SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DAVID NUALART

Différents types de martingales à deux indices

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 398-417

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__398_0>

DIFFERENTS TYPES DE MARTINGALES A DEUX INDICES

D. Nualart (*)

Universitat de Barcelona

Le but de cet exposé est d'étudier le rapport entre les différents renforcements de la notion de martingale qui ont été introduits dans la théorie des processus à deux indices. On commence par donner les notations fondamentales et on rappelera quelques propriétés générales des martingales à deux indices. Les définitions de martingale forte, martingale à accroissements orthogonaux et martingale à variation indépendante du chemin, seront introduites d'abord dans le cadre général. On décrira après la situation dans les deux exemples de filtration à deux indices qu'on connaît le mieux la filtration naturelle du drap brownien et le cas d'une filtration produit de deux filtrations à un indice.

(*) Une partie de ce travail a été réalisée pendant un séjour à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg.

1. NOTATIONS ET GENERALITES SUR LES MARTINGALES A DEUX INDICES

L'espace de paramètres qu'on va utiliser sera R_+^2 muni de l'ordre partiel usuel $(s,t) \leq (s',t')$ si et seulement si $s \leq s'$ et $t \leq t'$. L'inégalité $(s,t) < (s',t')$ signifie $s < s'$ et $t < t'$. Si $z < z'$ on notera $]z,z']$ le rectangle $\{x \in R_+^2 : z < x \leq z'\}$. En particulier, le rectangle $[0,z]$ sera indiqué par R_z. D'une manière générale, on se refère à l'article de Meyer (1981) pour les notations et propriétés des processus à deux indices.

On considère un espace de probabilité complet (Ω, F, P) et une famille $\{F_z,\ z \in R_+^2\}$ de soustribus de F vérifiant les conditions habituelles (cf. Cairoli et Walsh, 1975):

F1. $F_z \subset F_{z'}$ si $z \leq z'$ (famille croissante);

F2. $P(A)=0$ entraîne $A \in F_0$;

F3. $\bigcap_{z<z'} F_{z'} = F_z$ pour tout z dans R_+^2 (continuité à droite);

F4. Pour chaque (s,t) dans R_+^2 les tribus $F_{s\infty} = \bigvee_{y \geq 0} F_{sy}$ et $F_{\infty t} = \bigvee_{x \geq 0} F_{xt}$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à F_{st}.

Les deux exemples les plus intéressants sont les suivants:

(a) $F_{st} = F_s^1 \vee F_t^2$, où $\{F_s^1,\ s \geq 0\}$ et $\{F_t^2,\ t \geq 0\}$ sont deux filtrations indépendantes vérifiant les conditions habituelles à un indice.

(b) La filtration naturelle d'un processus $\{X_z,\ z \in R_+^2\}$ à accroissements indépendants et continu à droite en probabilité. C'est à dire, F_z est engendrée par tous les ensembles négligeables et par les variables $X_{z'}$, $z' \leq z$. En particulier, nous serons intéressés au cas où X_z est un drap brownien, défini comme un processus gaussien, centré, continu et avec covariance $E(X_{st}X_{s't'}) = (s \wedge s')(t \wedge t')$.

Comme dans le cas d'un indice, on dira qu'un processus $\{M_z,\ z \in R_+^2\}$ intégrable et adapté à la filtration F_z est une <u>martingale</u> si pour tous $z \leq z'$ on a $E(M_{z'}/F_z) = M_z$. Pour chaque $p \geq 1$, M^p représentera la classe des martingales bornées dans L^p, c'est à dire, telles que $\sup_z E(|M_z|^p) < \infty$. Comme d'habitude on identifiera dans M^p deux versions du même processus. A cause des inégalités maximales (cf. Cairoli, 1970) on sait que toute martingale $\{M_z,\ z \in R_+^2\}$ de M^p (ou plus généralement bornée dans LlogL), avec $p > 1$, converge presque sûrement vers une limite $M_\infty \in L^p$, et $M_z = E(M_\infty / F_z)$. En plus, d'après un résultat remarquable de Bakry (1979) ces martingales possèdent une version continue à droite et pourvue de limites à gauche. On prendra toujours cette version qui est unique à une modification indistinguable près. Nous traiterons essentiellement le cas p=2, pour lequel M^2 est un espace de Hilbert et le sousensemble des martingales continues M_c^2 est un sous-espace fermé. Un point z_0 étant fixé, on peut considérer comme espace de paramètres le rectangle $[0,z_0]$ au lieu de R_+^2. On définit d'une façon analogue les espaces de martingales $M^p(z_0)$ pour $p \geq 1$, et les résultats qu'on énoncera dans M^p ont une extension immédiate à $M^p(z_0)$.

Pour établir le théorème de décomposition de Doob-Meyer pour les martingales à deux indices et de carré intégrable, on a besoin de la notion de martingale faible. On dira qu'un processus $\{M_z,\ z \in R_+^2\}$ intégrable et adapté à la filtration F_z est une <u>martingale faible</u> si $E(M(]z,z'])/F_z) = 0$ pour tous $z < z'$. Rappelons que $M(]z,z']) = M_{s't'} - M_{s't} - M_{st'} + M_{st}$ représente l'accroissement rectangulaire du processus M_z sur le rectangle $]z,z']$, $z = (s,t)$, $z' = (s',t')$.

Exactement comme dans le cas d'un paramètre, la <u>tribu prévisible</u> P dans $R_+^2 \times \Omega$ est définie comme la tribu engendrée par les ensembles $]z,z'] \times H$ où $z < z'$ et H appartient à F_z. D'autre part, on dira qu'un processus $\{A_z,\ z \in R_+^2\}$ est un processus croissant s'il est continu à droite, adapté, $A_0 = 0$, et vérifie $A(]z,z']) \geq 0$ pour tout rectangle $]z,z']$. On a alors le

THEOREME 1.1. <u>Soit</u> M <u>une martingale de</u> M^2. <u>Il existe un unique processus croissant prévisible</u> A, <u>nul sur les axes, tel que</u> $M^2 - A$ <u>soit une martingale faible</u>.

L'existence d'un tel processus croissant a été démontré par Cairoli et Walsh (1975). Le fait que le processus puisse être choisi prévisible et que dans ce cas il soit unique découle des résultats de Merzbach et Zakai (1980) sur les opérateurs de projection duale. On écrira $A = \langle M \rangle$. Le crochet $\langle M,N \rangle$ est défini par polarisation, comme d'habitude.

Soit M une martingale de M^2. On introduit l'espace L_M^2 des processus prévisibles $\phi = \{\phi(z),\ z \in R_+^2\}$ tels que $E(\int_{R_+^2} \phi^2\, d\langle M \rangle) < \infty$. L_M^2 est un espace de Hilbert avec la norme $[E(\int_{R_+^2} \phi^2\, d\langle M \rangle)]^{1/2}$ et en faisant les identifications usuelles. Alors, l'intégrale stochastique par rapport à la martingale M est une application linéaire et continue $\phi \longrightarrow \phi\cdot M$ de L^2_M dans M^2 determinée par la condition $(1_{]z_1,z_2]\times H}\cdot M)_z = 1_H\, M(]z_1,z_2]\cap R_z)$ où $z_1 < z_2$ et H appartient à F_{z_1}. Les propriétés de cette intégrale stochastique sont les mêmes qu'à un indice. En particulier, $<\phi\cdot M, \psi\cdot N>_z = \int_{R_z} \phi\psi\, d<M,N>$, et $\phi\cdot M\in M^2_c$ si $M \in M^2_c$.

