Séminaire de probabilités (Strasbourg)

HALIM DOSS
PIERRE PRIOURET

Petites perturbations de systèmes dynamiques avec réflexion

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 353-370
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__353_0>

PETITES PERTURBATIONS DE SYSTEMES DYNAMIQUES AVEC REFLEXION

PAR HALIM DOSS ET PIERRE PRIOURET.

Laboratoire de Probabilités, 4, Place Jussieu, Tour 56, 75005 PARIS

Soient D un ouvert connexe régulier de R^p et $\nu(x)$ un champ de vecteurs non tangents sur ∂D ; on considère la solution $(x^\varepsilon, a^\varepsilon)$ de :

$$x_t^\varepsilon = x+\varepsilon \int_0^t \sigma(x_s^\varepsilon)dB_s + \int_0^t b_\varepsilon(x_s^\varepsilon)ds + \int_0^t \nu(x_s^\varepsilon)da_s^\varepsilon$$

avec $x_t^\varepsilon \in \overline{D}$ et a_t^ε processus croissant continu ne croissant que sur $\{s \; ; \; x_s^\varepsilon \in \partial D\}$. On suppose de plus que b_ε tend vers b lorsque ε tend vers 0. Il s'agit d'obtenir pour $A \subset C_x([0,T], \overline{D})$, une évaluation asymptotique de $P(x_\cdot^\varepsilon \in A)$. Pour cela, on construit une fonction $\theta^\star(x,v)$ sur $\overline{D} \times R^p$ (voir le *th. 4.2*), telle que si :

$$\varphi \in A, \; \lambda(\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^T \theta^\star(\varphi_t, \dot{\varphi}_t - b(\varphi_t))dt \quad \text{et} \quad \Lambda(A) = \inf(\lambda(\varphi), \varphi \in A),$$

on ait :

$$(0.1) \quad -\Lambda(\overset{o}{A}) \leqslant \varliminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log P(x^\varepsilon \in A) \leqslant \varlimsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log P(x^\varepsilon \in A) \leqslant -\Lambda(\overline{A}).$$

Ce résultat donne immédiatement une évaluation asymptotique, lorsque $t \to 0$, de $P_x(\xi_t \in \Gamma)$ où (ξ_t, P_x) est une diffusion réfléchie sur $\overline{D}$ dont le générateur coïncide , sur les fonctions h de classe C^2 telles que $\frac{\partial h}{\partial \nu} = 0$ sur ∂D, avec un opérateur semi-elliptique L.

On suppose que σ et b_ε sont lipschitziens bornés mais on ne suppose pas σ non dégénérée. Lorsque σ est inversible, ce problème a été étudié par Anderson et Orey. [1].

La méthode de ces auteurs consiste à étendre les estimations de Ventcel-Freidlin [5] à des E.D.S. dépendant du passé puis à en déduire le résultat. Notre approche, qui permet de traiter le cas où σ est dégénérée, est différente. Elle est directement inspirée d'Azencott [2].

Elle consiste à montrer que si le mouvement brownien B est près d'une fonction régulière f, le processus x^ε est près de g, solution d'une équation différentielle déterministe avec réflexion, ceci avec une grande probabilité ; et, à partir de là, à transporter le résultat classique de grandes déviations pour le mouvement brownien. En particulier si $D = R^d$ et donc $\partial D = \emptyset$, on retrouve le cas des E.D.S. ordinaires.

1. *Cas du demi-espace.*

On note R_p^+ l'ensemble des $(x_1,\ldots,x_p)$, $x_1 \geqslant 0$; $e_1 = (1,0,\ldots,0)$.

On se donne sur R_p^+ un champ de matrices $p \times d$ $\sigma(x)$ et des champs de vecteurs $b_\varepsilon(x)$, $b(x)$ vérifiant :

$$(1.1) \quad \begin{array}{l} |\sigma(x)| \leq M, |b_\varepsilon(x)| \leq M, |\sigma(x)-\sigma(y)| \leq K|x-y|, |b_\varepsilon(x)-b_\varepsilon(y)| \leq K|x-y| \\ b_\varepsilon(x) \text{ tend uniformément vers } b(x) \text{ lorsque } \varepsilon \text{ tend vers } 0. \end{array}$$

Enfin $(\Omega, \underline{\underline{F}}_t, \underline{\underline{F}}, B_t, P)$ désigne un mouvement brownien issu de 0 à valeurs R^d.

On considère l'équation :

$$(1.2) \qquad x_t^\varepsilon = x+\varepsilon \int_0^t \sigma(x_s^\varepsilon)dB_s + \int_0^t b_\varepsilon(x_s^\varepsilon)ds + e_1.a_t^\varepsilon \ ; \quad (x_t^\varepsilon)_1 \geq 0$$

et a_t^ε processus continu, croissant, $a_0^\varepsilon = 0$ et $a_t^\varepsilon = \int_0^t 1_{\{x_1=0\}}(x_s^\varepsilon)da_s^\varepsilon$.

Il est bien connu que, sous les hypothèses (1.1), il y a existence et unicité des solutions de (1.2). Rappelons la construction donnée par Anderson et Orey [1] : pour $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_p) \in C(R_+,R^n)$, on note $\xi\omega = \tilde{\omega}_1$ et $\Gamma\omega=(\omega_1+\tilde{\omega}_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)$ où $\tilde{\omega}_1(t) = -\inf\limits_{s\leq t}(\omega_1(s) \wedge 0)$. Alors Γ vérifie $\sup\limits_{s\leq t}|\Gamma_s\omega - \Gamma_s\omega'| \leq 2 \sup\limits_{s\leq t}|\omega(s) - \omega'(s)|$ et si y_t^ε est solution de :

$$(1.3) \qquad y_t^\varepsilon = x + \varepsilon \int_0^t \sigma(\Gamma_s\, y^\varepsilon)dB_s + \int_0^t b_\varepsilon(\Gamma_s\, y^\varepsilon)ds,$$

on a $x_t^\varepsilon = \Gamma_t\, y^\varepsilon$ et $a_t^\varepsilon = \xi_t\, y^\varepsilon$.

Maintenant, soit $f \in C(R_+,R^d)$, absolument continue avec $\int_0^T |\dot{f}_s|^2 dx < +\infty$ pour tout $T > 0$, et soient h_t et a_t les uniques solutions de :

$$(1.4) \qquad h_t = z + \int_0^t \{\sigma(h_s).\dot{f}_s + b(h_s)\}ds + e_1.a_t \ ; \ (h_t)_1 \geq 0$$

et a_s processus croissant, continu, $a_0 = 0$ et $\int_0^t 1_{\{x_1=0\}}(h_s)da_s = a_t$.

On a encore $h(t) = \Gamma_t k$ et $a(t) = \xi_t k$ où k est solution de :

$$(1.5) \qquad k(t) = z + \int_0^t \{\sigma(\Gamma_s k)\dot{f}_s + b(\Gamma_s k)\}ds.$$

Le but de ce paragraphe est de montrer (on note $||f||_v^u = \sup\limits_{u\leq s\leq v} |f(s)|$, $||f||_T = ||f||_T^0$), $T > 0$ étant fixé :

Théorème 1.1 : Pour tout $A,R,\rho > 0$, il existe $\varepsilon_0,\alpha, r > 0$ tels que si

$\int_0^T |\dot{f}_s|^2 ds \leqslant A$, si $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, si $|z-x| < r$, on a :

$$\varepsilon^2 \log P(||x^\varepsilon - h||_T + ||a^\varepsilon - a||_T > \rho,\ ||\varepsilon B - f||_T < \alpha) \leqslant -R.$$

<u>dém</u> : Compte tenu du caractère lipschitzien des applications Γ et ξ, il suffit d'évaluer $P(||y^\varepsilon - k||_T > \rho,\ ||\varepsilon B - f||_T < \alpha)$. Posons,

(1.6) $\quad c_\varepsilon(s,x) = \sigma(x)\dot{f}_s + b_\varepsilon(x)$; $c(s,x) = \sigma(x)\dot{f}_s + b(x)$

et supposons que $\overline{y}^\varepsilon$ et $\overline{k}$ vérifient :

(1.7) $\quad \overline{y}^\varepsilon_t = x + \varepsilon \int_0^t \sigma(\Gamma_s \overline{y}^\varepsilon) dB^\varepsilon_s + \int_0^t c_\varepsilon(s, \Gamma_s \overline{y}^\varepsilon) ds$, B^ε de même loi que B ;

(1.8) $\quad \overline{k}_t = z + \int_0^t c(s, \Gamma_s \overline{k}) ds$

alors,

<u>*Lemme 1.2*</u> : Pour tout $A, R, \rho > 0$, il existe $\varepsilon_0, \alpha, r > 0$ tels que si $\int_0^T |\dot{f}_s|^2 ds \leqslant A$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $|z-x| < r$, on a :

$$\varepsilon^2 \log P(||\overline{y}^\varepsilon - \overline{k}||_T > \rho,\ ||\varepsilon B^\varepsilon||_T < \alpha) \leqslant -R.$$

<u>dém</u> : On omettra le ε dans B^ε les calculs étant des calculs de lois, ε fixé, et aussi les barres sur $\overline{y}$ et $\overline{k}$ ainsi que T dans $||.||_T$.

