SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

RICHARD F. GUNDY

Temps locaux et l'intégrale d'aire de Lusin

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 77-81
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__77_0>

Temps locaux et l'intégrale d'aire de Lusin.

R.F. Gundy

Dans les comptes rendus de la semaine d'analyse harmonique dédiée à A. Zygmund, à Chicago [4], nous montrons qu'un joli théorème récent de Martin Barlow et Marc Yor peut être utilisé à démontrer des inégalités de normes pour une nouvelle fonctionelle définie sur les fonctions harmoniques $u(x,y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y > 0$:

$$D(u)(x_o) = \sup_r D(u;r)(x_o)$$

où

$$D(u;r)(x_o) = \int_{\Gamma(x_o)} |\nabla u| \, d\sigma_r$$

avec $\Gamma(x_o) = \{(x,y): |x_o - x| < y\}$, le cône basé en $x_o \in \mathbb{R}^n$, et $d\sigma_r$ la mesure de Lebesque sur la ligne de niveau r(c'est à dire sur $\{(x,y): u(x,y) = r\}$). On montre que

$$\|D\|_p \simeq \|A\|_p \, , \quad 0 < p < \infty \tag{1}$$

où

$$A^2(u)(x_o) = \iint_{\Gamma(x_o)} |\nabla u|^2(x,y) \, dx \, dy.$$

Il s'en suit que D caractérise les classes H^p de Stein-Weiss [8] dans $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

La démonstration des inégalités (1) dans [4] reposait sur le théorème de Barlow-Yor et l'invariance conforme de la fonction de Green dans $\mathbb{R}^2$. Cette invariance est en défaut dans $\mathbb{R}^{n+1}_+$; ainsi la démonstration ne s'étend pas à plusieurs dimensions. Or, cette démonstration n'est pas très révélatrice en ce qui concerne la signification géométrique-analytique de la fonctionelle D.

En effet, ou peut démontrer les mêmes inégalités en toute généralité toujours à l'aide du théorème de Barlow-Yor mais d'une facon plus facile qu' on ne le croyait. (Il est même possible de libérer la démonstration du mouvement brownien pour faire plaisir aux analystes; cette démonstration qui repose sur la théorie des intégrales singulières va paraître ailleurs [5].)

1. L' intégrale d'aire et le mouvment brownien dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$.

Posons $(X_t, y_t) t < 0$ le processus "bruit de fond" dans [6]. Ce processus est obtenu par retournement du temps du processus $(\hat{X}_t, \hat{y}_t)$ $t < 0$ où $\hat{X}_t$ est le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$, partant de $x_o \in \mathbb{R}^n$, et $\hat{y}_t$ est le processus de Bessel d'indice 3, partant de $y = 0$. La mesure initiale est celle de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ Le retourné (X_t, y_t) se comporte comme le mouvement brownien "venant de l'infini": soit $\tau_a = \inf\{t < 0: y_t = a > 0\}$; alors $(X_{\tau_a + s}, y_{\tau_a + s})$, $0 < s < -\tau_a$, est le mouvement brownien issu du hyperplan $(\mathbb{R}^n, a)$ avec mesure initiale celle de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. (Voir [7] appendice) Ainsi le processus $(\hat{X}_t, \hat{y}_t)$ se présente comme le retourné du mouvement brownien conditioné à aboutir en $x_o \in \mathbb{R}^n$. Il est facile à calculer le potentiel associé à $(\hat{X}_t, \hat{y}_t)$. Soit

$$P_t(dx \,\|\, x_o) = c_n \; t^{-n/2} \exp\left(- \frac{|x_o - x|^2}{2t}\right) dx$$

et

$$Q_t(dy) = c_n t^{-3/2} y^2 \exp\left(- {y^2}/{2t}\right) dy \qquad \text{(Bes (3))}$$

Alors,

$$P_t(dx\, dy \,\|\, x_o) = P_t(dx \,\|\, x_o) \;\; Q_t(dy)$$

et le noyau potentiel

$$G(x_o, 0 \,;\, x,y) = c_n \, y^2 \int_0^\infty t^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \exp\left(- \frac{|x_o - x|^2 + y^2}{2t}\right) \frac{dt}{t}$$

$$= c_n \, y \, K_y(x_o - x)$$

où $K_y(x_o - x) = c_n\, y(|x_o - x|^2 + y^2)^{-(\frac{n+1}{2})}$, le noyau de Poisson dans $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

<u>Définition.</u> L'intégrale d'aire de Lusin dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

$$A(u)\ (x_o) = (\iint_{\Gamma(x_o)} y^{1-n}\ |\nabla\ u|^2(x,y)\ dx\ dy)^{1/2}$$

où $\Gamma(x_o) = \{(x,y):\ |x_o - x| < y,\ x_o \in \mathbb{R}^n\}$.