2. MARTINGALES FORTES ET MARTINGALES A ACCROISSEMENTS ORTHOGONAUX

On introduira d'abord les définitions suivantes:

DEFINITION 2.1. On dira qu'une martingale M est <u>forte</u> si $E(M(]z,z'])/F_{s\infty} \vee F_{\infty t}) = 0$, pour $z < z'$, $z = (s,t)$.

DEFINITION 2.2. Soit M une martingale de M^2. On dira que M est une martingale <u>à accroissements orthogonaux dans le sens</u> 1 si pour tout couple de rectangles disjoints $]z_1,z_1']$ et $]z_2,z_2']$ on a $E(M(]z_1,z_1'])M(]z_2,z_2'])/F_{s_1\wedge s_2,\infty}) = 0$, où $z_i = (s_i,t_i)$, $i = 1,2$. Les martingales à accroissements orthogonaux dans le sens 2 ont une définition analogue. Finalement, on dira que M est à accroissements orthogonaux si elle l'est dans les deux sens.

REMARQUES

1. Toute martingale forte de M^2 est à accroissements orthogonaux. La proposition réciproque n'est pas vraie en général mais on verra dans la suite que pour les martingales continues et dans les deux exemples fondamentaux, ces notions coïncident.

2. Pour qu'un processus $M = \{M_z, z \in R^2_+\}$ intégrable et adapté soit une martingale forte il faut et il suffit que $E(M(]z,z'])/F_{s\infty} \vee F_{\infty t}) = 0$ pour tous $z < z'$, $z = (s,t)$ et que les processus $\{M_{s0}, F_{s0}, s \geq 0\}$ et $\{M_{0t}, F_{0t}, t \geq 0\}$ soient des martingales à un indice.

3. Soit M une martingale de M^2. Pour chaque $t \geq 0$ fixé, on notera $M_{.t}$ la martingale à un indice $\{M_{st}, F_{s\infty}, s \geq 0\}$. Les martingales $M_{s.}$ se définissent de la même façon. Alors, M est à accroissements orthogonaux dans le sens 1 si et seulement si pour tous $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ les martingales $M_{.t_2} - M_{.t_1}$ et $M_{.t_4} - M_{.t_3}$ sont orthogonales

(leur produit est une martingale). Si M appartient à $\mathcal{M}_c^2$ cela équivaut à dire que $\langle M_{.t_2} - M_{.t_1}, M_{.t_4} - M_{.t_3} \rangle = 0$.

Dans l'espace $\mathcal{M}^2$, l'ensemble des martingales fortes $\mathcal{M}_S^2$ est un sousespace fermé et l'ensemble des martingales à accroissements orthogonaux $\mathcal{M}_o^2$ est un sousensemble fermé. En plus, $\mathcal{M}_S^2 \subset \mathcal{M}_o^2$. Notons aussi que si M est une martingale de $\mathcal{M}_S^2$ $(\mathcal{M}_o^2)$ et ϕ est un processus prévisible de L_M^2, alors l'intégrale stochastique $\phi \cdot M$ appartient encore à $\mathcal{M}_S^2$ $(\mathcal{M}_o^2)$.

Le drap brownien est un exemple de martingale forte, par rapport à sa filtration naturelle. On pourrait dire que les martingales fortes, qui ont été introduites par Cairoli et Walsh (1975), possèdent des propriétés qui ressemblent beaucoup à celles des martingales à un indice. Par exemple, l'inégalité maximale démontrée par Walsh (1979) pour les martingales fortes, permet de prouver la convergence de toute martingale forte bornée dans L^1 et l'existence de versions continues à droite de telles martingales.

La notion de martingale à accroissements orthogonaux a été introduite dans un travail de M. Zakai (1981). On verra dans la suite que cette notion est plus naturelle que celle de martingale forte en ce qui concerne la construction de certaines intégrales stochastiques et l'obtention des théorèmes de décomposition pour M^2. Cette remarque a été déja faite dans l'article cité de M. Zakai, et aussi dans la thèse de X. Guyon et B. Prum.

On a besoin de quelques définitions supplémentaires. On dira qu'un processus $M = \{M_z, z \in R_+^2\}$ intégrable et adapté est une <u>1-martingale</u> si pour tout $t \geq 0$ le processus $\{M_{st}, s \geq 0\}$ est une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_{st}, s \geq 0\}$. A cause de la propriété F4, $\{M_{st}, s \geq 0\}$ est en fait une martingale par rapport à $\{\mathcal{F}_{s\infty}, s \geq 0\}$. Les 2-martingales se définissent de la même façon. Alors, M est une martingale si et seulement si elle est une 1 et 2-martingale.

La tribu $\mathcal{P}^1$ des ensembles <u>1-prévisibles</u> dans $R_+^2 \times \Omega$ est définie comme la tribu engendrée par les produits $]z,z'] \times H$ où $z = (s,t)$, $z < z'$ et H appartient à $\mathcal{F}_{s\infty}$. D'une façon analogue on introduit la tribu $\mathcal{P}^2$ des ensembles 2-prévisibles.

Si M est une martingale quelconque de $\mathcal{M}^2$ on peut considérer le processus $\langle M_{.t}\rangle_s$. Pour tout t fixé, ce processus a une version croissante et continue en s. En plus, $\langle M_{.t}\rangle_0 = 0$ et $M^2_{st} - \langle M_{.t}\rangle_s$ est une 1-martingale, mais en général il n'y a aucune raison pour que $\langle M_{.t}\rangle_s$ ait de bonnes propriétés en t à s fixé. On a le résultat suivant.

THEOREME 2.1. <u>Soit M une martingale de $\mathcal{M}^2$ à accroissements orthogonaux dans le sens i (i=1,2). Il existe un unique processus croissant i-prévisible $\langle M\rangle^i$ tel que $M^2 - \langle M\rangle^i$ est une i-martingale et $\langle M\rangle^i_{st} = 0$ si s = 0 (cas i=1) ou si t = 0 (cas i=2).</u>

Ce théorème est une extension immédiate du même résultat pour les martingales fortes (cf. Cairoli et Walsh, 1975). En réalité il suffit que M soit une i-martingale. Supposons par exemple i=1. L'idée de la démonstration consiste à prendre $\langle M\rangle^1_{st} = \langle M_{.t}\rangle_s$ pour chaque $t \geq 0$ fixé. Alors, de la même façon que l'égalité $E(M^2(]z,z'])/\mathcal{F}_z) = E(M(]z,z'])^2/\mathcal{F}_z)$ est l'util fondamental dans la preuve du théorème 1.1, nous avons dans le cas des martingales à accroissements orthogonaux dans le sens 1 la formule $E(M^2(]z,z'])/\mathcal{F}_{s\infty}) = E(M(]z,z'])^2/\mathcal{F}_{s\infty})$, z = (s,t). On déduit de cette égalité que $M^2_{.t_2} - M^2_{.t_1}$ est une sousmartingale pour $t_1 < t_2$ ce qui entraîne que le processus $\langle M_{.t}\rangle_s$ est croissant, et il suffit alors de prendre sa régularisation continue à droite.

