BERNARD HEINKEL

# Sur la loi du logarithme itéré dans les espaces réflexifs

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 16 (1982), p. 602-608

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__602_0>

# SUR LA LOI DU LOGARITHME ITERE DANS LES ESPACES REFLEXIFS

Bernard HEINKEL

Il est bien connu que dans les espaces de Banach de dimension infinie la loi du logarithme itéré prend deux formes voisines : la forme compacte ( LLIC ) et la forme bornée ( LLIB ) . La première est une propriété de compacité forte et la seconde une propriété de bornitude . La question suivante découle naturellement de cette double forme que prend la loi du logarithme itéré : ≪ Pour quelles topologies plus faibles que celle de la norme la LLIB peut-elle également se traduire comme une propriété de compacité ? ≫ J. Kuelbs a donné des réponses générales de caractère abstrait à cette question ( cf [ 5 ] Theorem 3.2 et Corollary 3.3 ) , pour les v.a. fortement de carré intégrable . La difficulté d'utilisation des projections en dimension finie des v.a. considérées semblait rendre illusoire tout espoir de donner des réponses plus précises à la question précédente . Or tout récemment V. Goodman , J. Kuelbs et J. Zinn [ 3 ] ont réussi à utiliser de façon optimale les projections en dimension finie pour établir des conditions nécessaires et suffisantes pour la LLIB et la LLIC dans les espaces de Hilbert . Leurs raisonnements typiquement hilbertiens laissaient néanmoins penser que l'utilisation des moments faibles d'une v.a. permettrait de préciser la LLIB pour d'autres espaces de Banach dans lesquels ≪ les suites de v.a. suffisamment régulières ont de bonnes propriétés de convergence presque sûre ≫ . Les espaces réflexifs sont de cette nature ; nous allons nous restreindre à ces espaces et montrer comment l'utilisation des moments faibles d'une v.a. permet de préciser à quel point la LLIB est une propriété de compacité faible .

Rappelons tout d'abord quelques notations .

Soit ( B , $\| \ \|$ ) un espace de Banach réel séparable et réflexif .

Considérons X une v.a. centrée à valeurs dans B et désignons par ( $X_n$ , $n \in \mathbb{N}$ ) une suite de copies indépendantes de X . Pour tout entier n on note :

$$S_n(X) = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

On définit d'autre part la suite de réels positifs ( $a_n$ , $n \in \mathbb{N}$ ) :

$$a_n = \sqrt{2n \, LLn} \quad ,$$

où :

$$\forall x > 0 \ , \ LLx = \operatorname{Log}( \sup( e , \operatorname{Log} x ) ) .$$

On dit que X vérifie la LLIB si :

$$P\{ \sup( \| S_n(X) \| / a_n , n \in \mathbb{N} ) < +\infty \} = 1 .$$

On se propose d'établir le critère suivant pour la LLIB :

THEOREME : Soit X une v.a. symétrique à valeurs dans un espace de Banach réel séparable et réflexif ( B , $\| \ \|$ ) . Cette v.a. X vérifie la LLIB si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i ) La v.a. X est faiblement de carré intégrable .

ii) Pour toute suite ( $\alpha_n$ , $n \in \mathbb{N}$ ) de réels positifs telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = +\infty ,$$

on a :

a) $P\{ \sup( \| S_n(Y) \| / a_n , n \in \mathbb{N} ) < +\infty \} = 1$ ,

b) la suite ( $S_n(Z) / a_n$ , $n \in \mathbb{N}$ ) converge faiblement presque sûrement vers 0 ,

où $S_n(Y)$ et $S_n(Z)$ désignent les sommes de rang n associées aux deux suites de v.a. :

$$Y_k = X_k \, I( \| X_k \| \leq \alpha_k )$$

$$Z_k = X_k \, I( \| X_k \| > \alpha_k ) .$$

Démonstration :

La condition ( ii ) et encore réalisée pour une seule suite ( $\alpha_n$ , $n \in \mathbb{N}$ ) suffit pour que X vérifie la LLIB .

Il est bien connu d'autre part que la condition ( i ) est nécessaire pour que X vérifie la LLIB .

Il reste donc à établir qu'une v.a. symétrique X vérifiant la LLIB satisfait à ( ii ) .

