SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

FRANCO FAGNOLA
GIORGIO LETTA

Sur la représentation intégrale des martingales du processus de Poisson

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 28-29
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__28_0>

SUR LA REPRESENTATION INTEGRALE
DES MARTINGALES DU PROCESSUS DE POISSON

par F. Fagnola et G. Letta

INTRODUCTION. Dans le Sém. Prob. VIII, L.N. 381, p.25, C. Dellacherie donne une démonstration très simple du théorème de représentation prévisible pour les processus de Wiener et de Poisson à partir des théorèmes bien connus d'unicité en loi pour ces processus. Cette démonstration comportait une erreur, rectifiée dans le Sém. Prob. IX, L.N. 465, p. 494 pour le processus de Wiener. A notre connaissance, bien que la méthode de Dellacherie ait été étendue à des cas beaucoup plus généraux par Yor (thèse, non publié) et par Jacod-Yor (ZW 38, 1977, p. 83-125), personne n'a jamais publié de démonstration complète selon la méthode tout à fait élémentaire de Dellacherie, dans le cas du processus de Poisson. C'est ce que nous nous proposons de faire ici.

Cette rédaction (préparée en collaboration avec P.A. Meyer) est une forme abrégée, destinée au Séminaire de Probabilités, d'une version plus détaillée, préparée à Pise pour un public moins spécialisé.

NOTATIONS. Sur un espace probabilisé complet $(\Omega,\mathcal{F},P)$ on considère un processus de Poisson (N_t) nul en 0, d'intensité 1, et la filtration $(\mathcal{F}_t)$ engendrée par N et satisfaisant aux conditions habituelles. On désigne par T_n les instants de sauts successifs de N. par X le processus de Poisson compensé (N_t-t). Comme le compensateur prévisible de N est continu, les temps d'arrêt T_n sont totalement inaccessibles.

Voici le résultat qui est vraiment établi dans le travail de Dellacherie (le cas borné est explicitement traité, le cas minoré s'obtient par la même démonstration).

LEMME 1. <u>Toute martingale locale</u> Y , <u>nulle en</u> 0, <u>minorée par une constante et orthogonale à</u> X (i.e., $[Y,X]$ est une martingale locale) <u>est nulle</u>.

Nous allons en déduire que <u>toute martingale locale</u> Y <u>nulle en</u> 0 <u>est une intégrale stochastique prévisible</u> $\int_0^t H_s dX_s$. Par arrêt, on peut se ramener au cas où Y est uniformément intégrable. Puis, par un nouvel arrêt au temps $\inf\{t : |Y_t|\geqq n\}$, on peut se ramener au cas où $Y^*=\sup_t |Y_t|$ est intégrable. La démonstration procède alors en deux lemmes très simples.

LEMME 2. <u>Pour tout</u> n <u>on a</u> $\mathcal{F}_{T_n}=\mathcal{F}_{T_n-}$.

<u>Démonstration</u>. Il suffit de démontrer que toute v.a. bornée U , $\mathcal{F}_{T_n}$-mesurable et orthogonale à $\mathcal{F}_{T_n-}$, est nulle (rappelons qu'une v.a. V

est $\mathcal{F}_{T_n-}$-mesurable si et seulement s'il existe un processus prévisible H tel que $V=H_{T_n}$). Il est très facile de vérifier que le processus $Y_t=UI_{\{t\geq T_n\}}$ est une martingale bornée. Comme $\Delta X_{T_n}=1$, on a $[Y,X]=Y$, qui est une martingale ; d'après le lemme 1, Y=0, donc U=0. ▯

LEMME 3. <u>Toute martingale locale</u> Y <u>nulle en</u> 0, <u>continue aux instants</u> T_n, <u>est nulle</u> (comme plus haut on peut supposer $Y^*\in L^1$).

<u>Démonstration</u>. Nous allons d'abord montrer que Y n'a pas de sauts positifs. Il suffit de montrer que pour tout k , le temps d'arrêt

$$S = \inf\{t : \tfrac{1}{k}\leq \Delta Y_t \leq k\}$$

est p.s. infini. Or soit Z_t le processus croissant $\Delta Y_S I_{\{t\geq S\}}$; son compensateur prévisible $\tilde{Z}$ ne peut sauter aux temps totalement inaccessibles T_n , et Z n'y saute pas par hypothèse, donc la martingale minorée $\tilde{Z}-Z$ est telle que $[\tilde{Z}-Z,X]=0$. D'après le lemme 1, elle est nulle, et $Z=\tilde{Z}$. Alors $S=\inf\{t: \tilde{Z}_t\geq 1/k\}$ est un temps d'arrêt prévisible, donc $E[\Delta Y_S]=0$: comme $\Delta Y_S\geq 0$ sur $\{S<\infty\}$ on en déduit $\Delta Y_S=0$, et enfin $S=+\infty$ p.s..

On montre de même que Y n'a pas de sauts négatifs, donc elle est continue. On peut alors se ramener par arrêt au cas où Y est bornée, et déduire du lemme 1 que Y=0. ▯

DEMONSTRATION DU THEOREME. Puisque $\mathcal{F}_{T_n}=\mathcal{F}_{T_n-}$, il existe pour tout n un processus prévisible H^n tel que $\Delta Y_{T_n}=H^n_{T_n}$. Soit $H=\Sigma_n H^n I_{]T_{n-1},T_n]}$: c'est un processus prévisible, et on a $\Delta Y_{T_n}=H_{T_n}$ pour tout n . On a pour tout n $E[\int_0^{T_n} |H_s|dN_s] = E[\Sigma_1^n |\Delta Y_{T_n}|]<\infty$, donc $E[\int_0^{T_n}|H_s|ds] < \infty$, donc l'intégrale stochastique $\int_0^t H_s dX_s$ existe et est une martingale locale Y'_t ; or Y-Y' n'a pas de sauts aux instants T_n , donc elle est nulle d'après le lemme 3. ▯

Scuola Normale Superiore
56100 PISA, Italie.