SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

ANTOINE EHRHARD

Sur la densité du maximum d'une fonction aléatoire gaussienne

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 581-601

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__581_0>

Séminaire de Probabilités XVI

SUR LA DENSITE DU MAXIMUM D'UNE FONCTION ALEATOIRE GAUSSIENNE.

par Antoine EHRHARD.

Exposé des 8 et 15 mai 1981, Séminaire d'Analyse des Fonctions Aléatoires.

Introduction : Cet exposé reprend la traduction par Durri-Hamdani d'un article de V.S. TSIREL'SON : The density of the maximum of a gaussian process, Theory of Probability and Applications, de 1974, [6], auquel il pourrait faire constamment référence. Les résultats de Tsirel'son sur les densités gaussiennes améliorent de façon notable ceux déjà anciens obtenus par N. Donald Ylvisaker [7] en 1964. Ils sont extraordinairement plus précis, mais font suite, il est vrai, à d'importantes découvertes ayant eu lieu entre temps. Après celle, en 1970, de la forte intégrabilité des vecteurs gaussiens par Xavier Fernique, [3], ce sont celles, à caractère plus géométrique, de Landau et Shepp [5] en 1970, puis de C. Borell en 1974 [1] qui permirent de tels raffinements. Nous ne connaissons pas de démonstrations en langue occidentale de ces résultats, il nous a donc paru intéressant de détailler ici la question.

La donnée principale de l'exposé, une fonction aléatoire gaussienne $\{X(t,\omega);\ t \in T,\ \omega \in \Omega\}$ sur son espace d'épreuves $(\Omega,\mathfrak{a},P)$, n'y apparaîtra jamais, car sous l'hypothèse habituelle de séparabilité, on la remplace par une suite $X = (X_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$.

Si, de plus, la suite gaussienne X a une probabilité non nulle d'être bornée, on peut grâce aux lois de zéro-un, la prendre à valeurs dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

0. Notations et présentations des résultats principaux.

La suite $(X_k\ ;\ k \in \mathbb{N})$ est une suite gaussienne sur l'espace d'épreuve $(\Omega,\mathfrak{a},P)$, à valeurs dans l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N})$ des suites bornées. On suppose ici que le rang de la suite $(X_k\ ;\ k \in \mathbb{N})$ est au moins égal à trois et que,

pour tout entier k , X_k a une espérance EX_k positive ou nulle.
Sous nos hypothèses $\mathrm{Sup}(X_k ; k \in \mathbb{N})$ est une variable aléatoire réelle. On note F sa fonction de répartition :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad F(a) = P\{\mathrm{Sup}(X_k; k \in \mathbb{N}) \leq a\} .$$

Le minimum essentiel $\mathrm{Inf}\{a : F(a) > 0\}$ de la variable aléatoire $\mathrm{Sup}(X_k; k \in \mathbb{N})$ est noté a_o .
Le théorème que l'on se propose de démontrer ici est alors le suivant.

THEOREME 01. <u>La fonction</u> F <u>est continue sur</u> $\mathbb{R}-\{a_o\}$; <u>sur l'intervalle</u> $]a_o, +\infty[$, F <u>est absolument continue</u>.
<u>La dérivée</u> F' <u>de</u> F <u>est définie et continue sauf sur un ensemble au plus dénombrable, sur lequel ses discontinuités sont des sauts décroissants. De plus</u> F' <u>est à variation bornée sur tout intervalle du type</u> $[a, +\infty[$ <u>avec</u> $a > a_o$.

On trouve dans la littérature les exemples qui prouvent que ce théorème ne peut être amélioré d'aucune façon.
Le théorème 0.1 sera une conséquence immédiate des théorèmes 0.2 et 0.3. qui suivent. Ils donnent des estimations fines du comportement de la fonction de répartition F et de la densité F' qui précisent le contenu du théorème 0.1.
La fonction de répartition Φ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est définie pour tout x réel par

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \exp(-\frac{1}{2} u^2) \, du/\sqrt{2\pi} \quad .$$

Pour tout r réel on pose $r^+ = r_+ = \mathrm{Max}(r,o)$ et $r_- = \mathrm{Max}(-r,o)$. Les théorèmes 0.2. et 0.3. s'énoncent alors.

