Claude Dellacherie

Quelques résultats sur les maisons de jeu analytiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 19 (1985), p. 222-229

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__222_0>

QUELQUES RESULTATS SUR LES MAISONS DE JEUX ANALYTIQUES

par C. Dellacherie

Nous apportons ici quelques compléments aux fondements de la théorie des maisons de jeux présentés dans le troisième volume de "Probabilités et Potentiel" (en abrégé, le "livre brun", le "livre rose" désignant le premier volume) : analyticité du balayage d'ordre un, définition et analyticité du produit de deux maisons analytiques, analyticité du catalogue des stratégies, etc. L'exposé a été rédigé pour être lisible sans avoir à se reporter constamment au livre brun ; on a cependant omis de rappeler les propriétés élémentaires des opérateurs analytiques (début du chapitre XI du livre brun).

On travaille sur un espace métrisable compact E, de tribu borélienne $\underline{\underline{E}}$ et on désigne par E^{+}(qui se lit "E dièse") l'ensemble des mesures de masse ≤ 1 sur $(E,\underline{\underline{E}})$ qui est un espace métrisable compact pour la topologie de la convergence vague. On appelle <u>maison de jeu</u> toute partie J de $E\times E^{+}$ (on ne suppose pas, comme dans le livre brun, que les coupes de J sont non vides ni qu'elles sont constituées de lois de probabilités : cela amènera plus de souplesse, mais aussi quelques petites difficultés, plus loin). La maison de jeu J est dite <u>quittable</u> si, pour tout $x\in E$, la mesure de Dirac ε_x appartient à la coupe $J(x)$; à la différence du livre brun, nous ne supposerons pas en général que nos maisons sont quittables. Un noyau P de E dans E sera dit <u>permis</u> dans la maison J s'il est universellement mesurable (en abrégé : u.m.) et si, pour tout $x\in E$, on a $\varepsilon_x P = 0$ si $J(x) = \emptyset$ et $\varepsilon_x P \in J(x)$ si $J(x) \neq \emptyset$. Le théorème de section de Jankov-Von Neumann (cf livre rose III-81) assure qu'il y a beaucoup de noyaux permis dans une maison analytique. Enfin, à toute maison de jeu J est associé un <u>opérateur sous-linéaire</u> N_J (notation du livre brun : J^*) défini sur toutes les fonctions positives f sur E par

$$N_J f(x) = \sup_{\mu\in J(x)} \mu^*(f) \qquad (\sup_{\emptyset} = 0)$$

où μ^* est l'intégrale supérieure relative à μ ; il résulte immédiatement de la définition que N_J est un opérateur analytique si J est analytique.

Nous passons maintenant à l'étude du balayage d'ordre un, notion naturelle qui n'apparait pas dans le livre brun centré sur l'étude du balayage qu'on pourrait qualifier "d'ordre indéterminé".

BALAYAGE D'ORDRE UN

Etant donné une maison de jeu J et deux éléments λ,μ de E^{+}, nous dirons que μ est une <u>balayée première</u> de μ s'il existe un noyau P permis dans J tel que $\mu=\lambda P$; on notera cela $\lambda \underset{J}{\Dashv} \mu$ et on appellera <u>balayage d'ordre un</u> associé à J la relation $\underset{J}{\Dashv}$ ainsi définie sur E^{+}. La relation obtenue en remplaçant "$\mu=\lambda P$" par "$\mu \leqq \lambda P$", que nous noterons $\underset{J}{\geqq\!\dashv}$, est aussi intéressante (son étude sera d'ailleurs une étape de celle de $\underset{J}{\Dashv}$), mais elle n'est autre que la relation de balayage d'ordre un associée à la maison héréditaire J' engendrée par J (on a $\nu\varepsilon J'(x)$ ssi il existe $\mu\varepsilon J(x)$ telle que $\nu \leqq \mu$). Nous allons voir que, lorsque J est analytique, alors (le graphe de) $\underset{J}{\Dashv}$ est analytique ; on peut alors montrer que la relation de balayage habituelle $\underset{J}{\dashv}$ s'obtient en saturant $\underset{J}{\Dashv}$ pour diverses opérations : hérédité des coupes, transitivité, forte convexité des coupes, et adhérence pour la norme (cela résulte d'un théorème de Mokobodzki exposé dans le livre brun, et que nous n'utiliserons pas ici).