Fixons une suite ( $\alpha_n$ , $n \in \mathbb{N}$ ) de réels positifs telle que :

$$\lim_{n \to + \infty} \alpha_n = + \infty .$$

Par indépendance des $X_k$ il existe un réel $t > 0$ tel que :

$$(1) \qquad \sum_{n \in \mathbb{N}} P \{ \| ( S_{2^{n+1}} - S_{2^n} )(X) / a_{2^n} \| > t \} < + \infty .$$

Par symétrie on en déduit :

$$(2) \qquad \sum_{n \in \mathbb{N}} P \{ \| ( S_{2^{n+1}} - S_{2^n} )(Y) / a_{2^n} \| > t \} < + \infty ,$$

et finalement :

$$P \{ \sup ( \| S_n (Y) / a_n \| , n \in \mathbb{N} ) < + \infty \} = 1 .$$

Montrons à présent que la suite ( $S_n (Z) / a_n$ , $n \in \mathbb{N}$ ) converge faiblement presque sûrement vers 0 .

Pour cela on pose pour tout entier n :

$$\gamma_n = S_{2^n} (Z) / a_{2^n}$$

et on commence par établir que la suite ( $\gamma_n$ , $n \in \mathbb{N}$ ) converge vers 0 faiblement presque sûrement .

Remarquons tout d'abord que :

$$P\{\sup(\|Y_n\|, n \in \mathbb{N}) < +\infty\} = 1 .$$

Par application d'un résultat classique de J. Hoffmann - Jørgensen ( [ 4 ] , Corollary 3.4 ) on en déduit :

$$(3) \qquad E \sup(\|Y_n\|, n \in \mathbb{N}) < +\infty .$$

Désignons par $\mathcal{G}_n$ la tribu engendrée par les v.a. $X_1$ , $X_2$ , ... , $X_{2^n}$ et par T l'ensemble des temps d'arrêt bornés relatifs à la suite croissante de tribus ( $\mathcal{G}_n$ , $n \in \mathbb{N}$ ) .

Nous allons établir que ( ( $Y_n$ , $\mathcal{G}_n$ ) , $n \in \mathbb{N}$ ) est un amart faible tel que :

$$(4) \qquad \lim_{T} E(Y_\tau) = 0 \text{ dans la topologie faible .}$$

L'espace B étant réflexif la convergence faible presque sûre vers 0 de la suite ( $Y_n$ , $n \in N$ ) découlera immédiatement des propriétés ( 3 ) et ( 4 ) par application d'un théorème de A. Brunel et L. Sucheston [ 2 ] .

Soit $f \in B'$ . Pour tout entier k , on décompose la v.a. $f(Z_k)$ de la facon suivante :

$$f(Z_k) = u_k + v_k$$

où :

$$u_k = f(Z_k)\, I_{(|f(Z_k)| \leq \sqrt{k / LLk})}$$

$$v_k = f(Z_k)\, I_{(|f(Z_k)| > \sqrt{k / LLk})}$$

Remarquons déjà :

$$|S_{2^n}(v) / a_{2^n}| \leq \sqrt{S_{2^n}(v^2) / 2^n} \cdot \sqrt{\sum_{k \in \{1,\dots,2^n\}} I_{(|f(Z_k)| > \sqrt{k / LLk})}}$$

Une application de la loi forte des grands nombres et du lemme de Kronecker implique la convergence presque sûre vers 0 de la suite ( $S_{2^n}(v) / a_{2^n}$ , $n \in \mathbb{N}$ ) ( voir [ 7 ] démonstration du Théorème 4.3 pour des détails ) .

Montrons que de même la suite ( $S_{2^n}(u) / a_{2^n}$ , $n \in \mathbb{N}$ ) converge presque sûrement vers 0 . Pour établir ce résultat on utilisera la propriété d'intégrabilité exponentielle suivante [ 9 ] :

LEMME : <u>Soient</u> $\xi_1, \ldots, \xi_n$ <u>n v.a.r. indépendantes , centrées , de carré intégrable . Pour tout</u> $j = 1, \ldots, n$ <u>on pose :</u>

$$s_j^2 = \sigma^2 ( S_j (\xi) ) .$$

<u>On suppose qu'il existe n constantes positives</u> $c_1, \ldots, c_n$ <u>, telles que :</u>

i ) $0 < c_1 s_1 \le c_2 s_2 \le \ldots \le c_n s_n$

ii) $\forall j = 1, \ldots, n \quad P \{ \xi_j \le c_j s_j \} = 1$ .

