SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Un résultat d'approximation

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 268-270
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__268_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1982/83

UN RESULTAT D'APPROXIMATION

par P.A. Meyer

Soit (X_t) une quasimartingale. A toute subdivision $\tau=(t_i)$ de $[0,1]$ associons la somme

(1) $$S_\tau(X) = \Sigma_i \, E[X_{t_{i+1}}-X_{t_i} | \underline{\underline{F}}_{t_i}]$$

Il est bien connu que, lorsque le pas de la subdivision tend vers 0, $S_\tau(X)$ converge faiblement dans L^1 vers A_1, où A est le processus à variation finie dans la décomposition canonique $X=X_0+M+A$. Si l'on veut, ce résultat peut être énoncé sans parler de quasimartingales : on a $S_\tau(X)=S_\tau(A)$, et il s'agit d'un théorème d'approximation concernant les processus prévisibles à variation intégrable.

Dans son travail récent sur les semimartingales gaussiennes, Stricker a été amené à étudier la convergence des sommes (1) relatives à un processus X qui est bien une semimartingale spéciale, mais dont on ignore a priori s'il est ou non une quasimartingale. La démonstration de Stricker est délicate, et je pense qu'il y a grand intérêt à la traduire dans le langage de la " théorie générale" en la débarrassant des ses éléments " gaussiens" . C'est le but de cette note.

Nous désignons par X une semimartingale indexée par $[0,1]$ (nous ne restreignons pas la généralité en supposant que $X_0=0$). Nous posons pour toute subdivision $\tau=(t_i)$ de $[0,1]$

(2) $$Q_\tau(X) = \Sigma_i \, (X_{t_{i+1}}-X_{t_i})^2 \quad .$$

THEOREME. <u>Supposons que les sommes</u> $\sqrt{Q_\tau(X)}$, <u>où</u> τ <u>parcourt la suite des subdivisions dyadiques de</u> $[0,1]$, <u>soient uniformément intégrables</u>. <u>Alors</u> X <u>est spéciale</u> - <u>on désigne par</u> M+A <u>sa décomposition canonique</u> - <u>et la martingale locale</u> M <u>appartient à</u> H^1 . <u>De plus</u> X_t <u>est intégrable pour</u> t <u>dyadique</u>, <u>et les sommes</u> $S_\tau(X)$ <u>relatives aux subdivisions dyadiques convergent vers</u> A_1 <u>au sens faible dans</u> L^1.

L'aspect intéressant de cet énoncé est le caractère purement " quadratique " de l'hypothèse, et le caractère " linéaire" de la conclusion.

DEMONSTRATION. L'hypothèse entraîne que $[X,X]_1^{1/2}$ est intégrable, donc X est spéciale. D'après Probabilités et Potentiel VII,95, $[A,A]_1^{1/2}$ et $[M,M]_1^{1/2}$ sont intégrables, donc M est dans H^1. Il est clair que X_t est intégrable pour t dyadique, donc $A_t=X_t-M_t$ l'est aussi. Soit H une v.a.

$\underline{\underline{F}}_1$-mesurable, bornée par 1 en valeur absolue. Introduisons la martingale $H_t=E[H|\underline{\underline{F}}_t]$. Remarquons que $S_\tau(X)=S_\tau(A)$; nous avons

$$E[HA_1] = E[H\Sigma_i(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})] = E[\Sigma_i H_{t_{i+1}}(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})]$$

de même $\quad E[HS_\tau(A)] = E[\Sigma_i H_{t_i}(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})]$

et par conséquent tout revient à montrer que, le long de la suite des subdivisions dyadiques

$$(3) \qquad E[\Sigma_i (H_{t_{i+1}}-H_{t_i})(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})] \to 0 .$$