<u>*Lemme 1. 3*</u> : Pour tout $A, R, \rho > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $\int_0^T |\dot{f}_s|^2 ds \leqslant A$ et $\varepsilon \leqslant 1$, on a $\varepsilon^2 \log P(||\int_0^\cdot \varepsilon\sigma(\Gamma_s y^\varepsilon) dB_s|| > \rho,\ ||\varepsilon B|| < \alpha) \leqslant -R.$

<u>dém</u> : On introduit le partage de $[0,T]$, de pas $\frac{T}{n}$: $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{T}{n}, \dots, t_n = T$, et on définit $y^{\varepsilon,n}_t$ par $y^\varepsilon_{t_k}$ si $t_k \leqslant t < t_{k+1}$. Notons que l'application Γ s'étend au fonctions c.a.d. l.a.g. donc, en particulier, au processus $y^{\varepsilon,n}$ avec la même propriété : $||\Gamma_\cdot \omega - \Gamma_\cdot \omega'|| \leqslant 2||\omega - \omega'||$.

Alors, pour tout n et $\gamma > 0$, $\{||\int_0^\cdot \varepsilon\sigma(\Gamma_s y^\varepsilon) dB_s|| > \rho,\ ||\varepsilon B|| < \alpha\} \subset E_1 \cup E_2 \cup E_3$ avec $E_1 = \{||y^\varepsilon - y^{\varepsilon,n}|| > \gamma\}$, $E_2 = \{||y^\varepsilon - y^{\varepsilon,n}|| \leqslant \gamma,\ ||\int_0^\cdot \varepsilon(\sigma(\Gamma_s y^\varepsilon) - \sigma(\Gamma_s y^{\varepsilon,n})) dB_s|| > \frac{\rho}{2}\}$, $E_3 = \{||\int_0^\cdot \varepsilon\sigma(\Gamma_s y^{\varepsilon,n}) dB_s|| > \frac{\rho}{2},\ ||\varepsilon B|| < \alpha\}$

Majoration de $P(E_2)$: Comme sur $||y^\varepsilon - y^{\varepsilon,n}|| \leq \gamma$, $||\varepsilon(\sigma(\Gamma_s y^\varepsilon)-\sigma(\Gamma_s y^{\varepsilon,n}))||^2 \leq 4\varepsilon^2 K^2\gamma^2$, l'inégalité exponentielle entraîne que, pour tout $\varepsilon \leq 1$,

$$P(E_2) \leq 2p \exp\left(- \frac{\rho^2}{16T\varepsilon^2\gamma^2K^2p^2}\right) \leq \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{R}{\varepsilon^2}\right) \quad \text{si } \gamma \text{ est bien choisi.}$$

Majoration de $P(E_1)$: $P(||y^\varepsilon - y^{\varepsilon,n}|| > \gamma) = P\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} ||y^\varepsilon - y^{\varepsilon,n}||_{t_{k+1}}^{t_k} > \gamma\right)$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} P\left(\left|\left|\int_{t_k}^{\cdot} c_\varepsilon(s,\Gamma_s y^\varepsilon)ds\right|\right|_{t_{k+1}}^{t_k} > \frac{\gamma}{2}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} P\left(\left|\left|\int_{t_k}^{\cdot} \varepsilon\sigma(\Gamma_s y^\varepsilon)dB_s\right|\right|_{t_{k+1}}^{t_k} > \frac{\gamma}{2}\right)$$

Mais $\left|\int_{t_k}^{t} c_\varepsilon(s,\Gamma_s y^\varepsilon)ds\right| = \left|\int_{t_k}^{t} \sigma(\Gamma_s y^\varepsilon)\dot{f}_s ds + \int_{t_k}^{t} b_\varepsilon(\Gamma_s y^\varepsilon)ds\right| \leq M\left(\frac{AT}{n}\right)^{1/2} + M\frac{T}{n}$

donc le premier terme est nul si $n \geq n_1(\gamma)$. Par ailleurs, toujours par l'inégalité exponentielle,

$$\sum_{k=0}^{n-1} P\left(\left|\left|\int_{t_k}^{\cdot} \varepsilon\sigma(\Gamma_s y^\varepsilon)dB_s\right|\right|_{t_{k+1}}^{t_k} > \frac{\gamma}{2}\right) \leq 2pn \exp\left(- \frac{n\gamma^2}{8p^2M^2\varepsilon^2T}\right) \leq \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{R}{\varepsilon^2}\right)$$

si $n \geq n_2(\gamma)$ et pour tout $\varepsilon \leq 1$.

On fixe γ puis n comme ci-dessus, alors,

Majoration de $P(E_3)$: on remarque que $\Gamma_s y^{\varepsilon,n}$ est constant (en s) sur $[t_K, t_{K+1}[$, égal par exemple à $u_k^{\varepsilon,n} = \Gamma_{t_k} y^{\varepsilon,n}$. D'où, sur $||\varepsilon B|| < \alpha$

$$\left|\int_0^t \varepsilon\sigma(\Gamma_s y^{\varepsilon,n})dB_s\right| = \left|\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \sigma(u_k^{\varepsilon,n})\, B_{t_{k+1}\wedge t} - B_{t_k\wedge t}\right| \leq 2Mn\alpha \quad \text{et} \quad P(E_3) = 0$$

si $\alpha < \rho/_{4Mn}$.

Revenons au *lemme 1.2*. On a,

$$y_t^\varepsilon - k_t = x-z + \int_0^t (b_\varepsilon(\Gamma_s y^\varepsilon)-b_\varepsilon(\Gamma_s k)ds + \int_0^t (b_\varepsilon(\Gamma_s k)-b(\Gamma_s k))ds + \int_0^t \sigma(\Gamma_s y^\varepsilon)-\sigma(\Gamma_s k))$$
$$\dot{f}_s ds + U_t^\varepsilon$$

avec $U_t^\varepsilon = \int_0^t \varepsilon\sigma(\Gamma_s y)dB_s$. D'où,

$$|y^\varepsilon_t - k_t| \leq |x-z| + T||b_\varepsilon - b|| + ||U^\varepsilon|| + K\int_0^t (1+|\dot{f}_s| \sup_{u\leq s} |y^\varepsilon_u - k_u| ds.$$

Par Gronwall, en posant $B=K\int_0^T (1+|\dot{f}_s|)ds \leq K(T+(AT)^{1/2})$, si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $|x-z|\leq r$, $||y^\varepsilon - k|| \leq \frac{\rho}{2} + ||U^\varepsilon||e^B$, donc,

$P(||y^\varepsilon - k|| > \rho,\ ||\varepsilon B|| < \alpha) \leq P(||U^\varepsilon|| > \frac{\rho}{2} e^{-B},\ ||\varepsilon B|| < \alpha)$ et on conclut facilement par le *lemme 1. 3*.

Montrons maintenant le théorème.

