SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

SHENG-WU HE
WEI-AN ZHENG

Remarques sur la convergence des martingales dans les variétés

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 174-178
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__174_0>

Séminaire de Probabilités XVIII

Remarques sur la Convergence des Martingales dans les Variétés

par S.W.He et W.A.Zheng

1. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une martingale à valeurs dans une variété riemannienne V, et soit $\langle X,X\rangle_t$ son processus croissant associé. Les résultats suivants sur la convergence de (X_t) sont déja bien connus (voir [2]).

Théorème 1. Sur l'ensemble où $\langle X,X\rangle_\infty < \infty$, X_∞ existe p.s. dans le compactifié d'Alexandrov de V. (Darling)

Théorème 2. Sur l'ensemble où X_∞ existe et appartient à V, on a p.s. $\langle X,X\rangle_\infty < \infty$. (Zheng)

Nous nous proposons dans cette note de généraliser ces résultats au cas des martingales indexées par $]0,\infty[$ et au cas non-riemannien. Il se trouve que les résultats restent valides dans le cas des martingales indexées par $]0,\infty[$, et que quand on remplace le processus croissant associé à (X_t) par le développement de (X_t), le théorème 2 peut être généralisé au cas non-riemannien.

2. Soit $(\Omega, \underline{\underline{F}}_t, \underline{\underline{F}}, P)$ l'espace de probabilité filtré de référence, et soit V une variété riemannienne. Nous disons qu'un processus continu $(X_t)_{t>0}$ à valeurs dans V est une martingale indexée par $]0,\infty[$, si pour tout $\varepsilon > 0$, $(X_{t+\varepsilon})_{t\geq 0}$ est une $(\underline{\underline{F}}_{t+\varepsilon})_{t\geq 0}$ martingale à valeurs dans V. Nous adoptons les définitions des martingales à valeurs dans une variété et des processus croissants associés proposées par Meyer dans ses travaux [1] et [2]. Etant donnée une martingale $(X_t)_{t>0}$ indexée par $]0,\infty[$, il y a une unique mesure aléatoire positive $d\langle X,X\rangle$ associée telle que pour tout $\varepsilon > 0$, $\langle X,X\rangle(]\varepsilon,\varepsilon+t])$ soit le processus croissant associé à la martingale $(X_{t+\varepsilon})_{t\geq 0}$. En étudiant le comportement de $(X_t)_{t>0}$ en 0, nous avons les théorèmes suivants analogues à 1,2.

Théorème 1'. Sur l'ensemble où $\langle X,X\rangle(]0,t]) < \infty$ (ne dépend pas de $t > 0$), $\lim_{t\downarrow 0} X_t$ existe p.s. dans le compactifié d'Alexandrov de V.

Théorème 2'. Sur l'ensemble où $\lim_{t\downarrow 0} X_t$ existe et appartient à V, on a p.s. $\langle X,X\rangle(]0,t]) < \infty$.

Nous considérons d'abord une semimartingale continue réelle $(X_t)_{t>0}$ indexée par $]0,\infty[$. En ce cas on a une mesure aléatoire positive continue $d\langle X,X\rangle$ et une mesure aléatoire prévisible continue dA, telle que pour tout $\varepsilon > 0$, $(X_{t+\varepsilon})_{t\geq 0}$ admette une représentation canonique

$$X_{t+\varepsilon} = X_\varepsilon + M_t^\varepsilon + A(]\varepsilon,t+\varepsilon]) \ , \quad t \geq 0$$

où $(M_t^\varepsilon)_{t\geq 0}$ est une $(\underline{\underline{F}}_{t+\varepsilon})_{t\geq 0}$ martingale locale, et $\langle M^\varepsilon,M^\varepsilon\rangle_t = \langle X,X\rangle(]\varepsilon,t+\varepsilon])$.

Meyer et Stricker [3] ont établi le résultat suivant:

Lemme 1. Pour que $(X_t)_{t>0}$ soit la restriction à $]0,\infty[$ d'une semimartingale continue, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites:

(1) $\langle X,X\rangle(]0,t]) < \infty$ p.s. $t > 0$,

(2) $\int_{]0,t]} |dA_s| < \infty$ p.s. $t > 0$.

Nous avons encore un résultat qui est simple mais utile.