THEOREME 0.2. <u>Soit</u> b <u>un nombre réel telqque</u> $F(b) > 0$; <u>on lui associe le nombre réel</u> t <u>tel que</u> $F(b) = \Phi(t)$.
Alors F' vérifie les deux relations suivantes :

0.2.1. $\forall\, a>b,\quad F'(a) \le (t_- + 2)^2(a-b)^{-2}(a_+) + (t_- + 2)(a-b)^{-1}$

0.2.2. $\forall\, a>b,\quad \limsup_{h\to o} \dfrac{F'(a+h)-F'a)}{h} \le (t_- +2)^2(a-b)^{-2}(a_+^2(a-b)^{-2}(t_- +2)+ \frac{10}{3}).$

THEOREME 0.2. <u>Soit</u> b <u>un nombre réel tel que</u> $F(b) > 0$; <u>on lui associe le nombre réel</u> t <u>tel que</u> $F(b) = \Phi(t)$.

<u>Alors</u> F' <u>vérifie les deux relations suivantes</u> :

0.3.1. $\forall\, a>b,\quad F'(a) \le (1 - \Phi(at/b))((1+2\alpha)at/b+1)(1+\alpha)t/b),$

0.3.2. $\forall\, a>b,\quad \limsup_{h\to o} \dfrac{F'(a+h)-F'(a)}{h} \le (1-\Phi(at/b))((1+\frac{7}{2}\alpha)^2\frac{a^2t^2}{b^2}+3)\frac{t^2}{b^2}(1+\frac{3}{2}\alpha)^2$

<u>où on a posé</u> $\alpha = b^2\, a^{-1}(a - b)^{-1}\, t^{-2}$.

La démonstration du théorème 0.1., 0.2 et 0.3. se fait en plusieurs étapes.

Pour tout entier N , on note $m = m(N)$ le plus grand nombre entier n tel que la suite $(X_1,\dots,X_n)$ soit de rang N ; $\mathbb{R}^N$ est l'espace auclidien de dimension N , on le munit de la mesure de Gauss, notée γ_N , dont la densité Φ_N est donnée par :

$$\gamma_N(d\,x) = (2\pi)^{-N/2} \exp(-\tfrac{1}{2}\|x\|^2)dx = \Phi_N(x)\, dx .$$

On choisit m formes affines $(\xi_1,\dots,\xi_m)$, définies pour tout k par la formule

$$\xi_k(x) = < x|z_k > + c_k ,$$

où z_k est un élément de $\mathbb{R}^N$ et c_k un nombre réel positif ou nul, en sorte que le vecteur aléatoire $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_m)$, d'espace d'épreuve $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \gamma_N)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$, ait même loi que le vecteur aléatoire $(X_1,\dots,X_m)$. On pose ensuite pour tout $x \in \mathbb{R}^N$:

$$f_N(x) = \mathrm{Sup}(\xi_j(x)\ ;\ 1 \le j \le m(N)) ,$$

on définit ainsi une variable aléatoire sur $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\gamma_N)$ dont F_N désignera la fonction de répartition. Pour tout a réel $F_N(a)$ est donné par

$$F_N(a) = \gamma_N\{x \in \mathbb{R}^N : f_N(x) \le a\} .$$

Par les étapes numérotées 1,2 et 3 on démontre les théorèmes 0.2.,0.3. ou leurs analogues pour la fonction de répartition G d'une variable aléatoire g, d'espace d'épreuve $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \gamma_N)$, convexe, non constante, de la classe $C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.

La fonction g sera en outre supposée vérifier l'inégalité suivante :

0.4.0. $\forall x \in \mathbb{R}^N, \forall t \geq 1, \quad g(t x) \leq t\, g(x)$.

Cette inégalité est déjà vérifiée par f_N, puisque, les c_j étant tous positifs ou nuls, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $t \geq 1$:

$$\operatorname{Sup}(\langle z_j | t x\rangle + c_j) \leq t \operatorname{Sup}(\langle z_j | x\rangle + c_j) \quad .$$

L'inégalité 0.4.0. implique pour g la propriété suivante :

0.5.0. $\forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \langle x | \operatorname{grad} g\,(x)\rangle \leq g(x)$.