Soit M une martingale de $\mathcal{M}^2$ à accroissements orthogonaux dans le sens 1. On considère l'espace $L^2_{\langle M\rangle^1}$ des processus $\phi = \{\phi(z),\ z \in R^2_+\}$ 1-prévisibles et tels que $E(\int_{R^2_+} \phi^2\, d\langle M\rangle^1) < \infty$. Alors on peut définir l'intégrale stochastique $\phi\cdot M$ pour tout processus ϕ de $L^2_{\langle M\rangle^1}$ de façon que $\phi\cdot M$ soit une 1-martingale et que $\langle\phi\cdot M\rangle^1_z = \int_{R_z} \phi^2\, d\langle M\rangle^1$.

Pour les martingales de $\mathcal{M}^4_o$ on peut aussi définir une intégrale double qui est utilisée par exemple, dans le théorème de représentation des martingales adaptées à la filtration du drap brownien. On considère la tribu $\mathcal{G}$ de parties de $R^2_+ \times R^2_+ \times \Omega$ engendrée par les ensembles de la forme $]z_1,z_1'] \times]z_2,z_2'] \times H$ où $H \in \mathcal{F}_{z_1 \vee z_2}$ et tels que tout couple de points $(s,t) \in]z_1,z_1']$ et $(s',t') \in]z_2,z_2']$ vérifie $s < s'$ et $t > t'$. L'intégrale stochastique d'un processus $\mathcal{G}$-mesurable élémentaire est définie de la façon suivante

$(1_{]z_1,z_1']\times]z_2,z_2']\times H}\cdot MM)_z = 1_H\, M(]z_1,z_1']\cap R_z)M(]z_2,z_2']\cap R_z)$.

La propriété d'être à accroissements orthogonaux de la martingale M permet d'étendre par isométrie cette intégrale stochastique double à la classe $\mathcal{L}^2_{MM}$ des processus $\psi = \{\psi(z,z'),\ (z,z') \in R_+^2 \times R_+^2\}$ $\mathcal{G}$-mesurables tels que:

(i) $\psi(z,z') = 0$ à moins que $s < s'$ et $t > t'$ où $z = (s,t)$ et $z' = (s',t')$.

(ii) $E(\int_{R_+^2}\int_{R_+^2} \psi^2(z,z')\, d\langle M\rangle^1_{z'}\, d\langle M\rangle^2_z) < \infty$.

L'intégrale stochastique $\psi\cdot MM$ est une martingale de $\mathcal{M}^2$, pour tout ψ dans $\mathcal{L}^2_{MM}$ qui est continue si M est continue. En plus, si $\phi \in \mathcal{L}^2_M$ et $\psi \in \mathcal{L}^2_{MM}$, le produit $(\phi\cdot M)(\psi\cdot MM)$ est une martingale faible.

Si M est une martingale quelconque de $\mathcal{M}^2$, la différence $M^2 - \langle M\rangle$ est une martingale faible et on sait que toute martingale faible est la somme d'une 1-martingale et d'une 2-martingale (cf. Meyer, 1981). Il n'y aura pas d'unicité dans cette décomposition à cause du fait que toute martingale est à la fois une 1-martingale et une 2-martingale. Nous allons montrer que pour les martingales continues de $\mathcal{M}^2$ la propriété d'être à accroissements orthogonaux dans une direction entraîne la continuité de $\langle M\rangle$ et permet d'établir une bonne décomposition de $M^2 - \langle M\rangle$. Remarquons qu'on ne sait pas montrer la continuité de $\langle M\rangle$ pour une martingale quelconque M de $\mathcal{M}^2_c$.

THEOREME 2.2. <u>Soit</u> M <u>une martingale de</u> $\mathcal{M}^2_c$ <u>à accroissements orthogonaux dans le sens</u> 1 <u>et nulle sur les axes. Alors,</u>

(i) <u>le processus</u> $\langle M_{s.}\rangle_t$ <u>est continu et</u> $m_1(s,t) = M^2_{st} - \langle M_{s.}\rangle_t$ <u>est une martingale,</u>

(ii) $\langle M\rangle$ <u>est continu et</u> $M^2 - \langle M\rangle$ <u>est une</u> 1-<u>martingale</u>.

<u>En conséquence,</u> $m_2(s,t) = \langle M_{s.}\rangle_t - \langle M\rangle_{st}$ <u>est une</u> 1-<u>martingale continue, à variation finie en</u> t, <u>et</u> $M^2 = m_1 + m_2 + \langle M\rangle$.

DEMONSTRATION. (i) Il suffit de montrer que m_1 est une 1-martingale à trajectoires continues. On fixe un point (s_0,t_0) dans R_+^2 et on considère une suite décroissante $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = t_0$ de partitions de l'intervalle $[0,t_0]$ dont le pas tend vers zéro. Pour tout

$(s,t) \in R_{s_0t_0}$, $m_1(s,t)$ est la limite en L^1 de la suite

$$N^n_{st} = \Sigma^{n-1}_{i=0}\ 2\ M_{st^n_i}(M_{s,t^n_{i+1}\wedge t} - M_{s,t^n_i\wedge t}).$$

Comme M est à accroissements orthogonaux dans le sens 1, pour tout n, $\{N^n_{st}, F_{s\infty}, s \geq 0\}$ est une martingale et, en conséquence, m_1 est une 1-martingale. Pour montrer la continuité de m_1, on écrit pour $\varepsilon > 0$

$$P\{\sup_{s,t \in R_{s_0t_0}} |N^n_{st} - N^m_{st}| > \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon} E(\sup_{t \leq t_0} |N^n_{s_0t} - N^m_{s_0t}|).$$

Pour tout $n \geq 1$ on considère le processus

$$\phi^n_t = \Sigma^{n-1}_{i=0}\ 2\ M_{s_0t^n_i}\ 1_{]t^n_i,t^n_{i+1}]}(t)$$

et, alors, $N^n_{s_0\cdot} = \phi^n\cdot M_{s_0\cdot}$.

D'après l'inégalité de Davis on obtient

$$E(\sup_{t \leq t_0}|N^n_{s_0t} - N^m_{s_0t}|) \leq 4\ E(<N^n_{s_0\cdot} - N^m_{s_0\cdot}>^{1/2})$$

$$= 4\ E\ [\ (\int_0^{t_0}(\phi^n_t - \phi^m_t)^2\ d<M_{s_0\cdot}>_t)^{1/2}]$$

$$\leq 4\ E\ [\ (\sup_{t \leq t_0}|\phi^n_t - \phi^m_t|)(<M_{s_0\cdot}>_{t_0})^{1/2}]$$

$$\leq 4\ [E(\sup_{t \leq t_0}|\phi^n_t - \phi^m_t|^2)\ E(<M_{s_0\cdot}>_{t_0})]^{1/2} \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0,$$

à cause de la continuité de M et en utilisant un argument de convergence dominée. Donc, $\lim_{n,m \to \infty} P\{\sup_{s,t\in R_{s_0t_0}} |N^n_{st} - N^m_{st}| > \varepsilon\} = 0$ et ceci entraîne la continuité de m_1.