Nous allons montrer mieux que l'analyticité de $\underset{J}{\Dashv}$ (resp $\underset{J}{\geqq\!\dashv}$) pour J analytique : nous allons voir que l'opération ϕ (resp ψ) qui à J partie de $E\times E^{+}$ associe $\underset{J}{\Dashv}$ (resp $\underset{J}{\geqq\!\dashv}$) partie de $E^{+}\times E^{+}$ est une opération analytique (nous commettons ici un abus de langage habituel : nous montrerons seulement que nos opérations coincident avec des opérations analytiques sur les parties analytiques, ce qui revient pratiquement au même). Ce "mieux" n'est pas sans intérêt : c'est lui qui nous permettra d'étudier aisément le produit de deux maisons de jeux. Nous allons commencer par étudier ψ car l'étude "analytique" d'une égalité (cf $\mu=\lambda P$) est toujours plus délicate que celle d'une inégalité. L'idée de départ est d'écrire

$$(\lambda,\mu)\varepsilon\psi(J) \Leftrightarrow \exists P\ (P\varepsilon\mathbf{J} \text{ et } \mu\leqq\lambda P)$$

où $\mathbf{J}$ désigne l'ensemble des noyaux permis dans J. Mais, pour que la projection $\exists P\varepsilon\mathbf{J}$ soit un opérateur analytique, il faut que $\mathbf{J}$ soit un "bon" sous-ensemble d'un "bon" espace lorsque J est analytique, condition qui n'est manifestement pas satisfaite. On améliore un peu la situation en remplaçant le noyau u.m. P dans $\mu=\lambda P$ par un noyau borélien Q égal λ-p.p. à P, ce qui est manifestement possible (nous laissons au lecteur le soin de définir ce qu'est un noyau λ-p.p. permis). Mais, ce qu'il nous faudrait, c'est pouvoir prendre Q de graphe compact : le bon espace serait alors l'ensemble K des parties compactes de $E\times E^{+}$, qui est métrisable compact pour la topologie de Hausdorff. Comme il n'est évidemment pas possible en général de remplacer un graphe borélien par un graphe compact même avec du "λ-p.p.", il va nous falloir pour mettre en oeuvre notre idée à la fois considérer des graphes partiels (i.e. de projection sur E non égale à E), et approcher un graphe borélien par une suite croissante de graphes partiels compacts. Nous écrivons maintenant tout cela plus formellement.

Pour simplifier le langage, nous appellerons seminoyau de E dans E toute application P définie sur une partie D(P) de E et à valeur dans E^+; un tel seminoyau P sera prolongé en un noyau, encore noté P quand cela ne crée pas de confusion, en posant $\varepsilon_x P = 0$ pour $x \notin D(P)$, et sera dit u.m. ou borélien si son prolongement l'est. Le seminoyau P est dit autorisé dans la maison de jeu J s'il est u.m. et si, pour tout $x \in D(P)$, l'on a $J(x) \neq \emptyset$ et $\varepsilon_x P \in J(x)$. On vérifie sans peine que, pour J analytique, on a $(\lambda,\mu) \in \psi(J)$ ssi il existe un seminoyau borélien P autorisé dans J tel que l'on ait $\mu \leqq \lambda P$. Enfin, nous dirons que le seminoyau P est fellerien si son graphe dans $D(P) \times E^+$ est compact (P est alors un noyau fellerien au sens habituel de D(P) dans E, mais son prolongement à E n'en est pas forcément un). Il est clair que, pour tout seminoyau borélien P et toute sous-probabilité λ, il existe une suite (P_n) de seminoyaux felleriens vérifiant les conditions suivantes : le graphe de chaque P_n est contenu dans celui de P, la suite des graphes des P_n est croissante, et la réunion des $D(P_n)$ est λ-p.p. égale à D(P). Ainsi, pour J analytique, on a finalement $(\lambda,\mu) \in \psi(J)$ ssi il existe une suite (P_n) de seminoyaux felleriens autorisés dans J telle que la suite des graphes des P_n soit croissante et que la mesure μ soit majorée par la limite croissante des mesures λP_n. Cette caractérisation va nous permettre de démontrer sans trop de peine l'analyticité de ψ (il reste un écueil à éviter : l'ensemble des compacts contenus dans un ensemble analytique n'est pratiquement jamais un ensemble analytique).