Lemme 2. Si l'on a

$$\limsup_{t\downarrow 0} |X_t| < \infty, \ \int_{]0,t]} d\hat{A}_s < \infty, \quad t > 0 \text{ p.s.}$$

où $d\hat{A}$ est la partie positive de dA, alors $(X_t)_{t>0}$ est la restriction à $]0,\infty[$ d'une semimartingale continue.

Démonstration. Il est facile de voir que

$$Y_t = X_t - \int_{]0,t]} d\hat{A}_s, \ t > 0$$

est une sousmartingale locale indexée par $]0,\infty[$. Par arrêt nous pouvons supposer que $(Y_t)_{t>0}$ est bornée. Alors $(Y_t)_{t>0}$ est la restriction à $]0,\infty[$ d'une sousmartingale continue, et $(X_t)_{t>0}$ est celle d'une semimartingale continue.

On peut démontrer le théorème 1' en utilisant la même méthode que Meyer avait utilisée dans la démonstration du théorème 1. En utilisant les notations de [2] il suffit de prouver que pour chaque fonction f, de classe C^∞ et à support compact, définie sur V, $\lim_{t\downarrow 0} f(X_t)$ existe. En effet, $(f(X_t))_{t>0}$ est une semimartingale réelle continue indexée par $]0,\infty[$:

$$f(X_t) = f(X_\varepsilon) + \Sigma_i \int_\varepsilon^t D_i f(X_s)(dX_s^i + \frac{1}{2}\Sigma_{jk}\Gamma^i_{jk}(X_s)d\langle X^j,X^k\rangle_s)$$
$$+ \frac{1}{2}\Sigma_{jk}\int_\varepsilon^t (D_{jk}f - \Gamma^i_{jk}D_i f)(X_s)d\langle X^j,X^k\rangle_s \quad , \quad t \geq \varepsilon > 0.$$

Sur l'ensemble où $\langle X,X\rangle(]0,t]) < \infty$ (qui appartient à $\underline{\underline{F}}_0$), on a $\langle f(X),f(X)\rangle$

$(]0,t]) = \int_{]0,t]} D_i f(X_s) D_j f(X_s) d\langle X^i, X^j\rangle_s < \infty$ et $\int_{]0,t]} |(D_{jk}f - \Gamma^i_{jk} D_i f)(X_s)| \, |d\langle X^j, X^k\rangle_s|$ $< \infty$ p.s. Du lemme 1 on deduite que $\lim_{t\downarrow 0} f(X_t)$ existe p.s.

Pour le théorème 2' nous suivrons la démonstration de notre travail [4]. Par les même arguements (en remplacant le lemme 1 de [4] par le lemme 2 ci-dessus) on peut obtenir:

Soit $X_t = (X_t^1, \ldots, X_t^n)$, $t > 0$, une semimartingale continue à valeurs dans R^n et indexée par $]0,\infty[$, et soit

$$dA_s^i = \Sigma_{jk} H^i_{jk}(s) d\langle X^j, X^k\rangle_s$$

oùles H^i_{jk} sont des processus prévisibles, alors pour tout $k > 0$ il existe $C = C(k,n) > 0$ tel que sur l'ensemble

$$\{ \sup_i \sup_{t>0} |X_t^i| \leqslant k, \ \sup_{ijk} \limsup_{t\downarrow 0} |H^i_{jk}(t)| \leqslant C \},$$

en particulier, sur l'ensemble

$$\{ \text{pour tout } i,j,k, \ \lim_{t\downarrow 0} X_t^i \text{ existe}, \ \limsup_{t\downarrow 0} |H^i_{jk}(t)| < \infty \}$$

on ait pour tout i,j,k,

$$\int_{]0,t]} |d\langle X^j, X^k\rangle_s| < \infty , \quad \int_{]0,t]} |H^i_{jk}(s)| \, |d\langle X^j, X^k\rangle_s| < \infty \quad \text{p.s.}$$

Cela entraîne donc le théorème 2'.