(ii) Le théorème 2.1 nous dit qu'il suffit de montrer que le processus croissant $<M>^1$ est continu. En effet, dans ce cas, $<M>^1 = <M>$ et $M^2 - <M>$ est une 1-martingale. La méthode suivante pour montrer la continuité de $<M>^1$ nous a été communiqué par D. Bakry. D'abord, comme les processus $<M>^1_{st}$ et $<M>^1_{st-}$ sont 1-prévisibles, l'ensemble $\{(s,t,\omega): <M>^1_{st} \neq <M>^1_{st-}\}$ appartient à P^1. Remarquons que la tribu P^1 coincide avec le produit de la tribu borélienne de R_+ par la tribu des ensembles prévisibles de la filtration $F_{s\infty}$. On fixe un point (s_0,t_0) dans R^2_+. Alors, pour $\varepsilon > 0$, $S = \inf\{0 \leq s \leq s_0$: il existe un $t \leq t_0$ tel que $<M>^1_{st} - <M>^1_{st-} > \varepsilon\}$ est un temps d'arrêt prévisible par rapport à la filtration $F_{s\infty}$. Soit $T = \inf\{t \geq 0: <M>^1_{St} - <M>^1_{St-} > \varepsilon\}$. T est une variable aléatoire $F_{S-\infty}$ -mesurable.

Considérons l'ensemble $B = \{(s,t,\omega): 0 \leqslant s \leqslant S(\omega),\ T(\omega)=t\}$. Soit $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = t_0$ une suite décroissante de partitions de $[0,t_0]$ dont le pas tend vers zéro. On définit les temps d'arrêt prévisibles (par rapport à la filtration $F_{s\infty}$) $S_n^i = S_{\{T \in]t_i^n, t_{i+1}^n]\}}$, $i=0,1,\ldots,n-1$, $n \geqslant 1$. On peut écrire l'ensemble B comme l'intersection décroissante des ensembles $\cup_{i=0}^{n-1}\left[]t_i^n,t_{i+1}^n] \times \{(s,\omega): \infty > S_n^i(\omega) \geqslant s\}\right]$.
En conséquence, B appartient à P^1 et on peut considérer l'intégrale stochastique $M(B) = \int_{R_{s_0t_0}} 1_B dM$. Comme les temps d'arrêt S_n^i sont prévisibles et M est continue, on a $M(B) = 0$ et par isométrie on obtient $E[(\langle M\rangle^1_{ST} - \langle M\rangle^1_{ST-})\ 1_{\{S<\infty\}}] = 0$, ce qui implique $P\{S < \infty\} = 0$.
Donc, $\langle M\rangle^1$ est continu. □

3. MARTINGALES A ACCROISSEMENTS ORTHOGONAUX DANS LA FILTRATION BROWNIENNE

Dans cette partie, F_z représentera la filtration naturelle d'un drap brownien $\{W_z,\ z \in R_+^2\}$. W est une martingale forte telle que $\langle W\rangle_{st} = st$. Comme W appartient à $M^p(z_0)$ pour tous $z_0 \in R_+^2$ et $p \geqslant 1$, on peut introduire les espaces de processus prévisibles L_W^2 et L_{WW}^2. Nous rappelons d'abord le théorème de représentation de Wong et Zakai (1974).

THEOREME 3.1. <u>Soit M une martingale de M^2. Il existent deux processus uniques $\phi \in L_W^2$ et $\psi \in L_{WW}^2$ tels que $M_z = M_0 + (\phi\cdot W)_z + (\psi\cdot WW)_z$, pour tout z dans R_+^2.</u>

Cela entraîne que $M^2 = M_c^2$. D'autre part les martingales du type $M_0 + (\phi\cdot W)_z$ sont fortes. Réciproquement, toute martingale forte de M^2 est de cette forme. Ce résultat a été démontré par Cairoli et Walsh (1975), mais c'est aussi une conséquence du théorème suivant qui établit l'équivalence entre les martingales fortes de carré intégrable et les martingales à accroissements orthogonaux.

THEOREME 3.2. <u>Toute martingale M de M^2 à accroissements orthogonaux dans le sens 1 (ou dans le sens 2) est de la forme $M_z = M_0 + (\phi\cdot W)_z$.</u>

Une première démonstration que nous avions faite de ce théorème (cf. Nualart, 1981) contient quelques implications non justifiées et nous allons présenter ici une version détaillée et complète de cette preuve.

DEMONSTRATION. Soit $M_z = (\phi\cdot W)_z + (\psi\cdot WW)_z$. Supposons que M est à accroissements orthogonaux dans le sens 1. En utilisant un théorème de Fubini pour l'intégrale double (cf. Cairoli et Walsh, 1975) on peut écrire M_z comme l'intégrale stochastique d'un processus 1-prévisible. C'est à dire, $M_z = \int_{R_z} \delta(t,z')dW_{z'}$, où $z=(s,t)$ et $\delta(t,z') = \phi(z') + \int_{[0,s']\times[t',t]} \psi(z'',z')dW_{z''}$, avec $z'=(s',t')$. Pour $t_1 < t_2$ nous avons

$$M_{st_2} - M_{st_1} = \int_{R_+^2} (\delta(t_2,z')1_{R_{st_2}}(z') - \delta(t_1,z')1_{R_{st_1}}(z'))dW_{z'} ,$$

et, en conséquence,

$$\langle M_{.t_2} - M_{.t_1}, M_{.t_1}\rangle_s = \int_{R_{st_1}} (\delta(t_2,z')-\delta(t_1,z'))\delta(t_1,z')dz'.$$

Cette expression doit être nulle pour tout s, ce qui entraîne

$$\int_0^{t_1} (\delta(t_2,sy)-\delta(t_1,sy))\delta(t_1,sy)dy = 0.$$

Comme $\delta(t_2,sy)-\delta(t_1,sy) = \int_{[0,s]\times[t_1,t_2]} \psi(z',sy)dW_{z'}$, on obtient $\int_0^{t_1} \psi(z',sy)\delta(t_1,sy)dy = 0$, c'est à dire

$$\int_0^{t_1} \psi(z',sy)[\phi(s,y) + \int_{[0,s]\times[y,t_1]} \psi(z'',sy)dW_{z''}]dy = 0.$$

Fixé un point quelconque $t_1 \geq 0$, cette relation est vraie pour tous $\omega \in \Omega$, $s \geq 0$ et $z' \in [0,s] \times [t_1,\infty[$ presque partout par rapport à la mesure produit. On fixera alors s et z' de façon que presque pour tout ω l'égalité soit vraie pour tout t_1. Notons que le premier terme $\int_0^{t_1} \psi(z',sy)\phi(s,y)dy$ est une fonction absolument continue de t_1, donc, la même propriété est satisfaite pour le deuxième terme. Celui-ci peut s'écrire comme $\int_0^\infty (\int_{R_{st_1}} \psi(z'',sy)dW_{z''})\psi(z',sy)dy$, mais en général il ne peut pas s'exprimer comme une intégrale stochastique dans R_{st_1}, c'est à dire, on ne peut pas commuter les intégrales. Fixé $T > 0$, soit $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = T$ une suite décroissante de partitions de $[0,T]$ dont le pas tend vers zéro. D'abord nous allons montrer que pour $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ on a

$$\lim_n \Sigma_{i=0}^{n-1} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} (\int_{\Delta_{in}(s)} \psi(z'',sy_1)dW_{z''})(\int_{\Delta_{in}(s)} \psi(z'',sy_2)dW_{z''}) \times$$
$$\psi(z',sy_1)\psi(z',sy_2)dy_1dy_2 = 0, \qquad (3.1)$$

où $\Delta_{in}(s) = [0,s] \times [t_i^n, t_{i+1}^n]$.