On définit $\overline{P}^\varepsilon$ sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}_T)$ par :

$$(1.9) \qquad \frac{d\overline{P}^\varepsilon}{dP} = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T (\dot{f}_s, dB_s) - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T |\dot{f}_s|^2 ds\right)$$

alors $\overline{B}^\varepsilon_t = B_t - \frac{1}{\varepsilon} f_t$ est un $(\Omega, \overline{P}^\varepsilon)$ mouvement brownien et,

$$(1.10) \qquad y^\varepsilon_t = x + \varepsilon\int_0^t \sigma(\Gamma_s y^\varepsilon) d\overline{B}^\varepsilon + \int_0^t \{\sigma(\Gamma_s y^\varepsilon)\dot{f}_s + b_\varepsilon(\Gamma_s y^\varepsilon\} ds,\ \overline{P}^\varepsilon \text{ p.s.}$$

Soit $E=\{||y^\varepsilon - k||_T > \rho,\ ||\varepsilon B - f||_T < \alpha\}$, $V^\varepsilon = \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T (\dot{f}_s, dB_s))$, alors

$$P(E) \leq P(V^\varepsilon > \exp\frac{\lambda}{\varepsilon^2}) + P(E \cap (V^\varepsilon \leq \exp\frac{\lambda}{\varepsilon^2}) \leq 2\exp(-\frac{\lambda^2}{2A\varepsilon^2})$$

$$+ \overline{E}^\varepsilon(\frac{dP}{d\overline{P}^\varepsilon}\ ;\ E \cap (V^\varepsilon \leq \exp\frac{\lambda}{\varepsilon^2})) \leq 2\exp(-\frac{\lambda^2}{2A\varepsilon^2}) + \exp(\frac{A}{2\varepsilon^2})\exp(\frac{\lambda}{\varepsilon^2}) \times$$

$$\overline{P}^\varepsilon(||y^\varepsilon - k||_T > \rho,\ ||\varepsilon\overline{B}^\varepsilon||_T < \alpha)$$

On choisit alors λ pour que $2\exp(-\frac{\lambda^2}{2A\varepsilon^2}) \leq \frac{1}{2}\exp(-\frac{R}{\varepsilon^2})$ puis ε_0, r, α grâce au *lemme 1.2* pour que le $2^{\text{ème}}$ terme soit $\leq \frac{1}{2}\exp(-\frac{R}{\varepsilon^2})$.

Remarque : le *théorème 1. 1* et sa démonstration sont aussi vrais (avec des modifications d'écriture évidentes) lorsque x^ε est une diffusion sur R^p (cas sans bord). On retrouve alors le *théorème 2. 4* d'Azencott [2]. La démonstration ci-dessus est une adaptation de celle du théorème d'Azencott qu'on trouve dans Priouret [3].

Notons $\mathfrak{F}(A)$ l'ensemble des f de $C_0([0,T],R^d)$ telles que $\int_0^T |\dot{f}_s|^2 ds \leq A$;

alors, pour tout (z,f) de $R_+^p \times \bigcup_A \mathfrak{F}(A)$ les solutions h_t et a_t de (1.4) existent. De plus,

Proposition 1. 4 : L'application $(z,f) \longmapsto (h,a) \in C([0,T], R^p \times R_+)$ est continue sur $R_+^p \times \tilde{\Phi}(A)$, $\tilde{\Phi}(A)$ étant muni de la topologie de la convergence uniforme sur $[0,T]$.

<u>dém</u> : Soient $z_n \to z$ et $f_n, f \in \tilde{\Phi}(A)$ telles que $||f_n - f||_T \to 0$. Notons k_t^n la solution de (1.5) relative à z_n et f_n.

$$|k_t - k_t^n| \leqslant |z-z_n| + \int_0^t |b(\Gamma_s k) - b(\Gamma_s k^n)|ds + |\int_0^t \sigma(\Gamma_s k)(\dot{f}_s - \dot{f}_s^n)ds|$$

$$+ |\int_0^t (\sigma(\Gamma_s k) - \sigma(\Gamma_s k^n))\dot{f}_s^n\, ds| \leqslant |z-z_n| + K \int_0^t \sup_{u \leqslant s} |k_s - k_s^n|(1 + |\dot{f}_s^n|)ds$$

$$+ |\int_0^t \sigma(\Gamma_s k)(\dot{f}_s - \dot{f}_s^n)ds| \text{ ; par Gronwall,}$$

$$||k-k^n||_T \leqslant \{|z-z_n| + \rho^n(T)\}\exp K(T+(TA)^{1/2}) \text{ où } \rho^n(T) = \sup_{t \leqslant T} |\int_0^t \sigma(\Gamma_s k)(\dot{f}_s - \dot{f}_s^n)ds|.$$

Remarquons que k_t est a.c. de dérivée p.p. $\dot{k}_t = \sigma(\Gamma_s k)\dot{f}_s + b(\Gamma_s k)$, donc, pour $0 \leqslant u < v \leqslant T$, $|\sigma(\Gamma_v k) - \sigma(\Gamma_u k)| \leqslant K|\Gamma_v k - \Gamma_u k| \leqslant 2K \sup_{u \leqslant s \leqslant v} |k_s - k_u| \leqslant 2K \int_u^v |\dot{k}_s|ds$

et donc la variation totale de $s \longmapsto \sigma(\Gamma_s k)$ sur $[0,T]$ est majorée par $2K \int_0^T |\dot{k}_s|ds$ donc par une constante $C=C(K,T,A)$.

Alors $|\int_0^t \sigma(\Gamma_s k)(\dot{f}_s - \dot{f}_s^n)ds| \leqslant |\sigma(\Gamma_t k)(f_t - f_t^n)| + |\int_0^t (f_s - f_s^n)d(\sigma(\Gamma_s k))|$

$\leqslant (M+C)\ ||f-f_n||_t$ et donc $\rho^n(T)$ tend vers 0 avec n.

2. <u>Cas d'un ouvert de R^p.</u>

Soit D un ouvert connexe de R^p. On suppose qu'il existe une fonction u de classe C_b^2 (bornée ainsi que ses deux premières dérivées) telle que :

(2.1) $D=\{u > 0\}$, $\partial D=\{u=0\}$, $\nabla u(x) \neq 0$ pour tout $x \in \partial D$.

On considère, sur ∂D, un champ de vecteurs $\nu(x)$ de classe C_b^2, vérifiant

(2.2) $< \nabla u(x), \nu(x) > \geqslant \beta > 0$, pour tout $x \in \partial D$.

Sous ces hypothèses, il existe, pour tout $x \in \partial D$ une carte locale (U,φ) contenant x avec $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_p)$ de classe C^2 et $U \cap \bar{D} = \{\varphi_1 \geq 0\}$ et $\varphi^\star \nu = \frac{\partial}{\partial \varphi_1} / \varphi(x)$. Une telle carte sera dite canonique au bord.

On se donne sur $\bar{D}$ des champs de matrices $p \times d$ $\sigma(x)$ et de vecteurs $b(x)$ et $b_\varepsilon(x)$ vérifiant, pour tout $x,y \in \bar{D}$:

$$(2.3)\qquad \begin{aligned} &|\sigma(x)| \leq M,\ |b(x)| \leq M,\ |\sigma(x)-\sigma(y)| \leq K|x-y|,\ |b_\varepsilon(x)-b_\varepsilon(y)| \leq K|x-y| \\ &b_\varepsilon \text{ tend vers } b \text{ uniformément sur } \bar{D}. \end{aligned}$$

On condidère alors l'équation :

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} &x_t^\varepsilon = x+\varepsilon \int_0^t \sigma(x_s^\varepsilon)dB_s + \int_0^t b_\varepsilon(x_s^\varepsilon)ds + \int_0^t \nu(x_s^\varepsilon)da_s^\varepsilon \text{ ; avec } x_t^\varepsilon \in \bar{D} \\ &a_t^\varepsilon \text{ processus croissant continu, } a_0^\varepsilon = 0 \text{ et } a_t^\varepsilon = \int_0^t 1_{\partial D}(x_s^\varepsilon)da_s^\varepsilon. \end{aligned}$$

Sous les hypothèses (2.3), il y a existence et unicité des solutions $(x^\varepsilon,a^\varepsilon)$ de (2.4) et elles sont définies sur R_+ (il n'y a pas d'explosion). Ceci se montre en recouvrant $\bar{D}$ par un système de cartes et en construisant de proche en proche la solution de (2.4) jusqu'à un temps d'explosion τ. Mais on a $\lim\limits_{t\uparrow\tau<+\infty} |x_t^\varepsilon| = +\infty$ p.s. d'où on déduit facilement, les coefficients étant bornés, la non-explosion.

L'important pour les calculs est le point suivant. Soit (V,φ) une carte canonique au bord et U un ouvert de $\bar{D}$ tel que $\bar{U} \subset V$; on définit sur R^p,

$$\tilde{\sigma}(y) = J(\varphi)^\star \sigma(\varphi^{-1}(y)),\ y \in \varphi(U),\ J(\varphi) \text{ jacobien de } \varphi,$$

$$\tilde{b}^i_\varepsilon(y) = L^\varepsilon \varphi^i(\varphi^{-1}(y)),\ y \in \varphi(U),\ L^\varepsilon \varphi^i = \frac{1}{2}\varepsilon^2 (\nabla\varphi_i)^\star \sigma\sigma^\star \nabla\varphi_i + \nabla\varphi_i\, b_\varepsilon$$

qu'on prolonge sur tout R^p en des fonctions lipschitziennes bornées.

