

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHING SUNG CHOU

## Sur certaines généralisations de l'inégalité de Fefferman

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 18 (1984), p. 219-222

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1984\\_18\\_219\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984_18_219_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
http://www.numdam.org/*

# Séminaire de Probabilités XVIII

## SUR CERTAINES GENERALISATIONS DE L'INEGALITÉ DE FEFFERMAN

par CHOU Ching-Sung

Dans le travail [1], Yor a récemment démontré une généralisation utile de l'inégalité de Fefferman. Nous allons lui donner une forme plus simple et un peu plus générale.

### 1. QUELQUES RAPPELS

Nous commençons par rappeler le lemme de Lenglart-Lépingle-Pratelli (Sém. XIV, p.29), amélioré par Yor, et un peu généralisé par Meyer (nous remercions P.A. Meyer de nous avoir communiqué un cours sur les inégalités de martingales, dans lequel figure cet énoncé).

**LEMME 1.** Soient  $X$  un processus prévisible nul en 0,  $B$  un processus croissant prévisible tel que  $B_0 \geq 0$  (sans hypothèse de continuité à droite ou à gauche). On suppose que pour tout couple  $(S, T)$  de t. d'a. bornés tel que  $S \leq T$ , on a (  $q$  étant une constante  $> 0$  )

$$(1) \quad E[|X_T - X_S|^q] \leq P\{S < T\} \|B_T\|_{L^\infty}^q.$$

Alors :

a) On a pour  $\lambda > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $\beta > 1$

$$(2) \quad P\{X_\infty^* > \beta\lambda, B_\infty \leq \delta\lambda\} \leq (\beta-1)^q \delta^q P\{X_\infty^* > \lambda\}$$

$$(3) \quad E[G(X_\infty^*)] \leq c E[G(B_\infty)]$$

pour toute fonction  $G$  croissante et modérée (non nécessairement convexe),  $c$  dépendant seulement de  $G$  et de  $q$ .

La démonstration de ce lemme n'est pas vraiment différente de celle du lemme de Lenglart-Lépingle-Pratelli, et on ne la reproduit pas. Mais nous démontrerons le lemme suivant du cours de Meyer :

**LEMME 2.** Soient  $X$  un processus càdlàg adapté,  $B$  un processus croissant prévisible positif. On suppose que pour tout couple  $(S, T)$  de t. d'a. bornés tel que  $S \leq T$ , on a (en convenant que  $X_{0-} = 0$ )

$$(4) \quad E[|X_T - X_{S-}|^q | \mathcal{F}_S] \leq E[B_T^q | \mathcal{F}_S]$$

Alors pour toute fonction  $G$  modérée, on a

$$(5) \quad E[G(|X_T - X_{S-}|) | \mathcal{F}_S], E[G(|X_T^* - X_{S-}^*|) | \mathcal{F}_S] \leq c E[G(B_T) | \mathcal{F}_S]$$

DEMONSTRATION. Prenons  $S=T$  dans (4) ; nous obtenons  $|X_T - X_{T-}| \leq B_T$  p.s.. Puis, comme  $|a+b|^q \leq c_q (|a|^q + |b|^q)$

$$E[|X_{T-} - X_{S-}|^q | \mathcal{F}_S] \leq c E[B_T^q | \mathcal{F}_S]$$

Appliquant alors le lemme 1, on a

$$E[G(X_\infty^*)] \leq c E[G(B_\infty)]$$

Soit  $A \in \mathcal{F}_S$ . Nous appliquons ce résultat à  $\Omega' = A$ , avec la loi  $P' = P(\cdot \cap A) / P(A)$ ,  $\mathcal{F}'_t = \mathcal{F}_{S+t} | A$ ,  $X'_t = X_{S+t}^T - X_{S-}^T$ ,  $B'_t = B_{S+t}^T$ . On obtient l'inégalité suivante, plus forte que les inégalités (5)

$$(6) \quad E[G(\sup_{S \leq t \leq T} |X_t - X_{S-}|) | \mathcal{F}_S] \leq c E[G(B_T) | \mathcal{F}_S]$$

REMARQUE. Comme on peut prendre  $G(t) = t^p$ , on voit que toutes les relations du type

$$E[|X_T - X_{S-}|^q | \mathcal{F}_S] \leq c_q E[B_T^q | \mathcal{F}_S] \quad (q > 0)$$

sont équivalentes.