En effet, chaque terme de cette suite est majoré en valeur absolue par

$$|\Sigma_{i=0}^{n-1}(\int_{t_i^n \wedge t_1}^{t_{i+1}^n \wedge t_1} \psi(z',sy)\phi(s,y)dy)(\int_{t_i^n \wedge t_2}^{t_{i+1}^n \wedge t_2} \psi(z',sy)\phi(s,y)dy)|$$

$$\leqslant (\sup_i \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} |\psi(z',sy)\phi(s,y)|dy) \int_0^T |\psi(z',sy)\phi(s,y)|dy \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

D'autre part, pour tous y_1 et y_2 dans $[0,T]$, la somme

$$\Sigma_{i=0}^{n-1}(\int_{\Delta_{in}(s)} \psi(z'',sy_1)dW_{z''})(\int_{\Delta_{in}(s)} \psi(z'',sy_2)dW_{z''})$$

converge en $L^1(\Omega,F,P)$, quand $n \to \infty$, vers $\int_{R_{sT}} \psi(z'',sy_1)\psi(z'',sy_2)dz''$. Cette convergence a lieu aussi dans l'espace $L^1([0,T]^2 \times \Omega)$. En effet, on sait que

$$E(|\Sigma_{i=0}^{n-1}(\int_{\Delta_{in}(s)} \psi(z'',sy_1)dW_{z''})(\int_{\Delta_{in}(s)} \psi(z'',sy_2)dW_{z''})$$

$$- \int_{R_{sT}} \psi(z'',sy_1)\psi(z'',sy_2)dz''|) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

et par convergence dominée, il suffit de voir que cette suite est bornée par une fonction intégrable du couple (y_1,y_2). Mais, cela est une conséquence des inégalités suivantes

$$E(|\Sigma_{i=0}^{n-1}(\int_{\Delta_{in}(s)} \psi(z'',sy_1)dW_{z''})(\int_{\Delta_{in}(s)} \psi(z'',sy_2)dW_{z''})|)$$

$$\leqslant [E(\Sigma_{i=0}^{n-1}(\int_{\Delta_{in}(s)} \psi(z'',sy_1)dW_{z''})^2)E(\Sigma_{i=0}^{n-1}(\int_{\Delta_{in}(s)} \psi(z'',sy_2)dW_{z''})^2)]^{1/2}$$

$$= [(\int_0^T E(\psi(z'',sy_1)^2)dz'')(\int_0^T E(\psi(z'',sy_2)^2)dz'')]^{1/2}.$$

Alors, quitte à extraire une soussuite, pour tout (y_1,y_2,ω) dans $[0,T]^2 \times \Omega$, presque partout, on aura

$$\lim_n \Sigma_{i=0}^{n-1}(\int_{\Delta_{in}(s)} \psi(z'',sy_1)dW_{z''})(\int_{\Delta_{in}(s)} \psi(z'',sy_2)dW_{z''})$$

$$= \int_{R_{sT}} \psi(z'',sy_1)\psi(z'',sy_2)dz''. \qquad (3.2)$$

En conséquence, on peut fixer $\omega \in \Omega$, hors d'un ensemble de probabilité zéro de façon que (3.1) soit vraie pour tous $t_1 < t_2$ dans $[0,T]$ et (3.2) soit vraie pour tous y_1, y_2 dans $[0,T]$, presque partout. Cela entraîne

$$(\int_{R_{sT}} \psi(z'',sy_1)\psi(z'',sy_2)dz'')\psi(z',sy_1)\psi(z',sy_2) = 0.$$

En intégrant par rapport à z' on obtient $\int_{R_{sT}} \psi(z',sy_1)\psi(z',sy_2)dz' = 0$. Donc, $\int_B \psi(z',sy)dy = 0$ pour tout borélien B de $[0,T]$ et pour tous ω, z' et s presque partout. C'est à dire, $\psi = 0$. □

REMARQUE. Soit F_z la filtration engendrée par n draps browniens indépendants $W_z^1, \ldots, W_z^n$, $z \in R_+^2$. On peut montrer de la même façon que toute martingale M de M_c^2 à accroissements orthogonaux dans le sens 1 (ou dans le sens 2) est de la forme $M_z = M_0 + \Sigma_{i=1}^n (\phi_i \cdot W^i)_z$. En conséquence, M est forte.

4. MARTINGALES A ACCROISSEMENTS ORTHOGONAUX DANS UNE FILTRATION PRODUIT

Dans cette section on va considérer une famille de tribus de la forme $F_{st} = F_s^1 \vee F_t^2$, où $\{F_s^1, s \geq 0\}$ et $\{F_t^2, t \geq 0\}$ sont deux filtrations indépendantes vérifiant les conditions habituelles. Si on écrit $F_\infty^1 = \bigvee_{s\geq 0} F_s^1$ et $F_\infty^2 = \bigvee_{t\geq 0} F_t^2$, on aura $F_{s\infty} = F_s^1 \vee F_\infty^2$ et $F_{\infty t} = F_\infty^1 \vee F_t^2$ et, en conséquence, $F_{s\infty} \vee F_{\infty t} = F_\infty^1 \vee F_\infty^2$. Cela entraîne qu'une martingale $M = \{M_z, z \in R_+^2\}$ est forte si et seulement si $M(]z_1,z_2]) = 0$ pour $z_1 < z_2$; c'est à dire, les martingales fortes sont exactement celles de la forme $M_{st} = M_{s0} + M_{0t} - M_{00}$. Ceci est équivalent à dire que toute martingale forte qui s'annulle sur les axes est nulle. Nous allons montrer que les martingales continues à accroissements orthogonaux sont aussi triviales.

THEOREME 4.1. <u>Toute martingale</u> M <u>de</u> M_c^2, <u>à accroissements orthogonaux dans le sens</u> 1 (<u>ou dans le sens</u> 2) <u>et qui est nulle sur les axes, est identiquement nulle</u>.

DEMONSTRATION. On peut supposer, sans perte de généralité, que (Ω,F,P) est un espace produit $(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}, F^{(1)} \otimes F^{(2)}, P^{(1)} \otimes P^{(2)})$. Nous identifierons alors les filtrations F_s^1 et F_t^2 avec des familles de soustribus de $F^{(1)}$ et de $F^{(2)}$, respectivement, qui seront représentées par $\{F_s^{(1)}, s \geq 0\}$ et $\{F_t^{(2)}, t \geq 0\}$. On aura aussi, $F_{st} = F_s^{(1)} \otimes F_t^{(2)}$. Enfin, on peut admetre encore que $F^{(1)} = F_\infty^{(1)}$ et que $F^{(2)} = F_\infty^{(2)}$.

D'abord on montrera qu'il y a une isométrie entre M^2 et l'espace $M^2(L^2(P^{(1)}))$ des martingales par rapport à la filtration $\{F_t^{(2)}, t \geq 0\}$, à valeurs dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega^{(1)}, F^{(1)}, P^{(1)})$ et bornées dans L^2.