On note alors $x_t^\varepsilon(t_0,\tilde{x}_0)$, $\tilde{a}_t(t_0,\tilde{x}_0)$ les solutions de :

$$x_t^\varepsilon = \tilde{x}_0 + \varepsilon \int_{t_0}^t \tilde{\sigma}(\tilde{x}_s^\varepsilon)dB_s + \int_{t_0}^t \tilde{b}_\varepsilon(\tilde{x}_s^\varepsilon)ds + e_1 \tilde{a}_s^\varepsilon \text{ , } t \geq t_0 \text{ ; } (\tilde{x}_t^\varepsilon)_1 \geq 0$$

$$\tilde{a}_t^\varepsilon \text{ processus croissant continu, } \tilde{a}_{t_0}^\varepsilon = 0,\ \int_{t_0}^t 1_{(x_1=0)}(\tilde{x}_s^\varepsilon)d\tilde{a}_s^\varepsilon = \tilde{a}_t^\varepsilon.$$

Alors pour $u < v$, on a p.s. sur $\{x_s^\varepsilon \in U \text{ pour tout } s \in [u,v]\}$,

$$\varphi(x_s^\varepsilon) = \tilde{x}_{s-u}^\varepsilon(u,\varphi(x_u^\varepsilon)),\ a_s^\varepsilon - a_u^\varepsilon = \tilde{a}_{s-u}^\varepsilon(u,\varphi(x_u^\varepsilon)) \text{ pour } s \in [u,v].$$

Pour $f \in C([0,T],R^d)$, a.c. avec $\int_0^T |\dot{f}_s|^2 ds \leq A$, on définit (h_t,a_t) comme

comme solution de :

$$(2.5)\qquad h_t = z + \int_0^t \{\sigma(h_s)\dot{f}_s + b(h_s)\}ds + \int_0^t \nu(h_s)da_s \ ; \text{ avec } \quad h_t \in \overline{D},\ a_t \text{ processus}$$

croissant continu, $a_o = 0$ et $\int_0^t 1_{\partial D}(h_s)da_s = a_t$.

Sous (2.3), on établit facilement l'existence sur tout R_+ et l'unicité des solutions de (2.5). On a donc, en posant $g_s = \sigma(h_s)\dot{f}_s + b(h_s)$,

$$(2.6)\qquad u(h_t) - u(z) = \int_0^t \nabla u(h_s).g_s\, ds + \int_0^t \nabla u(h_s).\nu(h_s)da_s.$$

Remarquons que si t_o, t_1 sont tels que $h_{t_o} \in \partial D$, $h_{t_1} \in \partial D$ et $h_t \in D$ si $t_o < t < t_1$, on a $\int_{t_o}^{t_1} \nabla u(h_s).g_s\, ds = 0$ puisque a_s est plate sur $]t_o, t_1[$.

Fixons t, et soit $\Delta = \{s\ ;\ h_s \in \partial D\}$ et $t_o = \inf(s \leqslant t,\ s \in \Delta)$, $t_1 = \sup(s \leqslant t,\ s \in \Delta)$; évidemment $a_s = 0$ si $s \leqslant t_o$ et $a_s = a_{t_1}$ si $t_1 \leqslant s \leqslant t$. De plus,

$$0 = \int_{t_o}^{t_1} \nabla u(h_s).g_s ds + \int_{t_o}^{t_1} \nabla u(h_s).\nu(h_s)da_s = \int_{t_o}^{t_1} \nabla u(h_s).g_s 1_{\partial D}(h_s)ds + \int_{t_o}^{t_1} \nabla u(h_s).\nu(h_s)da_s$$

car $\int_{t_o}^{t_1} \nabla u(h_s).g_s\ 1_D(h_s)ds = 0$ puisque c'est une somme dénombrable sur des incursions dans D. On en déduit les formules :

$$(2.7)\qquad c_t = \int_0^t \nabla u(h_s).\nu(h_s)da_s = -\int_0^t \nabla u(h_s).g_s.1_{\partial D}(h_s)ds$$

$$(2.8)\qquad a_t = -\int_0^t \frac{\nabla u(h_s).g_s}{\nabla u(h_s).\nu(h_s)}.1_{\partial D}(h_s).ds \quad \text{où } g_s = \sigma(h_s)\dot{f}_s + b(h_s).$$

Compte tenu de (2.2), on en déduit facilement :

<u>*Lemme 2.1*</u> : Soient $T, A > 0$ et K un compact et soient (h_t, a_t) les solutions de (2.5) avec $z \in K$ et $\int_0^T |\dot{f}_s|^2 ds \leqslant A$, alors :

(i) h_t et a_t sont absolument continues avec $\dot{h}_t$ et $\dot{a}_t$ dans $L^2([0,T])$
(ii) il existe des constantes $C_1(T,A,K)$ et $C_2(T,A)$ telles que :

$$\sup_{t \leqslant T} |h_t| \leqslant C_1(T,A,K), \quad \int_0^T |\dot{h}_s|^2 ds \leqslant C_2(T,A).$$

On a alors, $(x^\varepsilon,a^\varepsilon)$ et (h,a) désignant les solutions de (2.4) et (2.5),

Théorème 2.2 : Pour tout $T,A,R,\rho > 0$ et K compact de $\overline{D}$, il existe ε_0,α, $r > 0$ tels que si $\int_0^T |\dot{f}_s|^2 ds \leqslant A$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $|x-z| \leqslant r$, $z \in K$, on a :

$$\varepsilon^2 \log P\,[\,||x^\varepsilon-h||_T + ||a^\varepsilon-a||_T > \rho,\ ||\varepsilon B-f||_T < \alpha) \leqslant -R.$$

Démonstration : D'après le *lemme 2.1*, $\sup_{t\leqslant T} |h_t| \leqslant C=C(T,A,K)$. On peut construire $\delta > 0$, $0 < \overline{\alpha} < \overline{\beta}$ et des cartes $(U_1,\varphi_1),\ldots,(U_q,\varphi_q)$ telles que :

1) Les U_i sont soit des ouverts de R^p, soit des cartes canoniques au bord.

2) Les (U_i) recouvrent $\overline{B}(0,C)$ (boule fermée de centre 0, de rayon C)

3) Pour tout $x \in \overline{D} \cap \overline{B}(0,C)$, $B(x,\delta) \subset U_i$ pour un certain i,

4) pour tout i et $x,y \in U_i$, $\overline{\alpha} \leqslant \dfrac{|\varphi_i(x)-\varphi_i(y)|}{|x-y|} \leqslant \overline{\beta}$.

Soient $x_1,\ldots,x_q \in \overline{D} \cap \overline{B}(0,C)$ tels que les boules $B(x_j,\frac{\delta}{4})$ recouvrent $\overline{D} \cap \overline{B}(0,C)$ et soit $V_j= B(x_j,\frac{\delta}{2})$. Fixons A,T,R, alors pour tout ρ, il existe $r(\rho)$, $\varepsilon_0(\rho)$, $\alpha(\rho)$ telles que si $f \in \tilde{\Phi}(A)$, si $0 \leqslant s < t \leqslant T$ et si, pour un certain i, $h([s,t]) \subset V_i$, on a, pour tout $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0(\rho)$,

$$P(||x^\varepsilon-h||_t^s + ||a^\varepsilon-a||_t^s > \rho,\ |x_s^\varepsilon-h_s|+|a_s^\varepsilon-a_s| \leqslant r(\rho), ||\varepsilon B-f||_T < \alpha(\rho)\,] \leqslant \exp\left(-\frac{R+1}{\varepsilon^2}\right).$$

Ceci résulte du *théorème 1.1* car compte tenu de 3) et 4) ci-dessus, une telle probabilité s'évalue dans une carte (U_i,φ_i) dès que $\rho < \frac{\delta}{2}$.