Nous appliquons ce résultat :

THEOREME 1. Soit  $(A_t)$  un processus croissant adapté continu à droite ( $A_{0-} = 0$ ) et soit  $(Z_t)$  l'unique processus optionnel tel que

$$(7) \quad Z_T^q = E[(A_\infty - A_{T-})^q | \mathcal{F}_T] \text{ p.s. pour tout } t. d'a. T ;$$

ici  $q > 0$  est tel que  $E[A_\infty^q] < \infty$ . Alors le processus croissant

$$(8) \quad C_t = \int_0^t dA_s / Z_s^*$$

engendre un potentiel gauche borné (par une constante dépendant seulement de  $q$ ).

DEMONSTRATION. Soit  $\varepsilon > 0$ . Posons  $U_t = Z_t^* + \varepsilon$ ,  $V_t = \int_0^t dA_s / U_s$ . Nous avons d'après (7)

$$U_T \geq Z_T \geq E[(A_T - A_{T-})^q | \mathcal{F}_T]^{1/q} = \Delta A_T$$

donc les sauts de  $V$  sont bornés par 1. Ensuite

$$\begin{aligned} E[(V_\infty - V_S)^q | \mathcal{F}_S] &= E[(\int_S^\infty dA_s / U_s)^q | \mathcal{F}_S] \leq \frac{1}{U_S^q} E[(A_\infty - A_S)^q | \mathcal{F}_S] \\ &\leq Z_S^q / U_S^q \leq 1. \end{aligned}$$

Comme les sauts de  $V$  sont bornés par 1, on a  $E[(V_\infty - V_{S-})^q | \mathcal{F}_S] \leq c_q$ , et on peut appliquer le lemme précédent (avec  $B$  constant), qui nous montre que  $E[V_\infty - V_{S-} | \mathcal{F}_S]$  est borné par une constante dépendant seulement de  $q$ . Après cela, on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0.

Nous arrivons maintenant à l'inégalité de Fefferman-Yor. Elle est simplifiée (car on voit apparaître  $Z^*$  lui-même et non un processus prévisible majorant  $Z$ ) et étendue à toutes les semimartingales, continues ou non.

## 2. AMELIORATION DE L'INEGALITE DE FEFFERMAN

THEOREME 2. Soient  $X$  et  $Y$  deux semimartingales,  $q$  une constante  $>0$ . On suppose que la v.a.  $[Y, Y]_{\infty}$  est p.s. finie, et l'on désigne par  $(Z_t)$  l'unique processus optionnel positif tel que

$$(9) \quad Z_T^q = E[ ([Y, Y]_{\infty} - [Y, Y]_{T-})^q | \mathcal{F}_T ] \text{ pour tout } t. d'a. T.$$

Alors on a

$$(10) \quad E[\int_0^{\infty} |d[X, Y]_s|] \leq c E[(\int_0^{\infty} Z_s^* d[X, X]_s)^{1/2}]$$

où la constante  $c$  dépend seulement de  $q$ .

DEMONSTRATION. Rappelons l'inégalité qui est à la base de la démonstration de l'inégalité de Fefferman classique, et qui repose uniquement sur l'inégalité de Kunita-Watanabe pour le crochet. Soient  $(U_t)$  et  $(V_t)$  deux processus optionnels positifs. Posons

$$\alpha_t = \int_0^t U_s d[X, X]_s, \quad \beta_t = \int_0^t V_s d[Y, Y]_s$$

Alors on a ( cf. Dellacherie-Meyer n° VII.86 ; les processus désignés ici par  $U, V$  sont les processus  $U^2, V^2$  de la référence )

$$(11) \quad E[\int_0^{\infty} \sqrt{U_s} \sqrt{V_s} |d[X, Y]_s|] \leq \sqrt{2} E[\sqrt{\alpha_{\infty}}]^{1/2} E[\int_0^{\infty} (\beta_{\infty} - \beta_{s-}) d\sqrt{\alpha_s}]^{1/2}.$$

Ici nous appliquerons cette inégalité en prenant  $U_t = Z_t^* + \varepsilon$  ( $\varepsilon$  tendra vers 0 à la fin de la démonstration) et  $V_t = 1/U_t$ . Le côté gauche de (11) est donc le même que le côté gauche de (10). Dans la dernière espérance à droite, on peut remplacer le processus  $\beta_{\infty} - \beta_{s-}$  par sa projection optionnelle, qui d'après le théorème 1 est bornée par une constante dépendant seulement de  $q$ . Le côté droit devient donc simplement  $c_q E[\sqrt{\alpha_{\infty}}]$ , et le théorème est établi.