En effet, soit M una martingale de M^2. Pour tout $t \geq 0$ fixé, et pour $\omega_2 \in \Omega^{(2)}$, $P^{(2)}$-presque sûrement, la variable aléatoire $M_{\infty t}^{\omega_2} : \omega_1 \longrightarrow M_{\infty t}(\omega_1, \omega_2)$ appartient à $L^2(\Omega^{(1)}, F^{(1)}, P^{(1)})$ et on peut considérer le processus $\{M_{\infty t}^{\omega_2}, t \geq 0\}$ défini dans l'espace de probabilité $(\Omega^{(2)}, F^{(2)}, P^{(2)})$ et à valeurs dans $L^2(\Omega^{(1)}, F^{(1)}, P^{(1)})$. Ce processus est adapté à la filtration $F_t^{(2)}$ parce que $M_{\infty t}$ est $F_{\infty t} = F^{(1)} \otimes F_t^{(2)}$-mesurable. En fait il est une martingale puis que si $t_1 < t_2$ et si F appartient à $F_{t_1}^{(2)}$ on a

$$E_2[(M_{\infty t_2} - M_{\infty t_1})1_F] = E[(M_{\infty t_2} - M_{\infty t_1})1_F / F^{(1)}]$$

$$= E[E[(M_{\infty t_2} - M_{\infty t_1})1_F / F_{\infty t_1}] / F^{(1)}] = 0,$$

pour tout ω_2, $P^{(2)}$-presque partout. Ici E_2 indique l'espérance dans l'espace $(\Omega^{(2)}, F^{(2)}, P^{(2)})$. Enfin, cette martingale est bornée dans L^2 avec une norme donnée par $(E[(M_\infty)^2])^{1/2}$.

Supposons maintenant que M est continue, nulle sur les axes et à accroissements orthogonaux dans le sens 1. On notera X_t la martingale $\{M_{\infty t}, F_t^{(2)}, t \geq 0\}$ à valeurs dans $L^2(P^{(1)})$. Dans ce cas $X_0 = 0$ et X_t est continue à cause de la continuité de M. En plus, la martingale X_t vérifie la condition suivante

$$E_1((X_{t_2} - X_{t_1})X_{t_1}) = E_1((M_{\infty t_2} - M_{\infty t_1})M_{\infty t_1})$$

$$= E[(M_{\infty t_2} - M_{\infty t_1})M_{\infty t_1} / F^{(2)}]$$

$$= E[E[(M_{\infty t_2} - M_{\infty t_1})M_{\infty t_1} / F_{0\infty}] / F^{(2)}] = 0,$$

pour $t_1 < t_2$ et $\omega_2 \in \Omega^{(2)}$, presque partout. Alors le théorème découle immédiatement du lemme suivant, en ayant compte que, dû à la continuité de M, la martingale X prend ses valeurs dans une partie séparable de $L^2(\Omega^{(1)}, F^{(1)}, P^{(1)})$. □

LEMME 4.1. Soit $\{X_t, F_t, t \geq 0\}$ une martingale continue, nulle en 0, à valeurs dans un espace de Hilbert séparable H et telle que $\langle X_t - X_s, X_s\rangle_H = 0$, p.s., pour tout $s < t$, où $\langle .,.\rangle_H$ représente le produit scalaire dans H. Alors, X est identiquement nulle.

DEMONSTRATION. La continuité de X entraîne que, hors d'un ensemble N de probabilité zéro, on a $\langle X_t(\omega) - X_s(\omega), X_s(\omega)\rangle_H = 0$ pour tous $s < t$. On fixe $a \in H$. Le processus $\{\langle X_t, a\rangle_H, F_t, t \geq 0\}$ est une martingale rélle continue, nulle en 0. Si on montre que sa variation quadratique est nulle, la preuve du lemme sera finie, à cause de la séparabilité de H. Soit $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = T$ une suite décroissante de partitions d'un intervalle $[0,T]$, dont le pas tend vers zéro. On considère la décomposition orthogonale

$$a = \Sigma_{i=0}^{n-1} \lambda_i (X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n)) + b,$$

un élément $\omega \in \Omega - N$ étant fixé. Notons que les λ_i dépendent de ω. On a finalement

$$\Sigma_{i=0}^{n-1} |\langle X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n), a\rangle_H|^2 = \Sigma_{i=0}^{n-1} \lambda_i^2 \, \|X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n)\|_H^4$$

$$\leq \|a\|^2 (\sup_i \|X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n)\|_H^2) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0. \ \square$$

La propriété de continuité est une condition nécessaire dans le théorème précédant. C'est à dire, la propriété de martingale forte est en général plus restrictive que celle de martingale à accroissements orthogonaux.

EXEMPLE. Dans un espace de probabilité complet (Ω, F, P) on considère la filtration à un indice $F_t = F$ pour $t \geq 1$ et F_t triviale pour $\theta \leq t < 1$. On obtient la forme générale des martingales par rapport au produit de deux copies de cette filtration, en choisissant une variable aléatoire intégrable X :

$$X_{st} = X \, 1_{[1,\infty[\times [1,\infty[}(s,t) + (\int X(\omega_1,\omega_2) P(d\omega_1)) 1_{[0,1[\times [1,\infty[}(s,t)$$

$$+ (\int X(\omega_1,\omega_2) P(d\omega_2)) 1_{[1,\infty[\times [0,1[}(s,t)$$

$$+ (\int\int X(\omega_1,\omega_2) P(d\omega_1) P(d\omega_2)) 1_{[0,1[\times [0,1[}(s,t).$$

Dans ce cas, X_{st} est une martingale forte si et seulement si $X = \int X P(d\omega_1) + \int X P(d\omega_2) - \int\int X P(d\omega_1) P(d\omega_2)$. Il est clair qu'il peut y avoir des martingales non fortes. Par contre, toutes les martingales de carré intégrable sont à accroissements orthogonaux.

5. MARTINGALES A VARIATION INDEPENDANTE DU CHEMIN

Dans cette section on s'intéressera seulement à des martingales de l'espace $\mathcal{M}_c^2$. Si M est une martingale de cet espace on peut se demander sous quelles conditions $M^2 - \langle M\rangle$ est une vraie martingale. Celle question est liée à la propriété d'avoir la même variation quadratique au long de tout chemin croissant et continu qui va de l'origine à un point fixé de R_+^2. Plus précisément, désignons par Γ l'ensemble des courbes $\gamma : [0,1] \longrightarrow R_+^2$ croissantes, continues et telles que $\gamma(0) = (0,0)$. La restriction d'une martingale M à une telle courbe donne lieu à une martingale à un indice $M_\gamma = \{M_{\gamma(t)}, \mathcal{F}_{\gamma(t)}, t\in[0,1]\}$. On dira alors qu'une martingale M de $\mathcal{M}_c^2$ est <u>à variation indépendante du chemin</u> (i.d.c.) si $\gamma_1, \gamma_2 \in\Gamma$, $\gamma_1(1)=\gamma_2(1) \Rightarrow \langle M_{\gamma_1}\rangle_1 = \langle M_{\gamma_2}\rangle_1$, p.s.

THEOREME 5.1. <u>Soit</u> M <u>une martingale de</u> $\mathcal{M}_c^2$. <u>Alors</u> M <u>est i.d.c. si et seulement si</u> $M_{st}^2 - \langle M\rangle_{st} - \langle M_{.0}\rangle_s - \langle M_{0.}\rangle_t$ <u>est une martingale. Dans ce cas, le processus</u> $\langle M\rangle$ <u>est continu et on a</u> $\langle M_{.t}\rangle_s = \langle M\rangle_{st} + \langle M_{.0}\rangle_s$ <u>et</u> $\langle M_{s.}\rangle_t = \langle M\rangle_{st} + \langle M_{0.}\rangle_t$.