Définissons $t_0= 0$, $t_1= \inf(t > t_0;\ |h_t-z| > \frac{\delta}{4}),\ldots,t_{i+1}= \inf(t > t_i;\ |h_t-h_{t_i}| > \frac{\delta}{4}),\ldots$

Comme $|h_t-h_s| = |\int_s^t \dot{h}_u\, du| \leqslant |t-s|^{1/2}\, C_2^{1/2}(T,A)$ (*lemme 2.1*), on construit ainsi une suite $t_0= 0 <\ldots< t_m= T$ avec $m \leqslant N=N(T,A,K)$ et $h([t_i,t_{i+1}])\subset V_j=B(x_j,\frac{\delta}{2})$ pour un certain j. Alors, $P(||x^\varepsilon-h||_T+ ||a^\varepsilon-a||_T > \rho,\ ||\varepsilon B-f||_T < \alpha)$

$\leqslant P(||\ |x^\varepsilon-h|+|a^\varepsilon-a|\ ||_T >\rho_{/2},\ ||\varepsilon B-f||_T < \alpha) \leqslant P\,[\,||\ |x^\varepsilon-h|+|a^\varepsilon-a|\ ||_{t_1}^{0} > \rho_m,$ $||\varepsilon B-f||_T < \alpha\,]$

$+ \sum_{i=1}^{m-1} P(||\ |x^\varepsilon-h|+|a^\varepsilon-a|\ ||_{t_{i+1}}^{t_i} > \rho_{m-i},|x_{t_i}^\varepsilon-h_{t_i}|+|a_{t_i}^\varepsilon-a_{t_i}| \leqslant \rho_{m-i+1},||\varepsilon B-f||_T< \alpha\,]$, où $\rho_1 = \rho/2$, $\rho_{j+1} = \inf(r(\rho_j),\rho_j)$.

Donc posant $\alpha = \inf(\alpha(\rho_1),\dots,\alpha(\rho_N))$, $\varepsilon_0 = \inf(\varepsilon(\rho_1),\dots,\varepsilon(\rho_N))$, $r = \inf(r(\rho_1),\dots,r(\rho_N))$;

si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $|x-z| \leq r$,

$$P(||x^\varepsilon - h||_T + ||a^\varepsilon - a||_T > \rho \ ; \ ||\varepsilon B - f||_T < \alpha) \leq N \exp\left(-\frac{R+1}{\varepsilon^2}\right).$$

Il suffit alors de choisir $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ pour que $N \exp\left(-\frac{R+1}{\varepsilon^2}\right) \leq \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon^2}\right)$.

Etendons maintenant la *proposition 1. 4*.

<u>*Proposition 2. 3*</u> : Pour tout $A > 0$, l'application de $\overline{D} \times \tilde{\Phi}(A)$ dans $C([0,T],\overline{D} \times R_+)$ qui à (z,f) associe (h,a) solution de (2.6) est continue, $\tilde{\Phi}(A)$ étant muni de la topologie de la convergence uniforme.

<u>dem</u> : on conserve les notations de la démonstration du *théorème 2.2*. Soit alors $t_0 = 0 < \dots < t_n = T$ tels que $h([t_i,t_{i+1}]) \subset V_j = B(x_j, \frac{\delta}{2})$ pour un certain j. On note (h^n,a^n) les solutions de (2.5) relatives à z_n et f_n et on suppose $z_n \to z$, $||f^n - f||_T \to 0$ en restant dans $\tilde{\Phi}(A)$. Comme $h([t_0,t_1]) \subset V_n$, tout un voisinage d'ordre $\frac{\delta}{2}$ de $h([t_0,t_1])$ est inclus dans une carte $(U_{j'}, \varphi_{j'})$, on a (*prop. 1. 4*), h^n_t tend vers h_t et a^n_t tend vers a_t uniformément sur $[0,t_1]$; alors $h^n(t_1) \to h(t_1)$ et $h([t_1,t_2]) \subset V_{j''}$ et on recommence...

3. <u>*Transport des estimations de Ventcel-Freidlin*</u>

Dans ce paragraphe nous présentons des résultats d'Azencott [2] sous une forme synthétique et bien adaptée à notre situation.

$T > 0$ est fixé, on note $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des applications continues de $[0,T]$ dans R^d nulles en 0, muni de la topologie de la convergence uniforme. On définit pour $f \in \mathcal{C}_0$,

$$(3.1) \qquad \tilde{\lambda}(f) = \frac{1}{2}\int_0^T |\dot{f}_s|^2 ds, \text{ si } f \text{ est a.c. ; } +\infty \text{ sinon.}$$

Rappelons que $\tilde{\lambda}$ est s.c.i. sur $\mathcal{C}_0$ et $\tilde{\Phi}(A) = \{f \in \mathcal{C}_0, \tilde{\lambda}(f) \leq A\}$ compact. $(\Omega, \underline{\underline{F}}_t, \underline{\underline{F}}, B_t, P)$ étant un brownien à valeurs R^k issu de 0, nous utiliserons les deux estimations classiques suivantes :

(i) pour tout $f \in \tilde{\mathcal{C}}_0$, $\alpha > 0$, $\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log P(||\varepsilon B-f|| < \alpha) \geq -\tilde{\lambda}(f)$ uniformément sur $\tilde{\Phi}(A)$.

(ii) pour tout fermé F de $\tilde{\mathcal{C}}_0$, $\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log P(\varepsilon B \in F) \leq -\tilde{\Lambda}(F) = -\inf(\tilde{\lambda}(f),$ $f \in F)$.

Soit (S,δ) un espace métrique, $C=C([0,T],S)$, d la distance usuelle sur C, $C_x = \{g \in C,\ g_0 = x\}$; on suppose donnés :

1) pour tout $x \in S$, des processus continus, $\underline{\underline{F}}_t$ adaptés $y^\varepsilon_t(x)$ avec $y^\varepsilon_0(x)=x$,

2) une application $\beta : (z,f) \to \beta_z(f)$ de $S \times \bigcup_A \tilde{\Phi}(A)$ dans C_z, continue sur $S \times \tilde{\Phi}(A)$ telle que : pour tout compact K de S, tout $A,R,\rho > 0$, il existe $\varepsilon_1,\alpha,\ r > 0$ tels que si f vérifie $\tilde{\lambda}(f) \leq A$, si $z \in K$, si $\delta(x,z) < r$ on ait, pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_1$:

$$\varepsilon^2 \log P(d(y^\varepsilon(x),\beta_z(f)) \geq \rho,\ ||\varepsilon\beta-f||_T < \alpha) \leq -R$$

On pose alors, pour $g \in C$,

(3.2) $\lambda(g) = \inf(\tilde{\lambda}(f);\ B_{g_0}(f)=g), \Lambda(A) = \inf(\lambda(g), g\in A), \Phi(A)=\{g;\ \lambda(g) \leq A\}$.

On a alors,

Proposition 3.1 : λ est s.c.i sur C ; $\Phi(A) \cap \{g_0 \in \text{compact}\}$ est compact ; si $\lambda(g) < +\infty$, l'inf est atteint dans (3.2).

Proposition 3.2 : Pour tout compact K de S, $A,\rho,\eta > 0$, il existe ε_0, $r > 0$ tels que si $\lambda(g) \leq A$, $g_0 = z \in K$, on ait, pour tout x tel que $\delta(x,z) \leq r$ et $\varepsilon \leq \varepsilon_0$:

$$\varepsilon^2 \log P[d(y^\varepsilon(x),g) < \rho] \geq -\lambda(g)-\eta.$$

Proposition 3.3 : Soit $\Phi_x(A) = \{g\ ;\ \lambda(g) \leq A,\ g_0 = x\}$. Alors pour tout K compact de $S,\bar{A},\rho,\eta > 0$, il existe ε_0 tel que, si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $x \in K$, $A \leq \bar{A}$, on ait :

$$\varepsilon^2 \log P(d(y^\varepsilon(x),\Phi_x(A)) \geq \rho) \leq -A+\eta.$$

Théorème 3.4 : Pour tout borélien E de C_x, on a,

$$-\Lambda(\overset{o}{E}) \leq \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log P(y^\varepsilon(x) \in E) \leq \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log P(y^\varepsilon(x) \in E) \leq -\Lambda(\bar{E}).$$

La démonstration de la *prop.* 3.1 est facile.

