E\Big[\int_0^\sigma d\ell_x\, Z_x\Big].$$

Cette formule peut être démontrée de multiples façons ; elle découle, par exemple, du théorème d'arrêt, appliqué en σ, à la martingale :

(5) $$\{Z_{g_x}\,|\beta(x)| - \int_0^x d\ell_y\, Z_y \; ; \; x \geq 0\}, \text{ avec } g_x = \sup\{y \leq x : \beta(y) = 0\}.$$

(voir [2] où ces martingales sont construites) ; cette formule peut également être obtenue comme cas particulier de la formule de compensation de Maisonneuve dans l'étude des excursions browniennes.

La proposition suivante nous donne une seconde représentation de la loi μ.

Proposition : *1) Pour tout processus* $(\mathcal{F}_x)$ *prévisible borné* Z, *et* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, *borélienne bornée, on a :*

$$(6) \qquad E\left[\left(\int_0^\sigma d\ell_x \, Z_x\right) f(\ell_\sigma)\right] = E[Z_L \, F(\ell_\sigma)], \quad \text{où} \quad F(\ell) = e^\ell \int_\ell^\infty du \, e^{-u} f(u)$$

ainsi que :

$$(6') \qquad E\left[\left(\int_0^\sigma d\ell_x \, Z_x\right) f(\ell_\sigma + \tilde{\ell}_{\tilde{\sigma}})\right] = E[Z_L \, F(\ell_\sigma + \tilde{\ell}_{\tilde{\sigma}})]$$

2) En particulier, on a, pour toute fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, *borélienne:*

$$(7) \qquad \int_0^\infty g(x) \, d\mu(x) = E[g(L) \, H(\ell_\sigma + \tilde{\ell}_{\tilde{\sigma}})], \quad \text{où} \quad H(x) = e^x \int_x^\infty \frac{du}{u} e^{-u}$$

Démonstration : 1) En utilisant la propriété de Markov, et le fait que ℓ_σ est distribuée exponentiellement, on obtient :

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^\sigma d\ell_x \, Z_x \, f(\ell_\sigma)\right] &= E\left[\int_0^\sigma d\ell_x \, Z_x \, E[f(\ell_\sigma)/\mathcal{F}_x]\right] \\ &= E\left[\int_0^\sigma d\ell_x \, Z_x \int_0^\infty dt \, e^{-t} f(\ell_x + t)\right] \\ &= E\left[\int_0^\sigma d\ell_x \, Z_x \, F(\ell_x)\right] = E[Z_L \, F(\ell_\sigma)] \text{ , d'après (4).} \end{aligned}$$

2) La formule (6') découle de (6) , car si F_a est la fonction F associée à $f_a(\ell) = f(a+\ell)$, on a également : $F_a(\ell) = F(a+\ell)$.

3) Si $f(x) = \frac{1}{x}$, on a : $F(x) = H(x)$. La formule (7) découle donc de (2) et (6').

La formule (3') découle maintenant aisément de (7).

On a, en effet :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \, d\mu(x) &= E[e^{-\lambda L} \, H(\ell_\sigma + \tilde{\ell}_{\tilde{\sigma}})] = E[e^{-a\ell_\sigma} \, H(\ell_\sigma + \tilde{\ell}_{\tilde{\sigma}})] \\ &= \int_0^\infty dt \, e^{-ta} \int_t^\infty du \int_u^\infty \frac{dy}{y} e^{-y} \\ &= \int_0^\infty dt \, e^{-ta} \int_t^\infty \frac{dy}{y} e^{-y} (y-t), \end{aligned}$$

ce qui implique aisément la formule (3').

3. En fait, la formule (6) admet l'extension tout à fait générale suivante, dans laquelle la propriété de Markov n'intervient pas.

(3.a) Soit $(\mathcal{G}_x\ ;\ x \geq 0)$ une filtration satisfaisant les hypothèses habituelles, et L un $(\mathcal{G}_x)$ temps d'arrêt fini, totalement inaccessible ; on note (ℓ_t) la projection duale prévisible de $\varepsilon_L(dt)$.
Alors, d'après Jeulin ([4], proposition (3,28)), on a :

$$(8) \qquad E[f(\ell_L)/\mathcal{G}_t] = F(\ell_t) + 1_{(L \leq t)}\,(f-F)(\ell_L).$$