DEMONSTRATION. Supposons d'abord que M est i.d.c. Pour tout (s,t) on a $\langle M_{.0}\rangle_s + \langle M_{s.}\rangle_t = \langle M_{0.}\rangle_t + \langle M_{.t}\rangle_s$, presque sûrement. En effet, la propiríté i.d.c. implique cette égalité puisque ses deux membres représentent les variations quadratiques de M au long de deux chemins croissants, l'un formé par l'union des segments $[(0,0),(0,t)]$ et $[(0,t),(s,t)]$ et l'autre formé par l'union des segments $[(0,0),(s,0)]$ et $[(s,0),(s,t)]$. Soit A_{st} une version commune de ces deux processus. Nous allons montrer que le processus $\{A_{st}, (s,t) \in Q_+^2\}$ est croissant et continu hors d'un ensemble de probabilité zéro. Comme $\{A_{st}, (s,t) \in Q_+^2\}$ est séparément continu et croissant (donc, croissant pour l'ordre) il suffit de prouver que $A(]z,z']) \geq 0$, p.s., pour tous z et z' dans Q_+^2. Soient $z=(s,t) < z'=(s',t')$. On considère une suite décroissante $s = s_0^n < s_1^n < \dots < s_n^n = s'$ de partitions de l'intervalle $[s,s']$ dont le pas tend vers zéro. Nous avons au sens de la convergence en L^1

$$E(A(]z,z'])/\mathcal{F}_{\infty t}) = E(A_{s't'} - A_{s't} - A_{st'} + A_{st}/\mathcal{F}_{\infty t})$$

$$= \lim_n \Sigma_{i=0}^{n-1} E[((M_{s_{i+1}^n t'} - M_{s_i^n t'})^2 - (M_{s_{i+1}^n t} - M_{s_i^n t})^2)/\mathcal{F}_{\infty t}]$$

$$= \lim_n \Sigma_{i=0}^{n-1} E[(M_{s_{i+1}^n t'} - M_{s_i^n t'} - M_{s_{i+1}^n t} + M_{s_i^n t})^2 /\mathcal{F}_{\infty t}] \geq 0.$$

Cela entraîne $E(M^2(]z,z'])/F_{\infty t}) \geqslant 0$. En conséquence, $\{M^2_{s't} - M^2_{st}, F_{\infty t}, t \geqslant 0\}$ est une sousmartingale et $\{A_{s't} - A_{st}, t \geqslant 0\}$ est son processus croissant associé. Donc, on a bien $A(]z,z']) \geqslant 0$, presque sûrement. En conclusion, si on prend $A_z = \inf\{A_{z'}, z < z', z' \in Q^2_+\}$ on obtient un processus croissant et continu A tel que $M^2 - A$ est une martingale. La propriété i.d.c. est alors équivalente à l'existence d'un tel processus.

Alors, si M est i.d.c., le processus $A - \langle M_{.0}\rangle_s - \langle M_{0.}\rangle_t$ est croissant, continu et nul sur les axes. Comme $M^2 - (A - \langle M_{.0}\rangle_s - \langle M_{0.}\rangle_t)$ est une martingale faible, on a $\langle M\rangle = A - \langle M_{.0}\rangle_s - \langle M_{0.}\rangle_t$ et, alors, $M^2 - \langle M\rangle - \langle M_{.0}\rangle_s - \langle M_{0.}\rangle_t$ est une martingale.

Réciproquement, si $M^2 - \langle M\rangle - \langle M_{.0}\rangle_s - \langle M_{0.}\rangle_t$ est une martingale, pour tout $t \geqslant 0$, le processus $\{\langle M\rangle_{st} + \langle M_{.0}\rangle_s, s \geqslant 0\}$ est croissant, prévisible (parce que M est 1-prévisible) et $M^2_{st} - \langle M\rangle_{st} - \langle M_{.0}\rangle_s$ est une 1-martingale. Cela entraîne $\langle M\rangle_{st} + \langle M_{.0}\rangle_s = \langle M_{.t}\rangle_s$, p.s. De même on a $\langle M\rangle_{st} + \langle M_{0.}\rangle_t = \langle M_{s.}\rangle_t$ et, en conséquence, M est i.d.c.□

Il faut remarquer que la propriété i.d.c. dépend des accroissements linéaires de la martingale et non de ses accroissements rectangulaires. En particulier, pour toute martingale M de M^2_c on peut considérer la martingale nulle sur les axes $M^o_{st} = M_{st} - M_{s0} - M_{0t} + M_{00}$, qui a les mêmes accroissements rectangulaires que M. Nous avons $M^2_{st} = (M^o_{st})^2 + (M_{s0} + M_{0t} - M_{00})^2 + 2M^o_{st}(M_{s0} + M_{0t} - M_{00})$. On a toujours $\langle M\rangle = \langle M^o\rangle$, mais la propriété i.d.c. de M^o n'implique pas, en principe, celle de M, à moins que le produit $M^o_{st}(M_{s0} + M_{0t} - M_{00})$ soit une martingale. D'autre part, on peut affirmer que ce produit est une martingale si M est à accroissements orthogonaux ou, de façon équivalente, si M^o est à accroissements orthogonaux.

COROLLAIRE 5.2. <u>Toute martingale de</u> $M^2_{c,o}$ <u>est</u> i.d.c.

DEMONSTRATION. D'après la remarque précédente, on peut supposer que M s'annulle sur les axes. Le théorème 2.2 entraîne alors que $M^2 - \langle M\rangle$ est une martingale et, en conséquence, M est i.d.c.□

L'ensemble des martingales i.d.c. qu'on représentera par $M^2_{c,i}$ est un sousensemble fermé de M^2_c. On a alors les inclusions $M^2_{c,S} \subset M^2_{c,o} \subset M^2_{c,i} \subset M^2_c$. On sait que $M^2_{c,S}$ et M^2_c sont des espaces de Hilbert. Dans les deux exemples fondamentaux on a l'égalité $M^2_{c,s} = M^2_{c,o}$, mais on ne sait pas si cette égalité reste vraie en général. D'autre part, l'inclusion $M^2_{c,o} \subset M^2_{c,i}$ est stricte dans la filtration du drap brownien et aussi dans certaines filtrations produit. Plus précisément on a les résultats suivants (cf. Nualart, 1981).

PROPOSITION 5.3. <u>Soit</u> $F_{st} = F^1_s \vee F^2_t$. <u>Si l'une des deux filtrations indépendantes</u> F^1_s <u>ou</u> F^2_t <u>est engendrée par un mouvement brownien, alors</u>, $M^2_{c,i} = M^2_{c,o}$.