Démonstration de la prop. 3.2 :

Il existe $f \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ telle que $\tilde{\lambda}(f) \leqslant A$ et $\beta_z(f) = g$. On applique 2) ci-dessus à K,A,ρ et $R=A+\eta$; on en tire ε_1,α,r. De plus, vu (i), il existe ε_2 tel que si $\varepsilon \leqslant \varepsilon_2$, $\varepsilon^2 \log P(||\varepsilon B-f||_T < \alpha) \geqslant -\tilde{\lambda}(f)-\eta/2$. Soit $\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$ tel que $\varepsilon_0^2 \log 2 < \frac{\eta}{2}$; alors pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $\delta(x,z) < r$: $P(||\varepsilon B-f||_T < \alpha) \leqslant P(||\varepsilon B-f||_T < \alpha$; $d(y^\varepsilon(x),g) \geqslant \rho)+P(d(y^\varepsilon(x),g) < \rho) \leqslant \exp(-\frac{R}{\varepsilon^2}) + P(d(y^\varepsilon(x),g) < \rho)$. Donc $-\lambda(g)-\eta/2=$ $-\tilde{\lambda}(f)-\eta/2 \leqslant \varepsilon^2 \log 2 + \mathrm{Max}(-R, \varepsilon^2 \log P(d(y^\varepsilon(x),g)) < \rho)$; mais, vu le choix de R, $-\lambda(g)-\frac{\eta}{2} > -R$ donc le max ne peut être atteint pour R d'où le résultat.

Démonstration de la prop. 3.3 :

Soit $M=M(x,A) = \{h \ ; \ d(h,g) \geqslant \rho$ pour tout g tel que $g_0= x$, $\lambda(g) \leqslant A\}$ alors $d(h,\Phi_x(A)) \geqslant \rho$ équivaut à $h \in M(x,A)$. On applique 2) ci-dessus à K, A,ρ et $R = A-\eta+1$; on en tire ε_1,α. Il existe $f_1,\dots,f_N \in \tilde{\Phi}(A)$ tels que $\tilde{\Phi}(A) \subset \bigcup_1^N B(f_i,\alpha) = U$; alors, puisque $g_i= \beta_x(f_i) \in \Phi_x(A)$, $\{\varepsilon B \in U\} \cap \{y^\varepsilon(x) \in M\} \subset \bigcup_1^N \{||\varepsilon B-f_i||_T < \alpha \ ; \ y^\varepsilon(x) \in M\} \subset \bigcup_1^N \{||\varepsilon B-f_i||_T < \alpha,\ d(y^\varepsilon(x),g_i) \geqslant \rho\}$ et donc, $P(\varepsilon B \in U,\ y^\varepsilon(x) \in M) \leqslant N \exp(-\frac{R}{\varepsilon^2})$ si $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ et $x \in K$. Par ailleurs U^c étant fermé, pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_2$, $\varepsilon^2 \log P(\varepsilon B \in U^c) \leqslant -\tilde{\lambda}(U^c) + \frac{\eta}{2} \leqslant -A + \frac{\eta}{2}$. D'où pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$, $P(y^\varepsilon(x) \in M) \leqslant P(\varepsilon B \in U^c) + N \exp(-\frac{R}{\varepsilon^2}) \leqslant \exp(-\frac{A}{\varepsilon^2} + \frac{\eta}{2\varepsilon^2}) + N \exp(-\frac{R}{\varepsilon^2}) \leqslant$ $\exp(-\frac{A}{\varepsilon^2} + \frac{\eta}{\varepsilon^2}).(\exp(-\frac{\eta}{2\varepsilon^2}) + N \exp(-\frac{1}{\varepsilon^2}))$ - Vu le choix de R- $\leqslant \exp(-\frac{A}{\varepsilon^2} + \frac{\eta}{\varepsilon^2})$, Si $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Ici ε_0 dépend de A ; mais soit $\bar{k}$ tel que $\bar{k}\eta \leqslant \bar{A} < (\bar{k}+1)\eta$; on peut choisir ε_0 tel que $P(y^\varepsilon(x) \in M(x,k\eta)) \leqslant \exp(-\frac{k\eta}{\varepsilon^2} + \frac{\eta}{\varepsilon^2})$, $k=1,2,\dots,\bar{k}$. Alors pour $k\eta \leqslant A < (k+1)\eta$, $M(x,A) \subset M(x,k\eta)$ et $P(y^\varepsilon(x) \in M(x,A)) \leqslant P(y^\varepsilon(x) \in M(x,k\eta))$ $\leqslant \exp(-\frac{k\eta}{\varepsilon^2} + \frac{\eta}{\varepsilon^2}) \leqslant \exp(-\frac{A}{\varepsilon^2} + \frac{2\eta}{\varepsilon^2})$.

Démonstration du théorème 3.4 :

La *prop.* 3.2 entraîne immédiatement l'inégalité de gauche. Supposons donc E fermé et soit $0 < A < \inf(\lambda(g) \ ; \ g \in E)$ - si $\Lambda(E) = 0$, il n'y a rien à montrer. Alors E et $\Phi_x(A)$ sont disjoints et $\Phi_x(A)$ compact donc il existe $\rho > 0$ tel que $d(y^\varepsilon(x), \Phi_x(A)) \geqslant \rho$ si $y^\varepsilon(x) \in E$ donc (*prop.* 3.3) $\overline{\lim}\ \varepsilon^2 \log P(y^\varepsilon \in E) \leqslant -A$.

4. *Identification de* λ.

1^{er}). On considère l'application, définie pour $f \in \mathcal{C}_0 \cap (\cup \,\mathcal{F}\,(A))$, $f \to \beta_x(f) = (h,a)$ solutions de (2.5) et on se propose de calculer $\hat{\lambda}(h,a)$ définie par (3.2).

On peut supposer que h et a sont absolument continues avec des dérivées dans $L^2(0,T)$ sinon, compte tenu des résultats du n°2, $\hat{\lambda}(h,a) = +\infty$. Il existe donc (*prop.* 3.1), f avec $\tilde{\lambda}(f) < +\infty$ telle que :

(4.1) $\quad \sigma(h_s)\dot{f}_s = k_s$ avec $k_s = \dot{h}_s - b(h_s) - \nu(h_s)1_{\partial D}(h_s)\dot{a}_s$.

Posons, pour $x \in \bar{D}$, $v \in R^p$,

(4.2) $\quad q^\star(x,v) = \operatorname{Inf}\{|w|^2 ;\ \sigma(x)w=v\}$; $= +\infty$ si $\{\ldots\} = \emptyset$.

On montre facilement (on omet x qui est fixé dans le lemme),

Lemme : Soit $q(v) = \langle v, \sigma\sigma^\star v\rangle$ et $q^\star(v) = \sup_t \{\langle 2t,v\rangle - q(tv)\}$. Alors $q^\star(v) < +\infty$ s.s.i $v \in \operatorname{Im}\sigma$ et, pour $v \in \operatorname{Im}\sigma$, soit $w_\rho = \sigma^\star(\rho I+\sigma\sigma^\star)^{-1}v$, w_ρ tend vers w lorsque $\rho \to 0$ et on a $\sigma w=v$ et $|w|^2 = q^\star(v) = \inf\{|w'|^2,\ \sigma w'=v\}$.

Soit $\Gamma = \{(x,v)\ ;\ x \in \bar{D},\ v \in R^p\ ;\ q^\star(x,v) < +\infty\}$, Γ est borélien ainsi que la fonction, définie pour $(x,v) \in \Gamma$, $\varphi(x,v) = \lim_{\rho\to 0} \sigma^\star(x)\,[\rho I+\sigma(x)\sigma^\star(x)]^{-1}v$ et on a $\sigma(x)\varphi(x,v) = v$ et $\sigma(x)w = v$ entraine $|w| \geq |\varphi(x,v)|$.

Remarquons enfin que $q^\star(x,v)$ est s.c.i du couple et que si $\sigma\sigma^\star(x)$ est inversible $q^\star(x,v) = \langle v,(\sigma\sigma^\star)^{-1}(x)v\rangle$.