En suivant Yor, nous obtenons le corollaire suivant :

THEOREME 3. On a pour toute fonction modérée  $G$

$$(12) \quad E[G(\int_0^{\infty} |d[X, Y]_s|)] \leq c(q, G) E[G((\int_0^{\infty} Z_s^* d[X, X]_s)^{1/2})].$$

DEMONSTRATION. Nous considérons les deux processus croissants

$$A_t = \int_0^t |d[X, Y]_s|, \quad B_t = (\int_0^t Z_s^* d[X, X]_s)^{1/2}$$

et nous appliquons le lemme de Lenglart-Lepingle-Pratelli ( lemme 1 ) aux processus prévisibles  $(A_{t-})$  et  $(B_{t-})$ , avec  $q=1$ . L'inégalité (1) revient au théorème 2, appliqué aux semimartingales  $X_t^* = X_{t-}^T - X_{S-}$ ,  $Y_t^* = Y_{t+S-}^T - Y_{S-}$  pour la filtration  $(\mathcal{F}_{S+t})$ .

REMARQUE. Plus généralement, si  $(H_t)$  est un processus optionnel, on peut majorer  $E[\int_0^\infty |H_s| |d[X, Y]_s|]$  au moyen de  $E[(\int_0^\infty H_s^2 Z_s^* d[X, X]_s)^{1/2}]$ . La démonstration est la même, et le théorème 3 se généralise de même. Lorsque  $H$  est prévisible, ce résultat découle directement du th.2 ou 3 en remplaçant  $X$  par  $H \cdot X$ .

### 3. UNE VARIANTE PREVISIBLE

Pratelli (Sém. Prob. X) a établi une inégalité de Fefferman faisant intervenir les crochets obliques de deux martingales. Nous allons généraliser ici cette inégalité. Ici nous devrons prendre  $q=1$ .

THEOREME 4. Soient  $X$  et  $Y$  deux semimartingales admettant des crochets obliques. On suppose que la v.a.  $\langle Y, Y \rangle_\infty$  est p.s. finie, et l'on désigne par  $(Z_t)$  l'unique processus prévisible tel que

$$(13) \quad Z_T = E[\langle Y, Y \rangle_\infty - \langle Y, Y \rangle_T | \mathcal{F}_T] \text{ pour tout temps prévisible } T$$

Alors on a

$$(14) \quad E[\int_0^\infty |d\langle X, Y \rangle_s|] \leq c E[(\int_0^\infty Z_{s-}^* d\langle X, X \rangle_s)^{1/2}] .$$

DEMONSTRATION. Le même raisonnement que pour (11) nous donne - avec la possibilité de choisir  $U$  et  $V$  optionnels

$$(15) \quad E[\int_0^\infty \sqrt{U_s} \sqrt{V_s} |d\langle X, Y \rangle_s|] \leq \sqrt{2} E[\sqrt{\alpha_\infty}]^{1/2} E[\int_0^\infty (\beta_\infty - \beta_{s-}) d\sqrt{\alpha_s}]^{1/2}$$

avec  $\alpha_t = \int_0^t U_s d\langle X, X \rangle_s$ ,  $\beta_t = \int_0^t V_s d\langle Y, Y \rangle_s$ . En effet, ce calcul repose seulement sur l'inégalité de Kunita-Watanabe. Nous prendrons ici  $U_t = Z_{t-}^* + \varepsilon$ ,  $V_t = 1/U_t$ . Alors  $\alpha$ ,  $\sqrt{\alpha}$  sont des processus prévisibles, et il nous suffit de vérifier que la projection prévisible du processus  $(\beta_\infty - \beta_{s-})$  est uniformément bornée, autrement dit que  $E[\beta_\infty - \beta_{T-} | \mathcal{F}_T] \leq c$  pour tout temps prévisible  $T$ . Utilisant une suite annonçant  $T$ , il suffit de vérifier que  $E[\beta_\infty - \beta_T | \mathcal{F}_T] \leq c$ . Or ceci vaut

$$E[\int_T^\infty d\langle Y, Y \rangle_s / Z_{s-}^* + \varepsilon | \mathcal{F}_T] \leq \frac{1}{Z_T^* + \varepsilon} E[\langle Y, Y \rangle_\infty - \langle Y, Y \rangle_T | \mathcal{F}_T] \leq 1 .$$

et le théorème est établi.

Il est ensuite facile de démontrer le théorème analogue au th. 3.

REMARQUE. Si l'on définit  $Z$  optionnel par

$$Z_T^q = E[(\langle Y, Y \rangle_\infty - \langle Y, Y \rangle_{T-})^q | \mathcal{F}_T] \text{ pour tout } t. \text{ d'a. } T$$

on a un résultat exactement analogue au théorème 2 (avec  $Z_s^*$  et non  $Z_{s-}^*$  au second membre) et la même démonstration que pour le th. 2.

Ref. [1] M. Yor: Inégalités de martingales continues arrêtées à un temps quelconque. Preprint (1983). A paraître dans un volume consacré au grossissement de filtrations.