Pour une fonction F holomorphe dans $C_+ = \{z > 0\}$ $(= \mathbb{R}^2_+)$, $A^2(u)\ (x_o)$ est l'aire de l'image de $\Gamma\ (x_o)$ sur l'application F. Dans $\mathbb{R}^{n+1}_+$ il n'en est pas de même; néamoins il y a une interprétation brownienne. Il se trouve que $A^2(u)(x_o)$ est proportionel a l'ésperance conditionelle du temps intrinsèque d'occupation du cône $\Gamma(x_o)$ pour le processus $u(x_t,y_t)$. C'est à dire

$$A^2(u)(x_o) \simeq E(\int_0^\infty I_{\Gamma(x_o)} |\nabla u|^2(x_t,y_t) dt \| x_o)$$

En effet, cette ésperance se calcule facilement, compte tenu de la forme du noyau potentiel ci-dessus.

$$\begin{aligned} &E(\int_0^\infty I_{\Gamma(x_o)} |\nabla u|^2(x_t,y_t) dt \| x_o) \\ &= \iiint I_{\Gamma(x_o)} |\nabla u|^2(x,y) P_t(dxdy \| x_o) \\ &= \iint I_{\Gamma(x_o)} |\nabla u|^2(x,y)\ y\ K_y(x_o - x)\ dx\ dy \\ &\simeq \iint y^{1-n} |\nabla u|^2\ I_{\Gamma(x_o)}(x,y)\ dx\ dy. \end{aligned}$$

(Sur le cône $\Gamma(x_o)$, $K_y(x_o - x) \simeq y^{-n}$.)

Evidement cette équivalence est plus générale. Si on prend une bande $\{(x,y):\ r - \varepsilon < u\ (x,y) < r + \varepsilon\} = L(\varepsilon,r)$ alors

$$\begin{aligned} &E(\int^\infty I_{\Gamma(x_o) \cap L(\varepsilon,r)} |\nabla u|^2(x_t,y_t)\ dt \| x_o) \\ &\cong \iint y^{1-n} I_{\Gamma(x_o) \cap L(\varepsilon,r)}\ |\nabla u|^2(x,y)\ dx\ dy\ . \end{aligned}$$

En divisant par (2ε) de chaque côté, on peut passer à la limite lorsque ε tend vers zero. A gauche, on obtient l'espérance conditionelle du temps local en r $(L(u;r)(x_o))$du processus $u(x_t,y_t)$ restreint au cône $\Gamma(x_o)$. D'autre part, on désintègre l'intégrale d'aire à l'aide de la formule de co-aire (voir Federer [3]). Ainsi il se trouve que

$$E(L(u;r)\ (x_o)\ \| x_o) = D(u;r)\ (x_o).$$

et

$$D(u)(x_o) = \sup_r D(u;r)(x_o)$$

$$\leq E(\sup_r L(u;r)(x_o)\| x_o)\ .$$

A ce moment là, on invoque les inégalités de Barlow-Yor. Leur fonctionelle

$$L^*(u) = \sup_r L(u;r),$$

est une fonction maximale associée aux temps locaux $L(u;r)$. (On a supprimé la restriction au cône. Evidement, $L(u;r)(x_o) \leq L(u;r)$.) Pour $1 \leq p < \infty$ on a

$$\int |D(u)(x_o)|^p\, dx_o \leq \int |E(L^*(u)\| x_o)|^p\, dx_o$$

$$\leq \int E(L^{*p}(u)\| x_o)\, dx_o$$

$$= E((L^*)^p)$$

$$\leq C_p \|u\|_{H^p}$$

par les inégalités de Barlow-Yor et l'équivalence de H^p- analytique et H^p-probabilité [2].

On peut aussi démontrer la réciproque $(\|u\|_{H^p} \leq C_p\ \|D\|_p)$ et l'équivalence des normes pour $0 < p < 1$: voir [4] pour ces arguments. Ils n'ont rien à voir avec la restriction de dimension imposée.

Références

1. Barlow, M.T. et Yor, M., Semi-martingale Inequalities via the Garsia-Rodemich-Rumsey Lemma, and Applications to Local Times, _J. Functional Anal.,_ 49, 2, 198-229 (1982).

2. Burkholder, D.L. et Gundy, R.F., Boundary Behavior of Harmonic Functions in a Half-Space and Brownian Motion, _Ann. de l' Institut Fourier,_ 23, 4 (1973).

3. Federer, H. _Geometric measure theory_, Springer-Verlag, New York, (1969).

4. Gundy, R.F. The Density of the Area Integral, _Conference on Harmonic_ Analysis - _in Honor of A. Zygmund,_ Wadsworth, Vol. 1, 138-149 (1983).

5. Gundy, R.F. et Silverstein, M., The Density of the Area Integral in $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$, à paraître.

6. Gundy, R.F. et Varopoulos, N. Th., Les Transformations de Riesz et les Intégrales Stochastiques, _C.R. Acad. Sci._ Paris, t. 289 (2 juillet, 1979).

7. Meyer, P.A., Le Dual de H^1 $(\mathbb{R}^\nu)$: Démonstrations Probabilistes Exposé II, Appendice 2, pp. 176-195 _Sém de Probab_ Xl, Lecture Notes in Math, #581, Springer-Verlag, New York.

8. Stein, E.M. et Weiss, G. _On the Theory of Harmonic Functions_ of Several Variables I, The Theory of H^p Spaces, _Acta Math,_ 103,25-62 (1960).