Ces sommes convergent en probabilité vers $[H,A]_1$; or H est une martingale, A un processus à variation finie prévisible, donc (lemme de Yoeurp : PP VII.36) $[H,A]$ est une martingale locale nulle en 0. D'autre part, d'après une inégalité du type de Fefferman (PP, VII.93-95)

$$E[\int_0^1 |d[H,A]_s|] \leqq c\|H\|_{BMO} E[[A,A]_1^{1/2}] ,$$

donc la martingale $[H,A]$ est en fait à variation intégrable, et l'on a $E[[H,A]_1] = 0$. En définitive, ce qu'il nous faut montrer est l'intégrabilité uniforme des sommes

$$\Sigma_i (H_{t_{i+1}}-H_{t_i})(A_{t_{i+1}}-A_{t_i}) .$$

Nous sommes partis de l'hypothèse de l'intégrabilité uniforme des sommes $\sqrt{Q_\tau(X)}$; les sommes $\sqrt{Q_\tau(M)}$ sont uniformément intégrables, parce que M appartient à H^1 : en effet, on a $M^*\in L^1$, donc il existe une fonction de Young modérée G telle que $E[G(M^*)] < \infty$, et il existe une constante universelle c_G telle que

$$E[G([M,M]_1^{1/2})] \leqq c_G E[G(M^*)]$$

Mais en appliquant cela aux martingales discrétisées de M sur les subdivisions dyadiques, on a aussi

$$E[G(Q_\tau(M)^{1/2})] \leqq c_G E[G(M^*)]$$

et il suffit d'appliquer le lemme de La Vallée Poussin. Comme $\sqrt{Q_\tau(A)} \leqq \sqrt{Q_\tau(X)} + \sqrt{Q_\tau(M)}$, les v.a. à gauche sont aussi uniformément intégrables.

Appliquant le lemme de La Vallée Poussin dans le sens non évident, nous choisissons une fonction de Young modérée (encore notée G par économie) telle que $E[G(Q_\tau(A)^{1/2})]$ soit borné. Puis nous appliquons la remarque de Yor (combinaison de Fefferman et Garsia-Neveu) suivant laquelle l'inégalité de Fefferman, ou sa conséquence l'inégalité VII.(93.3) de PP, a lieu avec une fonction modérée sous la forme

$$E[G(\Sigma_i |H_{t_{i+1}}-H_{t_i}||A_{t_{i+1}}-A_{t_i}|)] \leqq c_G\|H\|_{BMO}E[G(Q_\tau(A)^{1/2})]$$

On conclut alors à nouveau par le lemme de La Vallée Poussin.

REMARQUES. 1) La situation étudiée par Stricker (cas gaussien) est plus simple, parce que les v.a. $Q_T(X)$ sont bornées dans L^1, les v.a. $\sqrt{Q_T(X)}$ bornées dans L^2 par conséquent l'hypothèse est satisfaite. Mais on peut écrire, au lieu de Fefferman, une inégalité du type de Kunita-Watanabe : prenant $r=3/2$, $p=4$, $q=4/3$ (donc $rq=2$)

$$E[(\Sigma_i |H_{t_{i+1}}-H_{t_i}||A_{t_{i+1}}-A_{t_i}|)^r] \leqq E[\, Q_T(H)^{r/2} Q_T(A)^{r/2}]$$
$$\leqq E[Q_T(H)^{rp/2}]^{1/p}\ E[Q_T(A)^{rq/2}]^{1/q}$$

A droite, le premier facteur est borné ((H_t) est une martingale bornée) et le second vaut $E[Q_T(A)]^{1/q}$, qui est aussi borné. Donc l'intégrabilité uniforme des sommes (3) est établie de manière bien plus élémentaire.

2) Peut on étendre ce résultat aux « processus de Dirichlet » (cf. Föllmer, Stochastic Integrals, proceedings of the Durham Symposium, LN 851, p. 477) ?

REFERENCE

C. STRICKER. Semimartingales gaussiennes. Application au problème de l'innovation. ZW 64, 1983, p. 303-312.

IRMA, 7 rue René Descartes
67084 Strasbourg-Cedex