THEOREME 5.4. (i) <u>Soient</u> F^1_s <u>et</u> F^2_t <u>les filtrations engendrées, respectivement par deux mouvements browniens bidimensionnels indépendants</u> $\{(W^1_s, W^2_s),\ s \geqslant 0\}$ <u>et</u> $\{(\tilde{W}^1_t, \tilde{W}^2_t),\ t \geqslant 0\}$. <u>Alors pour toute constante</u> $A > 0$ <u>il existe une martingale</u> $N \in M^2_c$ <u>nulle sur les axes mais non identiquement nulle, telle que la martingale</u> $M_{st} = A(W^1_s + W^2_s + \tilde{W}^1_t + \tilde{W}^2_t) + N_{st}$ <u>est i.d.c.</u>

(ii) <u>Soit</u> F_z <u>la filtration naturelle d'un drap brownien</u> $\{W_z,\ z \in R^2_+\}$. <u>Fixons deux points</u> $(s_0,t_0) < (s_1,t_1)$ <u>et considérons les régions</u> $D_1 = [0,s_0] \times [t_0,t_1]$ <u>et</u> $D_2 = [s_0,s_1] \times [0,t_0]$. <u>Alors pour toute constante</u> $A > 0$ <u>il existe un processus</u> $\psi \in L^2_{WW}$ <u>nul hors de</u> $D_1 \times D_2$ <u>mais non identiquement nul tel que pour tout</u> $\phi \in L^2_W$ <u>la martingale</u> $M = (A\, 1_{D_1 \cup D_2} + \phi\, 1_{(D_1 \cup D_2)^c})\cdot W + \psi\cdot WW$ <u>est i.d.c.</u>

La démonstration de ce théorème repose sur l'existence de solutions non triviales d'un certain système d'équations différentielles stochastiques. La méthode employée utilise essentiellement le fait que la constante A soit non nulle. Donc, en principe, nous ne savons pas montrer l'existence de martingales i.d.c. non fortes et nulles sur les axes dans le cas (i) ou de martingales i.d.c. de la forme $\psi\cdot WW$ dans (ii). On peut conjecturer l'existence de telles martingales à partir des résultats sur la construction de solutions non triviales de l'équation différentielle stochastique $XdX + YdY = 0$ (cf. Nualart et Sanz, 1982).

Comme application des résultats précédents, nous allons faire quelques remarques sur l'extension du théorème de P. Lévy de caractérisation du mouvement brownien au cas des martingales à deux indices. D'abord on a la proposition suivante (cf. Zakai, 1981).

PROPOSITION 5.5 Soit M une 1-martingale continue à accroissements orthogonaux dans le sens 1, nulle pour $t = 0$ et telle que $M^2_{st} - st$ est une 1-martingale. Alors M a la loi d'un drap brownien et pour tout $s \geqslant 0$ la tribu $F_{s\infty}$ est indépendante de la tribu engendrée par les variables $M(]z_1, z_2])$, $z_1 \leqslant z_2$, $z_1 = (s_1, t_1)$, $s \leqslant s_1$.

DEMONSTRATION. Soit $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ une suite croissante quelconque. Les martingales continues $M_{.t_i} - M_{.t_{i-1}}$, $i=1,\ldots,n$, vérifient $<M_{.t_i} - M_{.t_{i-1}}, M_{.t_j} - M_{.t_{j-1}}>_s = s(t_i - t_{i-1})\delta_{ij}$. En effet, pour $i \neq j$ on utilise que M est à accroissements orthogonaux dans le sens 1 et pour $i = j$ on applique que $M^2_{st} - st$ est une 1-martingale. Le théoreme de P. Lévy en dimension n permet alors de finir la preuve.□

Remarquons qu'il suffit que M_{st} soit continue en s pour tout t fixé.

Soit $M \in M^2_c$ telle que $<M>_{st} = st$ (c'est à dire $M^2_{st} - st$ est une martingale faible). Si on suppose que M est à accroissements orthogonaux dans le sens 1, d'après le théorème 2.2, $M^2_{st} - st$ est une 1-martingale et la conclusion de la proposition 5.5 est encore vraie.

Cependant, en utilisant le théorème 5.4 on peut construire (cf. Nualart, 1981) dans la filtration naturelle du drap brownien, des martingales continues non fortes M (et nulles sur les axes) telles que $M^2_{st} - st$ soit une martingale. Le résultat suivant montre qu'une telle martingale ne peut pas avoir la loi d'un drap brownien.

PROPOSITION 5.6. Soit $\{F_z, z \in R^2_+\}$ une filtration vérifiant les conditions habituelles. Alors toute martingale gaussienne M de M^2_c est à accroissements orthogonaux.

DEMONSTRATION. Supposons que M est nulle sur les axes. Nous allons montrer que M est à accroissements orthogonaux dans le sens 1. Il faut voir que $<M_{.t_4} - M_{.t_3}, M_{.t_2} - M_{.t_1}> = 0$ pour $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. Soit $0 = s^n_0 < s^n_1 < \ldots < s^n_n = s_0$ une suite décroissante de partitions de $[0, s_0]$ dont le pas tend vers zéro. On note $\Delta^1_{in} =]s^n_{i-1}, s^n_i] \times]t_1, t_2]$ et $\Delta^2_{in} =]s^n_{i-1}, s^n_i] \times]t_3, t_4]$. Alors on a

$$<M_{.t_4} - M_{.t_3}, M_{.t_2} - M_{.t_1}>_{s_0} = \lim_n \Sigma^n_{i=1} M(\Delta^1_{in})M(\Delta^2_{in}),$$

et le caractère gaussien de M entraîne que cette limite est zéro puis que

$$E\,[(\Sigma_{i=1}^{n} M(\Delta_{in}^{1}) M(\Delta_{in}^{2}))^{2}] = \Sigma_{i=1}^{n} E(M(\Delta_{in}^{1})^{2}) E(M(\Delta_{in}^{2})^{2})$$

$$\leqslant \sup_{i} E(M(\Delta_{in}^{1})^{2})\ \Sigma_{i=1}^{n} E(M(\Delta_{in}^{2})^{2}) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0. \ \square$$

Sous les hypothèses de la proposition 5.6 il est immédiat que <M> est déterministe mais, on ne sait pas en général si une telle martingale est forte.

REFERENCES

BAKRY, D. Sur la régularité des trajectoires des martingales à deux indices. ZfW. 50, 149-157 (1979).

CAIROLI, R. Une inégalité pour martingales à indices multiples et ses applications. Lecture Notes in Math. 124, 1-27 (1970).

CAIROLI, R.; WALSH, J.B. Stochastic integrals in the plane. Acta Math. 134, 111-183 (1975).

CAIROLI, R.; WALSH, J.B. Régions d'arrêt, localisations et prolongements de martingales. ZfW. 44, 279-306 (1978).

CHEVALIER, L. Martingales continues à deux paramètres. Bull. Sc. Math. 106, 19-62 (1982).

GUYON, X.; PRUM, B. Semi-martingales à indice dans R^2. Thèse, Université de Paris-Sud (1980).

MERZBACH, E.; ZAKAI, M. Predictable and dual predictable projections for two-parameter stochastic processes. ZfW. 53, 263-269 (1980).

MEYER, P.A. Théorie élémentaire des processus à deux indices. Lecture Notes in Math. 863, 1-39 (1981).

NUALART, D. Martingales à variation indépendante du chemin. Lecture Notes in Math. 863, 128-148 (1981).

NUALART, D.; SANZ, M. A singular stochastic integral equation. Proc. Amer Math. Soc. (1982).

WALSH, J.B. Martingales with a multidimensional parameter and stochastic integrals in the plane. Cours de 3e cycle, Paris VI (1977).

WALSH, J.B. Convergence and regularity of multiparameter strong martingales. ZfW. 46, 177-192 (1979).

WONG, E.; ZAKAI, M. Martingales and stochastic integrals for processes with a multidimensional parameter. ZfW. 29, 109-122 (1974).

WONG, E.; ZAKAI, M. Weak martingales and stochastic integrals in the plane. Ann. Prob. 4, 570-587 (1976).

ZAKAI, M. Some classes of two-parameter martingales. Ann. Prob. 9, 255-265 (1981).

D. Nualart

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
Gran Via, 585, Barcelona-7
Espagne