Dans la quatrième étape la démonstration sera achevée par un passage à la limite sur g.

1. Première étape : expression de la densité en terme d'intégrale de surface.

Nous utiliserons les éléments suivants. La fonction g de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ est convexe, non constante, de classe C^2, elle satisfait 0.4.0 et conséquemment 0.5.0. ; α_o est le minimum de g :

$$\alpha_o = \inf\{g(x),\ x \in \mathbb{R}^N\} \ .$$

Pour tout $a > \alpha_o$, $V(a)$ et S_a sont respectivement les ensembles définis par :

$$V(a) = \{x \in \mathbb{R}^N / : g(x) < a\} \quad \text{et} \quad S_a = \{x \in \mathbb{R}^N : g(x) = a\} \ ,$$

de sorte que $V(a)$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^N$, d'intérieur non vide, dont le bord S_a est de classe C^2. Sur S_a le gradient de g ne peut s'annuler ; pour simplifier les notations on pose :

$$\forall a > \alpha_o,\ \forall x \in S_a, \quad 1_x = \frac{1}{\|\operatorname{grad}\, g(x)\|} \quad .$$

Le lemme 1.1. donne quelques formules générales.

LEMME 1.1. On suppose S_a bornée. Pour toute fonction Ψ assez régulière (de classe $C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$), on a les égalités :

1.1.1. $\frac{d}{da}\ \Psi(x)\ dx = \int_{S_a} \ell_x\ \Psi(x) d\ S_a(x)$

1.1.2. $\frac{d}{da} \int_{S_a} \Psi(x) d\ S_a(x) = \int_{S_a} (\ell_x \frac{\partial \Psi}{\partial n_x} + K_n\ \Psi(x)) d\ S_a(a)$,

où $dS_a(x)$ est l'élément d'aire de S_a , $\frac{\partial}{\partial n_x}$ est la dérivation suivant la direction normale antérieure à S_a et K_x la somme des courbures principales de S_a , en x .

Les formules du lemme 1.1. sont classiques, on en rappelle cependant la démonstration car celle-ci fournit une autre formule qui sera utile par la suite.

Démonstration du lemme 1.1. : Soit θ l'application de $S_a \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^N - V_a$ définie par :

$$\forall\ (x,\lambda) \in S_a \times \mathbb{R}_+ \ , \quad \theta(x,\lambda) = x + \lambda\ n_x \ ,$$

où n_x est le vecteur unitaire normal à S_a en x ; c'est une paramétrisation admissible de la variété $\mathbb{R}^N - V_a$.

Tout consiste ici à exprimer l'élément de volume $d\,\tau_a(z)$, au point $z = \theta(x,\lambda)$ en fonction de l'élément d'aire $dS_a(x)$, de $d\lambda$ et de θ . Le calcul se fait de la façon habituelle dans une base de l'espace tangent à $S_a \times \mathbb{R}_+$ au point (x,λ) . Si $(K_1,\ldots,K_{N-1})$ sont les courbures principales de S_a en x , $(u_1,\ldots,u_{N-1})$ sera une base propre correspondante, c'est à dire une base de directions principales telle que, dj étant la dérivation suivant u_j $(1 \le j \le N-1)$, on ait par la formule d'Olinde-Rodrigues :

$$\forall\ j\ ,\ 1 \le j \le N-1\ ,\quad K_j d_j\ x = d_j\ n_x\ ,\quad K_j \ge 0\ .$$

La base $(u_1,\ldots,u_{N-1})$ se complète en une base de l'espace tangent à $S_a \times \mathbb{R}_+$ en (x,λ). Si on pose $u_N = n_x$, $d_N = \frac{d}{dn_x}$ et $K_N = 0$, on a alors de façon synthétique :

$$\forall\, j,\ 1 \le j \le N,\quad d_j\theta = (1 + \lambda K_j)U_j\ .$$

L'élément de volume $d\tau_a(z)$ est donc :

$$1.2.1.\quad d\tau_a(z) = \Big(\prod_{k,\ell} < d_k\theta | d_\ell\theta >\Big)^{\frac{1}{2}} dS_a(x)d\lambda = dS_a(x)d\lambda \prod_{j=1}^{N} (1+\lambda K_j)\ .$$