En conséquence, pour tout processus (Z_x) $\mathcal{G}_x$-prévisible, positif, et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ borélienne, on a :

$$E\Big[\Big(\int_0^L d\ell_x\, Z_x\Big)\, f(\ell_L)\Big] = E\Big[\int_0^L d\ell_x\, Z_x\, F(\ell_x)\Big]$$

et donc :

$$(6'') \qquad E\Big[\Big(\int_0^L d\ell_x\, Z_x\Big)\, f(\ell_L)\Big] = E[Z_L\, F(\ell_L)].$$

On déduit de cette formule, en prenant $Z = 1$, et en faisant varier f, la loi de ℓ_L dûe à Azéma [1] :

$$(9) \qquad P(\ell_L \in dt) = e^{-t}\, dt.$$

La transformation : $f \to F$ jouant un rôle central dans cet article, montrons comment elle apparaît dans la démonstration (dûe à Jeulin) de la formule (8) :
si $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction borélienne, bornée, le processus

$$M_t^g \equiv \int_0^t g(\ell_s)\, d(1_{(L \leq s)} - \ell_s)$$

est une martingale de variable terminale :

$$M_\infty^g = g(\ell_L) - \hat{g}(\ell_L), \quad \text{où} \quad \hat{g}(x) = \int_0^x g(u)du.$$

Une autre expression de M^g est : $\quad M_t^g = g(\ell_L)\, 1_{(L \leq t)} - \hat{g}(\ell_t)$.
On peut donc réécrire l'égalité : $\quad E[M_\infty^g/\mathcal{G}_t] = M_t^g \quad$ sous la forme :

$$(8') \qquad E[(\hat{g}-g)(\ell_L)/\mathcal{G}_t] = \hat{g}(\ell_t) - g(\ell_L)\, 1_{(L \leq t)}.$$

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne à support compact. La fonction F qui lui est associée satisfait : $\quad F' = F-f$, et donc : $\hat{g} \equiv F-F(0)$ est solution de : $\hat{g}-g = f-F(0)$.
On déduit finalement (8) de (8').

(3.b) Soit $(\mathcal{F}_x, x \geq 0)$ une filtration satisfaisant les hypothèses habituelles, et L la fin d'un ensemble $(\mathcal{F}_x)$ prévisible tel que pour tout $(\mathcal{F}_x)$ temps

d'arrêt T, $P(L = T) = 0$. Désignons par (ℓ_t) la $(\mathcal{F}_t)$ projection duale prévisible de la mesure aléatoire $\varepsilon_L(dt)$, et par $(\mathcal{G}_x, x \geq 0)$ la plus petite filtration qui contienne $(\mathcal{F}_x)$ et fasse de L un temps d'arrêt. Alors, L est un $(\mathcal{G}_x)$ temps d'arrêt totalement inaccessible, et la $(\mathcal{G}_x)$ projection duale prévisible de $\varepsilon_L(dt)$ est (ℓ_t).

La formule *(6")* est donc encore valable, pour tout processus $(\mathcal{F}_x)$ prévisible, positif Z.

(3.c) Notre solution au problème de Skorokhod ([3]) fournit un exemple de la situation décrite en *(3.b)* (voir également Jeulin-Yor [5] pour un cadre plus général). Rappelons les notations de [3] :

soit $(\mathcal{F}_t)$ la filtration naturelle du mouvement brownien réel $(B_t, t \geq 0)$ issu de 0, et $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$. μ désigne une probabilité sur $\mathbb{R}$, telle que $\int |x|\, d\mu(x) < \infty$, et $\int x\, d\mu(x) = 0$. On appelle $\psi_\mu(x)$ le barycentre de la restriction de μ à $[x,\infty[$. Alors :

(10) $\qquad$ si $T_\mu \equiv \inf\{t : S_t \geq \psi_\mu(B_t)\}$, la loi de B_{T_μ} est μ.

Considérons maintenant $L \equiv L_\mu = \sup\{s \leq T_\mu : S_s = B_s\}$, et introduisons :

$$g_t = \sup\{s < t : S_s = B_s\}.$$

D'après la formule de balayage,

$$Z_{g_t}(S_t - B_t) - \int_0^t Z_s\, dS_s \qquad\qquad (t \geq 0)$$

avec Z processus prévisible borné, est une martingale, et on obtient, par application du théorème d'arrêt :

$$E[Z_L(S_{T_\mu} - B_{T_\mu})] = E\Big[\int_0^L Z_s\, dS_s\Big]. \tag{11}$$

Or, on a : $S_{T_\mu} - B_{T_\mu} = \phi(S_{T_\mu})$, où $\phi(x) = x - \Phi_\mu(x)$, et Φ_μ est l'inverse continu à gauche de ψ_μ.