Vu (4.1), $(h_t,k_t) \in \Gamma$ pp en t. Soit donc, u_t telle que $u_0 = 0$ et p.p. $\dot{u}_t = \varphi(h_t,k_t)$ et soit v_t tel que $(h,a) = \beta_x(v)$; on a $\sigma(h_t)\dot{u}_t = k_t = \sigma(h_t)\dot{v}_t$ et donc $|\dot{u}_t| \leq |\dot{v}_t|$ pp en t. En particulier pour $v=f$ ce qui entraine que $\tilde{\lambda}(u) < +\infty$ et $\tilde{\lambda}(u) \leq \tilde{\lambda}(v)$; donc $\hat{\lambda}(h,a) = \frac{1}{2}\int_0^T |\dot{u}_t|^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^T q^\star(h_t,k_t)dt$. En résumé,

Proposition 4.1 : La fonctionnelle de Cramer relative à $(x^\varepsilon,a^\varepsilon)$ solution de (2.3) est

(4.3) $\quad \hat{\lambda}(h,a) = \frac{1}{2}\int_0^T q^\star(h_t,\dot{h}_t - b(h_t) - \nu(h_t)1_{\partial D}(h_t)\dot{a}_t)dt.$

Il suffit alors d'appliquer le *th.* 3.4 pour avoir le résultat de grandes déviations cherché.

2^e) Déterminons maintenant la fonctionnelle λ définie par (3.2) et l'application

$f \to \beta_x(f) = h$ solution de (2.5). Si $\lambda(h) < +\infty$, il existe f avec $\tilde{\lambda}(f) < +\infty$ et a ne croissant que sur $\{s ; h_s \in \partial D\}$ et vérifiant $\int_0^T \dot{a}_s^2 1_{\partial D}(h_s)ds < +\infty$, tels qu'on ait (2.6) - voir le n°2. Donc :

$$(4.4)\quad \lambda(h) = \inf\{\hat{\lambda}(h,a), a = \int_0^{\cdot} \alpha_s 1_{\partial D}(h_s)ds \; ; \; \alpha_s \text{ mesurable } \geq 0, \int_0^T \alpha_s^2 1_{\partial D}(h_s)ds < +\infty\}$$

où $\hat{\lambda}(h,a)$ est donnée par (4.3).

Pour $x \in \partial D$ et $v \in R^p$, on définit :

$$(4.5)\qquad \theta^\star(x,v) = \inf_{\alpha \geq 0} q^\star(x, v-\nu(x)\alpha).$$

Soit $D^+(x,v)$ la demi-droite $\{v-\nu(x)\alpha, \alpha \geq 0\}$ et posons $\Delta = \{(x,v) \; ; \; x \in \partial D, v \in R^p, D^+(x,v) \cap \text{Im } \sigma(x) \neq \emptyset\}$. Alors $\theta^\star(x,v) < +\infty$ ssi $(x,v) \in \Delta$ et deux cas sont possibles :

(i) $D^+(x,v)$ rencontre $\text{Im } \sigma(x)$ en un seul point donc pour une seule valeur de α.

(ii) $D^+(x,v) \subset \text{Im } \sigma(x)$ ce qui entraine que v et $\nu(x)$ appartiennent à $\text{Im } \sigma(x)$ et alors $\alpha \to q^\star(x, v-\nu(x)\alpha)$ est un polynôme du second degré en α.

Il existe donc une application borélienne (unique) $\psi(x,v)$ de Δ dans R_+ telle que, pour tout $(x,v) \in \Delta$, $q^\star(x, v-\nu(x)\psi(x,v)) = \theta^\star(x,v)$. Puisque $\lambda(h) < +\infty$, $(h_t, \dot{h}_t - b(h_t)) \in \Delta$ pp sur $\{t \; ; \; h_t \in \partial D\}$; pour de tels t, soit, $\gamma_t = \psi(h_t, \dot{h}_t - b(h_t))$ qui est positive. Posant $k_t = \dot{h}_t - b(h_t) - \nu(h_t) 1_{\partial D}(h_t)\gamma_t$, on voit immédiatement que, pp en t, $q^\star(h_t, k_t) \leq q^\star(h_t, \dot{h}_t - b(h_t) - \nu(h_t)1_{\partial D}(h_t)\alpha_t)$ pour tout α_t intervenant dans (4.4) ; en particulier $\int_0^T q^\star(h_t, k_t)dt < +\infty$.

Mais, utilisant le 1^er^ et la fonction mesurable φ, si u_t est telle que $u_0 = 0$, $\dot{u}_t = \varphi(h_t, k_t)$, $\int_0^T |\dot{u}_s|^2 ds < +\infty$ et si $c_t = \int_0^t \gamma_s 1_{\partial D}(h_s)ds$, le triplet (u,h,c) vérifie (2.5) et le raisonnement du n°2 montre alors que $\int_0^T \gamma_s^2 1_{\partial D}(h_s)ds < +\infty$. L'inf dans (4.4) est bien atteint pour γ. Donc,

Théorème 4.2 : La fonctionnelle de Cramer relative à x^ε solution de (2.3) est :

$$\lambda(h) = \frac{1}{2}\int_0^T \theta^\star(h_t, \dot{h}_t - b(h_t))dt, \text{ où :}$$

$$(4.6) \quad \theta^{\star}(x,v) = \inf_{\alpha \geqslant 0} q^{\star}(x,v-\nu(x)\alpha 1_{\partial D}(x)) \quad , \quad x \in \overline{D},\ v \in R^{p}.$$

Le *théorème 3. 4* donne alors le résultat annoncé dans l'introduction (0.1).

Remarque : Le *théorème 4.2* généralise les cas suivants :

(i) $x \in D$, σ matrice carrée inversible, $\theta^{\star}(x,v) = |\sigma^{-1}(x)(v)|^2$; on retrouve le résultat de Ventcel-Freidlin [5].

(ii) $x \in D$, σ quelconque, $\theta^{\star}(x,v) = q^{\star}(x,v)$, c'est le résultat d'Azencott [2].

(iii) $x \in \partial D$, σ matrice carré inversible ; $q^{\star}(x,v) = |\sigma^{-1}(x)v|^2$ et on voit immédiatement que $q^{\star}(x,v-\alpha w)$ est minimum pour $\overline{\alpha} = \dfrac{< \sigma^{-1}(x)v,\sigma^{-1}(x)w >}{|\sigma^{-1}(x)w|^2}$ lorsque α parcourt R et donc :

$$(4.7) \quad \theta^{\star}(x,v) = |\sigma^{-1}(x)v|^2 - \frac{< \sigma^{-1}(x)v,\sigma^{-1}(x)\nu(x) >^2}{|\sigma^{-1}(x)\nu(x)|^2} . 1_{R_+}(< \sigma^{-1}(x)v,\sigma^{-1}(x)\nu(x) >)$$

C'est le résultat de Anderson-Orey [1].

5. Considérons pour D,σ,b vérifiant (2.1), (2.2), (2.3) la solution $x_t(x)$ de :

$$(5.1) \quad x_t = x + \int_0^t \sigma(x_s)dB_s + \int_0^t b(x_s)ds + \int_0^t \nu(x_s)da_s \quad \text{avec} \quad x_t \in \overline{D},$$

a_t processus croissant continu, $a_0 = 0$, ne croissant que sur $\{s \ ;\ x_s \in \partial D\}$.

Soit P_x la loi de $x_0(x)$ sur l'espace canonique (W,G_t,G,ξ_t), $W=C(R_+,\overline{D})$, $\xi_t(w) = w(t)$, alors (ξ_t,P_x) est un processus de Markov dont le générateur coïncide sur les fonctions φ de classe C^2 vérifiant $< \nabla\varphi,\nu > \equiv 0$ sur ∂D avec $L\varphi = \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^{\star}\sigma\sigma^{\star}(\nabla\varphi) + \nabla\varphi.b$. Il est bien connu qu'un résultat comme le *théorème 4.2* permet d'estimer, lorsuqe $t \to 0$, $P_x(\xi_t \in A)$.

En effet, posant $a_s^{\varepsilon} = a_{\varepsilon s}$, $B_s^{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} B_{\varepsilon s}$, $x_t^{\varepsilon} = x_{\varepsilon t}$, on a :

$$(5.2) \quad x_t^{\varepsilon} = x + \sqrt{\varepsilon}\int_0^t \sigma(x_u^{\varepsilon})dB_u^{\varepsilon} + \int_0^t \varepsilon b(x_u^{\varepsilon})du + \int_0^t \nu(x_u^{\varepsilon})da_u^{\varepsilon} \ ; \text{ avec } x_t^{\varepsilon} \in \overline{D} \text{ et } a_t^{\varepsilon}$$

processus croissant continu ne croissant que sur $\{s \ ;\ x_s^{\varepsilon} \in \partial D\}$. On peut donc appliquer le *théorème 4.2* en observant que $P_x(\xi_t \in A) = P(x_1^t \in \mathcal{A})$ où $\mathcal{A} = \{\varphi \ ;\ \varphi_0 = x,\ \varphi_1 \in A\}$. Donc si on pose :

(5.3) $\quad S(x,y) = \inf \{ \frac{1}{2} \int_0^1 \theta^\star(\varphi_t, \dot{\varphi}_t)dt \ ; \ \varphi_0 = x,\ \varphi_1 = y\}$

où $\theta^\star$ est défini par (4.6) ; on a :

Proposition 5.1 : $-\inf\limits_{y\in \mathring{A}} S(x,y) \leq \underline{\lim}_{t\to 0}\ t \log P_x(\xi_t \in A) \leq \overline{\lim}\ t \log P_x(\xi_t \in A)$

$\leq -\inf\limits_{y\in\bar{A}} S(x,y)$.

