

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

FRANÇOIS CHARLOT

Sur la démonstration des formules en théorie discrète du potentiel

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 612-613

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__612_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

SUR LA DEMONSTRATION DES FORMULES EN
THEORIE DISCRETE DU POTENTIEL
par F. Charlot

En théorie discrète du potentiel, on associe à un noyau N divers noyaux (noyau potentiel, noyaux de réduction, etc.), et on établit un certain nombre d'identités relatives à ces noyaux à l'aide de calculs plus ou moins aisés. Dans [1] Dellacherie et Meyer montrent que ces calculs se ramènent à des calculs sur des séries formelles à indéterminées non commutatives, ce qui permet d'opérer sans se soucier si les expressions manipulées ont réellement un sens. Mais, par ailleurs, beaucoup de ces identités ont, quand N est sousmarkovien, une interprétation probabiliste et une démonstration simple à l'aide de la propriété de Markov forte. Et le théorème que nous allons démontrer ici implique que deux séries formelles à coefficients positifs sont égales dès qu'elles fournissent les mêmes noyaux chaque fois qu'on remplace leurs indéterminées par des noyaux sousmarkoviens : ainsi, le calcul markovien permet tout aussi bien d'établir en toute généralité les identités envisagées, ce qui justifie une pratique heuristique bien établie.

Comme dans [1], on se contentera de considérer l'anneau $S(x,y,z)$ des séries formelles réelles à trois indéterminées non commutatives, et on désignera par $S^+(x,y,z)$ l'ensemble des séries à coefficients positifs. Pour $n \in \mathbb{N} = \{0,1,\dots\}$, on appellera exposant d'ordre n toute partition de $\{1,\dots,n\}$ en trois parties A,B,C , deux d'entre elles pouvant être vides (les trois étant vides pour $n=0$) ; on devine sans peine ce qu'est l'exposant d'un monôme de degré n : par exemple, l'exposant de y^2xyz^3x est $\{3,8\},\{1,2,4\},\{5,6,7\}$.

THEOREME.- Deux éléments α et β de $S^+(x,y,z)$ sont égaux ssi il existe $\delta \in]0,1[$ tel que, pour tout exposant A,B,C , on ait

$$\alpha(T_A^\delta, T_B^\delta, T_C^\delta) = \beta(T_A^\delta, T_B^\delta, T_C^\delta)$$

où T est l'opérateur de translation sur \mathbb{N} (i.e. $Tf(n)=f(n+1)$) et δ_A (resp ...) est l'opérateur de multiplication par $\delta 1_A$ (resp ...).

La nécessité est claire. La suffisance va résulter aisément du lemme suivant

LEMME.- Soient γ un monôme de degré n et de coefficient unité, δ un élément de $]0,1[$ et ε_0 la masse de Dirac en 0 . Si A,B,C est un exposant d'ordre $m \leq n$, alors la mesure $\varepsilon_0 \gamma(T\delta_A, T\delta_B, T\delta_C)$ est nulle si A,B,C est distinct de l'exposant de γ , et est égale à $\delta^n \varepsilon_n$ si A,B,C est égal à l'exposant de γ .

D/ Soit $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ l'exposant de γ : il n'y a qu'à suivre les n bonds d'une particule partant de 0 et se déplaçant suivant la stratégie N_1, \dots, N_n où N_i est le noyau $T\delta_H$, H étant égal à A, B, C resp. suivant que i appartient à $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ resp. .

On achève alors la démonstration du théorème par un raisonnement par récurrence : si α_n (resp β_n) désigne la somme des monômes de degré $\leq n$ de α (resp β), alors le lemme (et l'hypothèse faite sur α, β) permet de déduire $\alpha_n = \beta_n$ à partir de $\alpha_{n-1} = \beta_{n-1}$.

COROLLAIRE.- Deux éléments α et β de $S^+(x,y,z)$ sont égaux ssi, pour tout espace mesurable (E, \underline{E}) , on a $\alpha(M,N,P) = \beta(M,N,P)$ pour tout triplet M,N,P de noyaux sousmarkoviens (et même de norme < 1) sur (E, \underline{E}) .

Ainsi, on peut par exemple obtenir des formules du type "entrée et sortie", qui mènent au principe du maximum (cf [2]), ou faire de la théorie de la R-récurrence (cf [3] et [4]), pour des noyaux positifs quelconques, avec des démonstrations probabilistes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DELLACHERIE (C.) et MEYER (P.A.) : Probabilités et Potentiels III. Théorie discrète du Potentiel (Hermann, Paris 1983)
- [2] REVUZ (D.) : Markov Chains (North-Holland, Amsterdam 1975)
- [3] CELLIER (D.) : Méthode de fission pour l'étude de la récurrence des chaînes de Markov (Thèse de 3e cycle, Rouen 1980)
- [4] TWEEDIE (R.L.) : R-Theory for chains on a general state space (Ann. Prob. 2, 840-878, 1974)

François CHARLOT
Cité 5 Juillet
Bat. 17, App. 10
Dar El Beida
Alger