La formule *(11)* peut alors être réécrite sous la forme :

$$E[Z_L] = E\Big[\int_0^L Z_s \frac{1}{\phi(S_s)}\, dS_s\Big], \tag{12}$$

ce qui signifie, avec les notations de *(3.b)*, que :

$$\ell_t = v(S_{t \wedge T_\mu}), \qquad \text{où} \qquad v(x) = \int_0^x \frac{dy}{\phi(y)}\,. \tag{13}$$

On déduit de *(13)*, et du résultat universel *(9)*, la distribution de S_{T_μ}, et finalement, le résultat *(10)* .

D'autre part, la formule $(6'')$ devient ici : pour tout processus prévisible borné Z,

$$E\Big[\int_0^L dS_s\, Z_s\, f(S_L)\Big] = E[Z_L\, F_\phi(S_L)]$$

où
$$F_\phi(y) = \phi(y)e^{v(y)} \int_{v(y)}^\infty dx\, e^{-x} f(x).$$

Le cas particulier de cette étude où $\psi_\mu(x) = (x+1)^+$ est intimement lié à l'étude de la distribution asymptotique de (1), lorsque le mouvement brownien réfléchi $(W(x), x \in \mathbb{R})$ est remplacé par un mouvement brownien (cf : Kesten [6] ; Tanaka [10] pour une extension aux processus stables symétriques).

4. Compléments.

Revenons au cadre Brownien du paragraphe 2.

(4.a) Examinons deux variantes de la formule (6) dans laquelle on remplace :
- ou bien, ℓ_σ par A_σ ;
- ou bien, Z_x par $e^{-\lambda A_x}$, avec $A_x = \int_0^x ds\, u(|B_s|)$.

• Pour la première variante, on obtient, à l'aide de la propriété de Markov :

$$(14) \qquad E\Big[\int_0^\sigma d\ell_x\, Z_x\, f(A_\sigma)\Big] = E[Z_L\, F_A(A_L)]$$

où
$$F_A(a) = \int_0^\infty P(A_L \in dt)\, f(a+t).$$

• Pour la seconde variante, on se propose d'expliciter autant que possible l'expression :

$$\nu_A(\lambda, f) = E\Big[\int_0^\sigma d\ell_x\, e^{-\lambda A_x} f(\ell_\sigma)\Big] = E\Big[e^{-\lambda A_L} F(\ell_\sigma)\Big].$$

Considérons $\sigma' = \inf(t : B_t = 1)$, et $L' = \sup(t < \sigma' : B_t = 0)$.

On a alors, par changement de temps :

$$\Big(\int_0^{L'} ds\, 1_{(B_s > 0)}\, u(B_s)\ ;\ \tfrac{1}{2}\ell_{\sigma'}\Big) \stackrel{(d)}{=} \Big(\int_0^L ds\, u(|B_s|), \ell_\sigma\Big).$$

Dans la suite, $Q^d_{x\to y}$ dénote la loi du pont, pendant l'intervalle de temps $[0,1]$, issu de x, et aboutissant en y, du carré du processus de Bessel de dimension d. D'après le théorème de Ray-Knight, conditionnellement à $\ell_{\sigma'} = x$, la loi de $(\ell^a_{\sigma'}\ ;\ 0 \le a \le 1)$ est $Q^2_{x\to 0}$. Or, on a :

$$Q^2_{x\to 0} = Q^2_{0\to 0} \oplus Q^0_{x\to 0}.$$

De plus, $(\ell_{\sigma'}^a - \ell_{L'}^a \ ; \ 0 \leq a \leq 1)$ est independant de $\mathcal{F}_{L'}$, ce qui entraîne que, conditionnellement à $\ell_{\sigma'} = x$,

(i) la loi de $(\ell_{L'}^a \ ; \ 0 \leq a \leq 1)$ est $Q_{x\to 0}^0$;

(ii) la loi de $(\ell_{\sigma'}^a - \ell_{L'}^a \ ; \ 0 \leq a \leq 1)$ est $Q_{0\to 0}^2$.

On a donc :

$$E\left[e^{-\lambda A_L}/\ell_\sigma = x\right] = E\left[\exp - \lambda\int_0^{L'} ds\ 1_{(B_s>0)}\ u(B_s)/\ell_{\sigma'} = 2x\right]$$

$$= Q_{2x\to 0}^0\left(e^{-\lambda\int_0^1 dx\ u(x)X_x}\right) = \exp(-\ x\ \bar{a}(\lambda)).$$

L'existence de $\bar{a}(\lambda)$ découle de ce que la famille $(Q_{x\to 0}^0, x > 0)$ est additive. Voir Pitman-Yor ([7], Proposition (5.10)) pour une détermination explicite de $\bar{a}(\lambda)$ en fonction de u.