Exemple : On choisit $D = \{(x_1,x_2) \ ; \ x_1 > 0\}$; $\sigma(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\nu = \begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix}$ et on suppose $\rho > 0$ (par symétrie, on a le cas où $\rho < 0$).

Alors $q^\star(x,(v_1,v_2)) = v_1^2$ si $v_2 = 0$, $= +\infty$ si $v_2 \neq 0$ et

(5.4) $$\theta^\star((x_1,x_2),(v_1,v_2)) = \begin{cases} v_1^2 & \text{si } x_1 \neq 0,\ v_2 = 0 \\ (v_1 - v_2/\rho)^2 & \text{si } x_1 = 0,\ v_2 \geq 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc si $\lambda(\varphi) < +\infty$, on a, p.p, $\dot{\varphi}_s^2 = 0$ sur $\{s \ ; \ \varphi_s^1 \neq 0\}$ et $\dot{\varphi}_s^2 \geq 0$ sur $\{s \ ; \ \varphi_s^1 = 0\}$ et alors,

(5.5) $$\lambda(\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^1 [\,(\dot{\varphi}_s^1)^2\, 1_{\{\varphi_s^1 > 0\}} + (\dot{\varphi}_s^1 - \frac{1}{\rho}\dot{\varphi}_s^2)^2\, 1_{\{\varphi_s^1 = 0\}}\,]\, ds$$

Une trajectoire φ allant de (x_1,x_2) à (y_1,y_2) avec $\lambda(\varphi) < +\infty$ ne se déplace donc que parallèlement à $x_2 = 0$ tant que $x_1 > 0$ et dans le sens des x_2 croissant lorsque $x_1 = 0$. Mais une incursion à l'intérieur avec un $\lambda(\varphi)$ minimal va aller de (x_1,x_2) à $(0,x_2)$ pendant $[0,t_1]$; puis de $(0,x_2)$ à $(0,y_2)$ pendant $[t_1,t_2]$ - avec nécessairement $y_2 \geq x_2$ - enfin de $(0,y_2)$ à (y_1,y_2) pendant $[t_2,1]$ et sur chacun de ces intervalles ce sera la trajectoire à vitesse constante qui aura un $\lambda(\varphi)$ minimum vu la forme (5.5) de $\lambda(\varphi)$. Cette trajectoire sera donc de la forme :

$$\begin{cases} \varphi_s^1 = \frac{x_1}{t_1}(t_1 - s) \\ \varphi_s^2 = x_2 \end{cases} , \quad 0 \leq s \leq t_1$$

$$\begin{cases} \varphi_s^{\,1} = 0 \\ \varphi_s^{\,2} = \dfrac{1}{t_2-t_1}\,(x_2(t_2-s) - y_2(t_1-s)) \;, \quad t_1 \leqslant s \leqslant t_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_s^{\,1} = \dfrac{1}{1-t_2}\, y_1\,(s-t_2) \\ \varphi_s^{\,2} = y^2 \end{cases} \qquad t_2 \leqslant s \leqslant 1.$$

Pour une telle trajectoire,

$$\lambda(\varphi) = \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{t_1}\,(x_1)^2 + \frac{1}{t_2-t_1}\left(\frac{y_2-x_2}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{1-t_2}\,(y_1)^2\right\}$$

Comme pour $a,b,c > 0$, $\inf\{\alpha a+\beta b+\gamma c \; ; \; \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} = 1\}$ $= (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2$, on a,

$$\text{(5.6)} \qquad S((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[x_1 + \frac{1}{\rho}\,(y_2-x_2) + y_1 \right]^2 & \text{si } y_2 > x_2. \\ \frac{1}{2}\left[x_1 - y_1 \right]^2 & \text{si } y_2 = x_2 \\ +\infty & \text{si } y_2 < x_2. \end{cases}$$

6. Une autre application de ces résultats est la suivante. On se place toujours sous les hypothèses du n°2. Pour $x \in \overline{D}$, on note $g(x) = \sigma(x)\sigma^*(x) = (g_{ij}(x) \; ; \; 1 \leqslant i,j \leqslant p)$. Soit $(V_\varepsilon)_{\varepsilon \geqslant 0}$ une famille d'applications continues de $\overline{D}$ dans R telle que $V_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} V_0$ uniformément et $V^+ \in L^\infty(\overline{D})$.

Supposons que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\psi_\varepsilon(t,x)$ continue sur $[0,T] \times \overline{D}$, de classe $C^{1,2}$ sur $]0,T[\times \overline{D}$ et vérifiant :

$$\text{(6.1)} \quad \begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t}\,\psi(t,x) = \dfrac{\varepsilon^2}{2} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{p} g_{ij}(x)\, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) + \varepsilon \sum_{j=1}^{p} b_j^{\sqrt{\varepsilon}}(x)\, \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\,(t,x) + V_\varepsilon(x)\psi(t,x) \\ \qquad\qquad (t,x) \in \,]0,T] \times \overline{D} \\ < \nabla_x \psi(t,x), \nu(x) > \, = 0 \;, \quad (t,x) \in \,]0,T] \times \partial D \\ \psi(0,x) = f(x) \quad , \quad x \in \overline{D} \; ; \end{cases}$$

ceci pour une donnée initiale f continue et bornée sur $\overline{D}$.

On notera $\psi_\varepsilon^{\,f}(t,x)$ la solution de (6.1). Evidemment l'existence d'une telle fonction demande certaines hypothèses de non dégénérescence de σ et éventuellement de compacité sur $\bar{D}$. On montre alors facilement, grâce à la Formule de Itô, que :

$$(6.2) \qquad \psi_\varepsilon^f(t,x) = E\,\{f(x_t^{\sqrt{\varepsilon},x})\exp(\int_0^t \frac{1}{\varepsilon} V_\varepsilon(x_s^{\sqrt{\varepsilon},x})ds)\} \ ;$$

$x_t^{\sqrt{\varepsilon},x}$ étant la solution de (2.4) où on a remplacé ε par $\sqrt{\varepsilon}$.

On définit une application θ_x de $C_x([0,T],\bar{D})$ dans R par la formule $\theta_x(h) = \int_0^T V_0(h(s))ds$. Soit :

$$(6.3) \qquad S(T,x) = \sup\,\{\theta_x(h)-\lambda(h) \ ;\ h \in C_x([0,T]),\bar{D})\}$$

où λ est la fonctionnelle de Cramer donnée par le *théorème 4.2.*

Les résultats de Varadhan [4] joints aux estimations de grandes déviations (0.1) montrent alors que :

(i) $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \psi_\varepsilon^1(T,x) = S(T,x)$

(ii) si dans (6.3) le sup est atteint en un point unique $h^{T,x}$ alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\psi_\varepsilon^f(T,x)}{\psi_\varepsilon^1(T,x)} = f(h^{T,x}(T)).$$

REFERENCES

[1] R. ANDERSON et S. OREY. Small random perturbations of dynamical systems with reflecting boundary. Nagoya Math J Vol 60 (1976) 189-216.

[2] R. AZENCOTT. Grandes déviations et applications. Ecole d'été de probabilités de Saint Flour VII. 78. Lecture Notes in Math Springer Verlag (1980).

[3] P. PRIOURET. Remarques sur les petites perturbations de systèmes dynamiques. Séminaire de Strasbourg XVI. Lecture Notes de Math.Springer Verlag (1982).

[4] S.R.S. VARADHAN. Asymptotic probabilities and differential equations. Comm. Pure. Appli. Math. Vol 1 261-286. (1966).

[5] A.D. VENTSEL et M.J. FREIDLIN. On small perturbations of dynamical sytems Russian Math Surveys 25 1.55 (1970).