<u>On désigne de plus par g la fonction de</u> $\mathbb{R}^+$ <u>dans</u> $\mathbb{R}^+$ <u>définie par :</u>

$$g (x) = ( e^x - 1 - x ) / x^2$$

<u>Alors on a pour tout</u> $t > 0$ :

$$E \exp ( t S_n ( \xi ) / s_n ) \le \exp ( t^2 g (c_n t) ) \qquad \bullet$$

Par construction des v.a. $u_k$ on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \sigma^2 ( S_{2^n} (u) / \sqrt{2^n} ) = 0 .$$

Soit $\varepsilon > 0$ . Par application du lemme précédent on remarque qu'il existe un entier N tel que :

$$\forall n > N \quad P \{ | S_{2^n} (u) / a_{2^n} | > \varepsilon \} \le 2 / ( n \operatorname{Log} 2 )^2$$

On a donc :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} P \{ | S_{2^n} (u) / a_{2^n} | > \varepsilon \} < + \infty ,$$

d'où l'on déduit la convergence presque sûre vers 0 de la suite $( S_{2^n} (u) / a_{2^n} , n \in \mathbb{N} )$ .

On a donc finalement :

$$(5) \qquad \lim_{n \to +\infty} f (\gamma_n) = 0 \quad \text{p.s.}$$

Le résultat de J. Hoffmann - Jørgensen déjà utilisé plus haut permet d'en déduire :

( 6 ) $\quad E \sup ( | f(\gamma_n) | , n \in \mathbb{N} ) < +\infty$ .

Un théorème de D. C. Austin , G. A. Edgar et A. Ionescu - Tulcea ( [ 1 ] Corollary 1 ) permet de déduire des propriétés ( 5 ) et ( 6 ) que $( f(\gamma_n) , n \in \mathbb{N} , \mathcal{G}_n )$ est un amart réel . On a donc :

$$\lim_{T} E ( f(\gamma_T) ) = 0 .$$

Ce résultat étant vrai pour toute $f \in B'$ , on a donc établi que la suite $( \gamma_n , n \in \mathbb{N} )$ converge faiblement presque sûrement vers 0 .

On en déduit par un raisonnement classique ( cf [ 8 ] Theorem 3.4.1 ) :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(Z) / a_n = 0 \text{ faiblement p.s.}$$

et ceci achève la démonstration du théorème .

Remarque :

Le théorème que nous venons d'établir donne un critère pour la LLIB dans le cas symétrique . Cette restriction n'est pas gênante car X vérifie la LLIB si et seulement si X - X' la vérifie , X' étant une copie indépendante de X ( cf [ 6 ] fin de la démonstration du Théorème 3.1 pour une justification de ce fait ) .

## Références

[ 1 ] AUSTIN D. G. , EDGAR G. A. , IONESCU - TULCEA A. : Pointwise convergence in terms of expectations
Z. Wahr. verw. Geb. 30 ( 1974 ) p. 17 - 26

[ 2 ] BRUNEL A. , SUCHESTON L. : Sur les amarts faibles à valeurs vectorielles
C. R. Acad. Sci. Paris 282 , Sér. A ( 1976 ) p. 1011 - 1014

[ 3 ] GOODMAN V. , KUELBS J. , ZINN J. : Some results on the LIL in Banach space with applications to weighted empirical processes
( 1980 ) à paraître dans Annals of Probability

[ 4 ] HOFFMANN - JØRGENSEN J. : Sums of independent Banach space valued random variables
Studia Math 52 ( 1974 ) p. 159 - 186

[ 5 ] KUELBS J. : The law of the iterated logarithm and related strong convergence theorems for Banach space valued random variables
Ecole d'été de Probabilités de St Flour 5 - 1975
Lecture Notes in Math 539 , p.224 - 314

[ 6 ] KUELBS J. : Some exponential moments of sums of independent random variables
T.A.M.S. 240 ( 1978 ) p. 145 - 162

[ 7 ] PISIER G. : Le théorème de la limite centrale et la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach
Séminaire Maurey - Schwartz 1975 - 76 , exposés n° 3 et 4

[ 8 ] STOUT W. F. : Almost sure convergence
( 1974 ) Academic Press , New York

[ 9 ] TEICHER H. : Generalized exponential bounds , iterated logarithm and strong laws
Z. Wahr. verw. Geb. 48 ( 1979 ) p. 293 - 307

Bernard HEINKEL

Institut de Recherche Mathématique Avancée
7 , Rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cédex