On a donc :

$$\nu_A(\lambda,f) = \int_0^\infty dx\ e^{-x(1+\bar{a}(\lambda))}\ F(x) = \int_0^\infty dx\ e^{-x\ \bar{a}(\lambda)} \int_x^\infty ds\ e^{-s}\ f(s)$$

$$= \int_0^\infty ds\ e^{-s}\ f(s) \int_0^s dx\ e^{-x\ \bar{a}(\lambda)}, \text{ d'où, finalement :}$$

$$\nu_A(\lambda,f) = \frac{1}{\bar{a}(\lambda)} \int_0^\infty ds\ e^{-s}(1 - e^{-s\ \bar{a}(\lambda)})\ f(s).$$

Remarquons encore que la mesure $P(A_L \in dt)$ - qui intervient dans la formule *(14)* - est caractérisée par :

$$E\left[e^{-\lambda A_L}\right] = \int_0^\infty dx\ e^{-x(1+\bar{a}(\lambda))} = \frac{1}{1+\bar{a}(\lambda)}.$$

(4.b) La seconde partie de la proposition exprime $\mu|_{\mathbb{R}_+}$ comme la loi de L relativement à la mesure $H(\ell_\sigma + \tilde{\ell}_\sigma)\cdot P$.

Il est naturel d'exprimer la loi $f(\ell_\sigma)\cdot P$ comme celle d'un mouvement brownien avec drift, donné par le théorème de Girsanov.

Remarquons tout d'abord que, si P_a désigne la loi du mouvement Brownien réfléchi issu de a, on a :

$$E_a[f(\ell+\ell_\sigma)] = af(\ell) + (1-a)\ F(\ell) \qquad (0 \leq a \leq 1\ ;\ \ell \geq 0).$$

On en déduit, par application de la propriété de Markov :

$$E[f(\ell_\sigma)/\mathcal{F}_t] = F(\ell_t) - |B_t|(F-f)(\ell_t), \quad \text{sur } (t < \sigma).$$

Ceci est bien en accord avec la formule de balayage [2] puisque : $F' = F-f$.

Relativement à la mesure $f(\ell_\sigma)\cdot P$, le mouvement Brownien $(B_t, t < \sigma)$ satisfait donc, d'après le théorème de Girsanov :

$$B_t = \beta_t - \int_0^t ds\ \mathrm{sgn}(B_s)\ \frac{(F-f)(\ell_s)}{F(\ell_s)-|B_s|(F-f)(\ell_s)},$$

où $(\beta_t, t \geq 0)$ désigne un nouveau mouvement Brownien.

<u>*REFERENCES*</u> :

[1] *J. AZEMA* : Quelques applications de la théorie générale des processus. Invent. Math. <u>18</u>, 293-336, 1972.

[2] *J. AZEMA, M. YOR* : En guise d'Introduction (... aux Temps locaux). Astérisque 52-53, p. 3-35, 1978.

[3] *J. AZEMA, M. YOR* : Une solution simple au problème de Skorokhod. Sém. Proba XIII, Lect. Notes in Math. 721, 1979.

[4] *T. JEULIN* : <u>Semi-martingales et grossissement d'une filtration</u>. Lect. Notes in Math. 833. Springer (1980).

[5] *T. JEULIN, M. YOR* : Sur les distributions de certaines fonctionnelles du mouvement Brownien. Sém. Probas XV, Lect. Notes in Maths. 850, 1981.

[6] *H. KESTEN* : The limit distribution of Sinaï's random walk in random environment. Preprint (1985). A paraître dans Physica.

[7] *J.W. PITMAN, M. YOR* : A decomposition of Bessel Bridges. Zeitschrift für Wahr, <u>59</u>, 425-457, 1982.

[8] *J.W. PITMAN, M. YOR* : Asymptotic laws of planar Brownian motion. The Annals of Proba., 14, 3, 733-779, 1986.

[9] *H. TANAKA* : Limit distribution for 1-dimensional diffusion in a reflected Brownian medium. Dans ce volume.

[10] *H. TANAKA* : The limit distribution for 1-dimensional diffusion process in a symmetric stable medium. Preprint (1986).

[11] *D. WILLIAMS* : Path-decomposition and continuity of local time for one-dimensional diffusions. Proc. London Math. Soc. (3), 28, 738-768, 1974.