3. Dans ce paragraphe nous supposons que V est une variété de dimension n avec une connexion Γ sans torsion. Dans [1] Meyer a donné la définition générale du développement d'une semimartingale $(X_t)_{t\geqslant 0}$ à valeurs dans V. En réalité, on peut définir le développement d'une semimartingale simplement de la maniere suivante. Pour simplifier la discussion nous supposons que $X_0 = x_0$ est fixe. Nous prenons comme $\Phi_t(\omega)$ le transport paralléle stochastique de T_{x_0} à $T_{X_t(\omega)}$ le long de la semimartingale (X_t), où T_a est l'espace tangent au point $a \in V$. Alors la semimartingale à valeurs dans T_{x_0}

$$\xi_t = \int_0^t \Phi_s^{-1} \Gamma(d^2 X_s)$$

est exactement le développement de (X_t). Naturellement on peut considérer (ξ_t) comme une semimartingale continue à valeurs dans R^n.

Nous savons que pour une martingale (X_t), son développement est une martingale locale continue dans R^n. Dans le cas où V est une variété riemannienne, on prend un repère orthonormé dans T_{x_0} et on dénote par $(\xi_t^1, \ldots, \xi_t^n)$ les processus coordonnées. Alors le processus croissant associé à (X_t) est

$$\langle X,X\rangle_t = \Sigma_\alpha \langle \xi^\alpha,\xi^\alpha\rangle_t$$

Donc la condition $\langle X,X\rangle_\infty < \infty$ est équivalente à la convergence du développement (ξ_t). Il est naturel que dans le cas non-riemannien on veuille discuter la relation entre la convergence des martingales à valeurs dans une variété et celle de leurs développements.

Théorème 2''. Soit (X_t) une martingale à valeurs dans V. Sur l'ensemble où X_∞ existe et appartient à V, ξ_∞ existe p.s.

Démonstration. Nous prenons comme repère $(H_{1t}, \ldots, H_{nt})$ le transport paralléle d'un repère $(H_{10}, \ldots, H_{n0})$ fixé au point x_o. Nous posons $\xi_t = \Sigma_\alpha \xi_t^\alpha H_{\alpha t}$ et $D_i = \Sigma_\alpha h_{it}^\alpha H_{\alpha t}$, alors dans une carte locale, nous avons

$$d\xi_t^\alpha = h_{it}^\alpha(dX_t^i + \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^i(X_t)d\langle X^j,X^k\rangle_t)$$

et

$$dh_{lt}^\alpha = h_{it}^\alpha\{\Gamma_{kl}^i(X_t)dX_t^k + \frac{1}{2}(D_m\Gamma_{kl}^i + \Gamma_{kj}^i\Gamma_{lm}^j)(X_t)d\langle X^m,X^k\rangle_t\}$$

Nous considérons le système des équations différentielles stochastique linéaires

$$dY_{lt}^\alpha = \Sigma_i Y_{it}^\alpha dZ_{lt}^i$$

qui a une unique solution non-explosive pour toutes les semimartingales continues (Z_{lt}^i). Sur l'ensemble où (Z_{lt}^i) ''converge parfaitement'' au sens de [4], (Y_{lt}^α) converge parfaitement p.s.

Maintenat, sur l'ensemble où X_∞ existe et appartient à V, (X_t^α) converge parfaitement. Cela entaîne que (h_{lt}^α) converge parfaitement. Finalement, (ξ_t^α) converge.

Malheureusement, nous ne savons pas encore si le théorème 1 reste valide dans le cas non-riemannien.

References

[1] P.A.Meyer: Géométrie stochastique sans larmes. Séminaire de Probabilités XV, Lecture Notes in Math, n° 850, Springer, 1981.

[2] P.A.Meyer: Le théorème de convergence des martingales dans les variétés rie-

manniennes. Séminaire de Probabilités XVII, Lecture Notes in Math.n° 986, Springer, 1983.

[3] P.A.Meyer, C.Stricker: Sur les semimartingales au sens de L.Schwartz. Mathematical Analysis and Applications, Part B. Essays dedicated to L.Schwartz. Edited by L.Nachbin. Academic Press, 1981.

[4] S.W.He, J.A.Yan, W.A.Zheng: Sur la convergence des semimartingales continues dans R^n et des martingales dans une variété. Séminaire de Probabilités XVIII, Lecture Notes in Math. n° 986, Springer, 1983.

[5] W.A.Zheng: Sur la convergence des martingales dans une variété riemannienne. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 63(1983) 511-515.

He Sheng Wu, Zheng Wei An

Ecole Normale Supérieure de Chine Orientale, Shanghai, Chine

et

Institut de Recherche Math. Avancée, Strasbourg, France