Par le théorème d'inversion locale on peut écrire :

$$\int_{V_{a+h}} \Psi(x)dx - \int_{V_a} \Psi(x)dx = \int_{S_a} \int_{]0,h\ell_x+o(h)[} \Psi(x+\lambda n_x) \prod_{j=1}^{N} (1+\lambda K_j)d\lambda\ dS_a(x)\ ,$$

avec $\lim_{h\to 0} \frac{O(h)}{h} = 0$. On a donc pour tout Ψ :

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\int_{V_{a+h}} \Psi(x)dx - \int_{V_a} \Psi(x)dx\Big) = \int_{S_a} \ell_x\, \Psi(x)d\, S_a(x)\ ,$$

ce qui prouve 1.1.1. .

Pour la deuxième formule du lemme 1.1., on procède de façon similaire ; θ_h est la paramétrisation de S_{a+h} par S_a :

$$\theta_h : S_a \longrightarrow S_{a+h}\ ,\quad x \longmapsto x + \lambda(x)\, n_x\ ,$$

avec pour tout $x \in S_a$, $g(x + \lambda(x)\, n_x) = a + h$. Par le théorème d'inversion locale $\lambda(x)$ s'écrit :

$$\lambda(x) = \ell_x . h + hO(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0} O(h) = 0\ .$$

On conserve les notations précédentes, le déterminent $\det(< d_i\theta_h \mid d_j\theta_h > ;\ 1 \le i \le N-1\ ,\ 1 \le j \le N-1)$ se calcule facilement

$$\det(< d_i\theta_h | d_j\theta_h > ;\ 1 \le i,j \le N-1) = \prod_{j=1}^{N} (1+h\ell_x K_j)^2 + h^2\, O(h)\ ,$$

avec $\lim_{h\to 0} O(h) = 0$.

Et cela fournit la variation de l'élément de surface :

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{dS_{a+h}(\theta_h(x))}{dS_a(x)} - 1\right) = \ell_x K_x \quad .$$

En écrivant

$$\int_{S_{a+h}} \Psi(x)dS_{a+h}(x) - \int_{S_a} \Psi(x)dS_a(x) = \int_{S_a} \left(\Psi(\theta_h(x))\frac{dS_{a+h}(\theta_n(x))}{dS_a(x)} - \Psi(x)\right)dS_a(x)$$

et en faisant tendre h vers zéro après division des deux membres de cette égalité par h , on obtient :

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_{S_{a+h}} \Psi(x)dS_{a+h}(x) - \int_{S_a} \Psi(x)dS_a(x)\right) = \int_{S_a} \ell_x \frac{\partial\Psi}{\partial n_x} dS_a(x) +$$

$$+ \int_{S_a} \Psi(x)\ \ell_x^2\ K_x\ dS_a(x) \quad .$$

C'est la deuxième et dernière formule du lemme 1.1. .

L'expression de la dérivé $G'(a)$ de G en a résulte d'une application directe du lemme 1.1. :

1.1.2. $$G'(a) = \int_{S_a} \ell_x\ \Phi_N(x)\ dS_a(x) \quad ,$$

car on vérifie aisément que même si S_a n'est pas bornée, l'intégrale converge. Si S_a était bornée, on aurait la formule (1.1.2) avec $\Psi(x) = \ell_x \Phi_N(x)$. Comme on ne s'intéresse qu'à la limite supérieure des accroissements de G' , on va majorer le membre de gauche de 1.1.2.. Pour simplifier les notations, on pose :

$$D^+ G'(a) = \limsup_{h\to 0} \frac{G'(a+h) - G'(a)}{h} \quad .$$

La dérivée normale de $\ell_x\ \Phi_N(x)$ s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial n_x} \ell_x\ \Phi_N(x) = \left(\frac{\partial}{\partial n_x} \ell_x\right) \Phi_N(x) - \langle n\,|n_x\rangle\ \Phi_N(x) \ .$$

Puisque g est convexe, la dérivée normale à S_a en un point x de S_a du module de son gradient est positive, ceci donne $\frac{\partial}{\partial n_x} \ell_x \leq 0$. Si on pose

$C_x = \langle x | n_x \rangle$, alors pour tout $x \in S_a$:

$$-c_x \leq (c_x)^- .$$

On a donc l'inégalité suivante

1.2.3. $$D^+G'(a) \leq \limsup_{h \to 0} \int_{S_{a+h}} \ell_x^2 (C_x)^- \Phi_N(x) + \ell_x^2 K_x \Phi_N(x)\, dS_{a+h}(x) .$$

Dans la prochaine étape, les membres de gauche des inégalités 1.2.2. et 1.2.3. apparaîtront clairement comme finis.