PROPOSITION 1.- L'opération ψ est une opération analytique.

D/ Encore quelques notations afin de pouvoir écrire commodément notre caractérisation de ψ (ou, plutôt, une variante de celle-ci pour éviter l'écueil précité) de manière symbolique. On désigne par K l'ensemble des parties compactes de $E \times E^+$ muni de la topologie de Hausdorff et par G le sous-espace de K constitué des graphes des seminoyaux felleriens ; il est bien connu (et pas difficile à montrer) que G est une partie $\underline{\underline{G}}_\delta$ de K. Enfin, on désigne par S le sous-espace de $K^{\mathbb{N}}$ constitué des suites croissantes d'éléments de G ; on vérifie sans peine que S est une partie $\underline{\underline{G}}_\delta$ de $K^{\mathbb{N}}$. Par ailleurs, on se donne une suite (f_n) de fonctions continues de E dans [0,1] suffisamment riche pour que l'on ait, pour tout $\mu,\nu \in E^+$, $\mu \leqq \nu$ ssi on a $\forall n\ \mu(f_n) \leqq \nu(f_n)$. On a alors, pour J analytique dans $E \times E^+$,

$$(\lambda,\mu) \in \psi(J) \iff \exists (g_m) \in S\ \forall n\ [\mu(f_n) \leqq \sup_m \lambda(N_{J\cap g_m} f_n)]$$

où, comme la maison $J \cap g_m$ est un graphe (partiel), l'opérateur $N_{J\cap g_m}$ associé n'est autre que le prolongement à E du seminoyau de graphe $J \cap g_m$.

Nous allons décortiquer maintenant l'expression obtenue en y faisant apparaitre divers opérateurs analytiques. D'abord, pour chaque entier n, nous définissons un opérateur capacitaire U_n à un argument ensembliste J partie de $E\times E^+$ et à valeur $U_n(J)$ fonction positive sur $E^+\times K$ comme suit : si λ (resp k) est un élément générique de E^+ (resp K), on pose

$$U_n((\lambda,k),J) = \lambda(N_{J\cap k}f_n)$$

où $U_n((\lambda,k),J)$ désigne la valeur de la fonction $U_n(J)$ en (λ,k). Puis, pour chaque entier n, un opérateur analytique V_n à un argument ensembliste J partie de $E\times E^+$ et à valeur $V_n(J)$ fonction positive sur $E^+\times K^{\mathbb{N}}$ par

$$V_n((\lambda,(k_m)),J) = \sup_m U_n((\lambda,k_m),J)$$

On a alors

$$(\lambda,\mu)\in\Psi(J) \Leftrightarrow \exists(g_m)\in S\ \forall n\ [\mu(f_n) \leqq V_n((\lambda,(g_m)),J)]$$

d'où l'on déduit immédiatement que $\Psi(J)$ est analytique si J l'est. Pour obtenir l'analyticité de l'opération Ψ elle-même, il faut travailler un tout petit peu plus. On définit un (dernier) opérateur analytique W à un argument ensembliste J partie de $E\times E^+$ et à valeur W(J) fonction positive, sur $E^+\times E^+\times K^{\mathbb{N}}$ en posant

$$W((\mu,\lambda,(k_m)),J) = \inf_n[1+V_n((\lambda,(k_m)),J)-\mu(f_n)]$$

où le "1" sert à assurer que W(J) est positive. Et l'on a finalement

$$(\lambda,\mu)\in\Psi(A) \Leftrightarrow \exists(g_m)\in S\ W((\mu,\lambda,(g_m)),J) \geqq 1$$

Ainsi, Ψ s'obtient en composant W avec l'opérateur analytique $f\to\{f\geq 1\}$ (f fonction positive sur $E^+\times E^+\times K^{\mathbb{N}}$), puis avec l'intersection avec l'ensemble analytique $E^+\times E^+\times S$ et finalement avec la projection sur $E^+\times E^+$. Ouf !

Nous passons maintenant à l'étude de l'opération Φ, grandement facilitée par celle de Ψ

THEOREME 1.- <u>L'opération</u> Φ <u>qui à une maison</u> J <u>partie de</u> $E\times E^+$ <u>associe sa relation de balayage d'ordre un</u> $\underset{J}{\dashv}$ <u>partie de</u> $E^+\times E^+$ <u>est une opération analytique</u>.

<u>D</u>/ Si les coupes de J étaient non vides et constituées de probabilités, on aurait, pour J analytique,

$$(\lambda,\mu)\in\Phi(J) \Leftrightarrow (\lambda,\mu)\in\Psi(J) \text{ et } \lambda(1) = \mu(1)$$

d'où l'analyticité de $\Phi(J)$ à partir de celle de $\Psi(J)$. On va ramener la démonstration de l'analycité de l'opération Φ à ce schéma grâce au procédé habituel pour rendre markovien quelquechose qui n'est que sous-markovien. On rajoute un point isolé δ à E, on pose $\hat{E} = E\cup\{\delta\}$ et on définit une opération capacitaire M à un argument J partie de $E\times E^+$ et à valeur $M(J) = \hat{J}$ partie de $\hat{E}\times\hat{E}^+$ par

$$(x,\nu)\in\hat{J} \Leftrightarrow [(x=\delta \text{ ou } J(x)=\emptyset) \text{ et } \nu=\varepsilon_\delta] \text{ ou } [\exists\mu\ (x,\mu)\in J \text{ et } \nu = \mu+(1-\mu(1))\varepsilon_\delta]$$

où la mesure μ sur E est confondue avec son image sur $\hat{E}$. Maintenant, si on désigne par $\hat{\psi}$ l'opération de type ψ relative à $\hat{E}$, on voit aisément que l'on a pour J analytique

$$(\lambda,\mu)\varepsilon\phi(J) \Leftrightarrow \exists\hat{\mu}\varepsilon\hat{E}^{+}\ [(\lambda,\hat{\mu})\varepsilon\hat{\psi}(M(J)) \text{ et } \lambda(1)=\hat{\mu}(1) \text{ et } \mu = 1_E\hat{\mu}]$$

et on tire de là, sans autre peine que celle de l'écrire (que nous nous épargnerons), une écriture de ϕ comme composée de M, $\hat{\psi}$ et d'opérations analytiques élémentaires.

PRODUIT DE DEUX MAISONS DE JEUX

En théorie des jeux, la donnée d'un noyau permis P dans la maison J s'interprète comme le choix d'un joueur d'une mesure P(x,dy) dans J(x) pour chaque état x possible du joueur, ce dernier se retrouvant après coup dans l'état y avec probabilité P(x,dy). Ainsi, J s'interprète comme une famille de noyaux, celle de ceux permis dans J, et il est alors naturel de définir le produit de deux maisons de jeux comme suit

DEFINITION 1.- <u>Le produit de deux maisons de jeux</u> J <u>et</u> K <u>est la maison de jeu</u> $L = JK$ <u>égale à la réunion des graphes des produits de noyaux</u> PQ <u>quand</u> P (<u>resp</u> Q) <u>parcourt l'ensemble des noyaux permis dans</u> J (<u>resp</u> K).

Notez que, si J et K sont des graphes (les opérateurs N_J et N_K sont alors des noyaux de graphes respectifs J et K), alors JK est, si N_J et N_K sont u.m., le graphe du noyau composé correspondant, à savoir N_JN_K. On est en droit d'espérer qu'en général on a $N_{JK} = N_JN_K$, et nous allons voir que c'est pratiquement le cas : si J et K sont deux maisons analytiques, alors N_{JK} et N_JN_K coincident sur les fonctions positives analytiques, si bien que, par abus de langage, nous dirons qu'ils sont égaux.

Avant tout, faisons une remarque simple mais importante sur la définition du produit JK : si J est analytique (ce qui assure pour tout $(x,\lambda)\varepsilon J$ l'existence d'un noyau P permis dans J tel que $\varepsilon_x P = \lambda$), alors (x,μ) est élément de JK ssi il existe une mesure λ telle que $(x,\lambda)\varepsilon J$ et un noyau Q permis dans K tels que $\mu = \lambda Q$; autrement dit, si J est analytique, on a $(x,\mu)\varepsilon JK$ ssi il existe $(x,\lambda)\varepsilon J$ tel que $\mu \underset{K}{\dashv} \lambda$.

PROPOSITION 2.- <u>Si</u> J <u>et</u> K <u>sont deux maisons analytiques et si</u> JK <u>est leur produit</u>, <u>on a</u> $N_{JK} = N_JN_K$.

<u>D</u>/ D'abord, on a $N_{JK} \leqq N_JN_K$. En effet, pour $(x,\mu)\varepsilon JK$, on a $\mu = \lambda Q$ avec $(x,\lambda)\varepsilon J$ et Q permis dans K, d'où pour f analytique positive sur E

$$\mu(f) \leqq \lambda(N_K f) \leqq N_JN_K f(x)$$

Pour l'autre sens, rappelons (cf livre brun X-17) qu'une application simple du théorème de section de Jankov-Von Neumann assure que, si L est une maison analytique et f une fonction analytique positive bornée sur E, il existe pour tout $\nu\varepsilon E^{+}$ et tout $\varepsilon>0$ un noyau S permis dans L tel qu'on ait

$\nu(Sf) \geqq \nu(N_L f) - \varepsilon$. On en déduit aisément (cf livre brun X-18) que $N_J N_K f$ est, pour f analytique positive, l'enveloppe supérieure des fonctions PQf quand P (resp Q) parcourt l'ensemble des noyaux permis dans J (resp K), d'où la conclusion.

L'égalité $N_{JK} = N_J N_K$ pour J,K analytiques implique que N_{JK} est alors un opérateur analytique. Malgré cela, l'opération produit n'aurait que peu d'intérêt si elle ne préservait pas l'analyticité car on ne pourrait alors guère parler de la maison JK elle-même.

THEOREME 2.- <u>L'opération qui à deux maisons de jeux associe leur produit est une opération analytique</u>.

<u>D</u>/ La démonstration est très simple à partir du théorème 1 : il suffit d'écrire que l'on a pour J,K analytiques dans $E \times E^+$

$$(x,\mu) \in JK \Leftrightarrow \exists (x,\lambda) \; (x,\lambda) \in J \text{ et } \mu \underset{K}{\dashv} \lambda$$

Comme application des théorèmes 1 et 2, nous allons donner les grandes lignes d'une démonstration de l'analyticité de la relation de balayage associée à une maison analytique, distincte de celle du livre brun (mais suggérée dans le dit brun livre en petits caractères). Rappelons d'abord, brièvement, de quoi il s'agit. Etant donnée une maison analytique J que nous supposerons quittable pour simplifier les notations, on définit d'une part la relation de balayage entre mesures par $\lambda \underset{J}{\dashv} \mu$ ssi $\lambda(f) \geqq \mu(f)$ pour toute f J-surmédiane (i.e. f est u.m. positive et on a $N_J f \leqq f$) et d'autre part l'opérateur de réduite R_J sur les fonctions positives en posant $R_J f = \lim_k N_J^k f$ (comme J est quittable, les N_J^k croissent avec k) si bien que, pour f analytique, $R_J f$ est la plus petite fonction J-surmédiane majorant f. Il s'agit alors de prouver d'une part que la maison $L = \{(x,\mu) : \varepsilon_x \underset{J}{\dashv} \mu\}$ est analytique et qu'on a $N_L = R_J$ (sur les fonctions analytiques), et que d'autre part la relation $\underset{J}{\dashv}$ est analytique. Or, d'après le théorème 2, la puissance k-ième J^k de J est analytique ainsi donc que la limite K de la suite croissante (J^k). Il résulte de la proposition 2 qu'on a $K \subseteq L$ et $N_K = R_J$; comme l'inégalité $N_L \leqq R_J$ est triviale, on en déduit $N_L = R_J$, et aussi l'analyticité de L à partir de celle de K grâce au théorème de Mokobodzki évoqué plus haut. Passons à l'analyticité du balayage. Comme K est analytique, toujours d'après le théorème de Mokobodzki il nous suffit de prouver que pour λ fixée et f analytique positive on a

$$\sup\{\mu(f),\ \mu \underset{K}{\models} \lambda\} = \sup\{\mu(f),\ \mu \underset{J}{\models} \lambda\}$$

L'inégalité dans le sens $\leqq$ est triviale (on a $N_K = R_J$) ; pour l'autre sens on remarque que, K étant analytique, on a

$$\sup\{\mu(f),\ \mu \underset{K}{\models} \lambda\} = \sup\{\lambda(Pf),\ P \text{ permis dans } K\} = \lambda(N_K f)$$

(pour le dernière égalité, cf la démonstration de la proposition 2), et, comme $\lambda(N_K f) = \lambda(R_J f)$ majore évidemment $\sup\{\mu(f), \mu \models_J \lambda\}$, on a finalement l'égalité désirée.

STRATEGIES ET PSEUDOSTRATEGIES

Une stratégie σ pour une maison de jeu J est, selon le livre brun, une suite $(S_n)_{n \geq 0}$ de noyaux S_n de E^{n+1} dans E, permis dans J au sens suivant : S_n est u.m. et, pour tout $\mathbf{x}_n = (x_0,\ldots,x_n)$, on a $S_n(\mathbf{x}_n,dy) = 0$ si $J(x_n) = \emptyset$ et $S_n(\mathbf{x}_n,dy) \in J(x_n)$ si $J(x_n) \neq \emptyset$. Posons $\Omega = \hat{E}^{\mathbf{N}}$ où, comme plus haut, on a pris $\hat{E} = E \cup \{\delta\}$, δ point isolé, pour rendre markovien ce qui n'est que sous-markovien, et munissons Ω de ses coordonnées $(X_n)_{n \geq 0}$, de la filtration $(\underline{\underline{F}}_n)_{n \geq 0}$ engendrée par celles-ci, et de sa tribu borélienne produit $\underline{\underline{F}}$. Pour toute J-stratégie σ, il existe alors, pour toute probabilité λ sur E, une unique probabilité $\mathbf{P}^\lambda_\sigma$ sur Ω (notée $\mathbf{P}^x_\sigma$ si $\lambda = \varepsilon_x$) telle que l'on ait pour tout $B \in \hat{\underline{\underline{E}}}$ et tout n

$$\mathbf{P}^\lambda_\sigma\{X_0 \in B\} = \lambda(B) \qquad \mathbf{P}^\lambda_\sigma\{X_{n+1} \in B | \underline{\underline{F}}_n\} = \hat{S}_n(\mathbf{X}_n,B)$$

où $\mathbf{X}_n = (X_0,\ldots,X_n)$ et où le noyau $\hat{S}_n$ de $\hat{E}^{n+1}$ dans $\hat{E}$ est défini comme il se doit par $\hat{S}_n(\mathbf{x}_n,dy) = \varepsilon_\delta$ si l'une des coordonnées de $\mathbf{x}_n$ vaut δ et, sinon, par $\hat{S}_n(\mathbf{x}_n,dy) = S_n(\mathbf{x}_n,dy) + (1-S_n(\mathbf{x}_n,1))\varepsilon_\delta$. On voit sans peine que le noyau $(\mathbf{P}^x_\sigma)_{x \in E}$ de E dans Ω est u.m. et que $\mathbf{P}^\lambda_\sigma$ est l'image de λ par ce noyau.

Du point de vue probabiliste, deux J-stratégies α et β sont équivalentes si les noyaux $(\mathbf{P}^x_\alpha)_{x \in E}$ et $(\mathbf{P}^x_\beta)_{x \in E}$ de E dans Ω sont égaux. Nous dirons qu'une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω est une J-pseudostratégie partant de x s'il existe une J-stratégie σ telle que $\mathbf{P} = \mathbf{P}^x_\sigma$, et nous appellerons catalogue des J-pseudostratégies l'ensemble $\Theta(J)$ des couples $(x,\mathbf{P}) \in E \times \Omega^+$ tels que $\mathbf{P}$ soit une J-pseudostratégie partant de x. Nous laissons au lecteur le soin de définir ce qu'est un noyau permis dans $\Theta(J)$.

PROPOSITION 3.- Soient J une maison de jeu et $\Theta(J)$ le catalogue associé. Un noyau $(\mathbf{P}^x)_{x \in E}$ de E dans Ω est permis dans $\Theta(J)$ ssi il existe une J-stratégie σ telle que $(\mathbf{P}^x)_{x \in E} = (\mathbf{P}^x_\sigma)_{x \in E}$.

D/ La suffisance est triviale. Pour la nécessité, remarquons que, pour tout $x \in E$, il existe une stratégie $\sigma(x) = (S^x_n)_{n \geq 0}$ telle que $\mathbf{P}^x = \mathbf{P}^x_{\sigma(x)}$: si, pour chaque n, le noyau $(S^x_n)_{x \in E}$ de $E \times E^{n+1}$ dans E était u.m., il n'y aurait plus qu'à poser, pour tout $\mathbf{x}_n \in E^{n+1}$, $S_n(\mathbf{x}_n,dy) = S^x_n(\mathbf{x}_n,dy)$, où x est la première coordonnée de $\mathbf{x}_n$, pour obtenir la stratégie $\sigma = (S_n)_{n \geq 0}$ désirée. Il s'agit donc, somme toute, d'un problème de régularisation de noyau et nous ne donnerons que les grandes lignes de sa solution, les techniques étant familières. D'abord, pour $n \in \mathbf{N}$ et $B \in \hat{\underline{\underline{E}}}$ fixés, si $\underline{\underline{E}}^*$ désigne la tribu des parties u.m. de E, il existe d'après une application classique de la théorie des martingales (cf livre bleu V-58) une fonction

$(x,\omega) \to q_n^x(\omega,B)$ sur $E\times\Omega$, $\underline{\underline{E}}^*\times\underline{\underline{F}}_n$-mesurable, telle que $q_n^x(.,B)$ soit une version de $\mathbf{P}^x\{X_{n+1}\varepsilon B|\underline{\underline{F}}_n\}$ et soit donc $\mathbf{P}^x$-p.s. égale à $\hat{S}_n^x(\mathbf{X}_n,B)$. Maintenant, pour x fixé et B variable, $q_n^x(.,B)$ définit un $\mathbf{P}^x$-pseudonoyau de $(\Omega,\underline{\underline{F}}_n)$ dans $(\hat{E},\hat{\underline{\underline{E}}})$, et la démonstration du théorème de régularisation des pseudonoyaux (cf livre brun IX-11) nous fournit un vrai noyau Q_n^x de $(\Omega,\underline{\underline{F}}_n)$ dans $(\hat{E},\hat{\underline{\underline{E}}})$ tel qu'on ait $Q_n^x(.,B)=q_n^x(.,B)$ $\mathbf{P}^x$-p.s. pour tout x et que la fonction $(x,\omega)\to Q_n^x(\omega,B)$ soit $\underline{\underline{E}}^*\times\underline{\underline{F}}_n$-mesurable, pour tout $B\varepsilon\hat{\underline{\underline{E}}}$. Et, comme on peut évidemment identifier $(\Omega,\underline{\underline{F}}_n)$ et $(\hat{E}^{n+1},\hat{\underline{\underline{E}}}^{n+1})$, on obtient ainsi une version de $(S_n^x)_{x\varepsilon E}$ qui soit un noyau u.m. de $E\times E^{n+1}$ dans E. C'est fini.

Enfin, le résultat suivant assure en particulier que le catalogue $\Theta(J)$ de la maison J est analytique si J l'est

THEOREME 3.- <u>L'opération</u> Θ <u>qui à la maison</u> J <u>partie de</u> $E\times E^+$ <u>associe le catalogue</u> $\Theta(J)$ <u>des</u> J-<u>pseudostratégies</u>, <u>partie de</u> $E\times\Omega^+$, <u>est analytique</u>.

<u>D</u>/ Remarquons d'abord (mieux vaut tard que jamais !) que, dans l'énoncé du théorème 1 et sa démonstration, on pouvait dissocier E^+ de E et obtenir ainsi l'énoncé suivant où F et G sont des espaces métrisables compacts : est analytique l'opération ϕ qui à J partie de $F\times G^+$ associe la partie $\phi(J)$ de $F^+\times G^+$ constituée des couples (λ,μ) tels que $\lambda \underset{J}{=\!\!|} \mu$, i.e. tels qu'il existe un noyau P de F dans G permis dans J de sorte que $\mu=\lambda P$ (on laisse au lecteur le soin de définir "permis" !). Nous appliquerons cela au cas où l'on a $F=\hat{E}^{n+1}$ et $G=\hat{E}$. Conservant les notations déjà introduites plus haut, nous en introduisons maintenant d'autres encore pour rendre lisible la définition symbolique de $\Theta(J)$. D'abord, pour J partie de $E\times E^+$, nous notons J_n l'ensemble des $((x_0,\ldots,x_n),\mu)\varepsilon E^{n+1}\times E^+$ tels que $(x_n,\mu)\varepsilon J$, et $\hat{J}_n$ la partie de $\hat{E}^{n+1}\times\hat{E}^+$ correspondante en "rendant les choses markoviennes" : l'opération $J\to\hat{J}_n$ est capacitaire. Puis, nous nous donnons pour chaque n une algèbre de Boole dénombrable $(A_k^n)_{k\varepsilon\mathbf{N}}$ engendrant la tribu $\underline{\underline{F}}_n$ et, identifiant $(\Omega,\underline{\underline{F}}_n)$ à $(\hat{E}^{n+1},\hat{\underline{\underline{E}}}^{n+1})$ encore noté $(\Omega_n,\underline{\underline{F}}_n)$, nous définissons pour chaque n,k une application f_k^n de Ω^+ dans Ω_n^+ et une application g_k^n de Ω^+ dans $\hat{E}^+$ en posant pour $\mathbf{Q}\varepsilon\Omega^+$, $A\varepsilon\underline{\underline{F}}_n$ et $B\varepsilon\hat{\underline{\underline{E}}}$

$$f_k^n(\mathbf{Q})(A)=\mathbf{Q}(A_k^n\cap A) \qquad g_k^n(\mathbf{Q})(B)=\mathbf{Q}(A_k^n\cap\{X_{n+1}\varepsilon B\})$$

On peut alors écrire

$$(x,\mathbf{P})\varepsilon\Theta(J) \Leftrightarrow \forall n\ \forall k\ \exists\lambda\ \exists\mu\ [\lambda=f_k^n(\mathbf{P}) \text{ et } \mu=g_k^n(\mathbf{P}) \text{ et } (\lambda,\mu)\varepsilon\phi(\hat{J}_n)]$$

On en déduit sans peine que l'opération Θ est analytique.

Nous laissons au lecteur le soin d'établir un résultat analogue pour le catalogue des J-pseudostratégies markoviennes (au sens de "propriété de Markov") et pour celui, un peu plus délicat (il faut remonter à la démonstration de la proposition 1), des J-pseudostratégies markoviennes stationnaires.