2. Deuxième étape : majorations.

Le nombre réel a étant fixé, $a > \alpha_o$, on choisit $b \in]\alpha_o, a[$.
L'inégalité de convexité de g :

$$\forall x, \forall g, \quad g(x) - g(y) \leq \langle x-y | \text{grad } g(x) \rangle$$

implique alors la suivante

$$\forall x \in S_a, \forall y \in V_b , \quad a-b \leq \|x-y\| . \| \text{grad } g(x) \| .$$

On note $d(x,V_b)$ le minimum de $\|x-y\|$ pour $y \in V_b$ et on a pour tout x sur S_a :

2.0.1. $$\ell_x \leq d(x,V_b)(a-b)^{-1} .$$

Ceci fournit du même coup une estimation de $c_x = \langle x | \text{grad } g(x) \rangle . \ell_x$. Grâce à l'hypothèse qui implique 0.5.0. on a en effet :

$$c_n \leq g(x)\, \ell_x$$

qui donne avec 2.0.1., pour tout x sur S_a , l'inégalité

2.0.2. $$c_x^+ \leq a^+ d(x,V_b)(a-b)^{-1} .$$

L'expression ℓ_x qui figure dans les membres de gauche des inégalités 1.2.2. et 1.2.3. apparaît ainsi bien majorée par des termes, dépendant étroitement des données du problème en ce qui concerne $(a-b)^{-1}$, et d'un traitement facile, pour $d(x,V_b)$, par un emploi ad hoc de l'inégalité de Borell. Cela toutefois si l'on parvient à exprimer les intégrales de surface de 1.2.2. et 1.2.3. sous la forme d'intégrales gaussiennes de fonctions croissante de $d(x,V_b)$ sur $\mathbb{R}^N - V_a$. L'inégalité de Borell aura en effet comme corollaire la proposition 3.2. qui permet de majorer de telles intégrales par des intégrales gaussiennes sur $\mathbb{R}$.

Grâce à la formule 1.2.1., où les K_j sont positifs, on a pour toute fonction Ψ positive les inégalités :

$$2.0.3. \quad \int_{S_a} \int_0^{\infty} \Psi(x + \lambda\, n_x)\, d\lambda\, d\, S_a(x) \le \int_{\mathbb{R}^N - V_a} \Psi(x) dx$$

$$2.0.4. \quad \int_{S_a} \int_0^{\infty} \varphi(x + \lambda\, n_x)\, \lambda\, d\lambda\, K_x dS_a(x) \le \int_{\mathbb{R}^N - V_a} \Psi(x) dx \ .$$

En conséquence desquelles, il suffit pour faire apparaître dans 1.2.2. et 1.2.3. des intégrales gaussiennes sur $\mathbb{R}^N\ V_a$, de majorer $\Phi_N(x)$ $(x \in S_a)$ par les intégrales de Φ_N sur l'axe $\{x + \lambda\, n_x,\ \lambda \in \mathbb{R}_+\}$. C'est de la proposition suivante.

PROPOSITION 2.1. <u>Pour tout</u> x <u>sur</u> S_a <u>on a les inégalités</u>

$$2.1.1. \quad \Phi_N(x) \le (c_x^+ + 1) \int_0^{\infty} \Phi_N(x + \lambda\, n_x) d\lambda$$

$$2.1.1. \quad \Phi_N(x) \le ((c_x^+)^2 + 3) \int_0^{\infty} \lambda\ \Phi_N(x + \lambda\, n_x) d\lambda$$

$$2.1.3. \quad c_x^-\ \Phi_N(x) \le \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \Phi_N(x + \lambda\, n_x) d\lambda \ .$$

On démontre cette proposition avant de l'utiliser.

<u>Démonstration de la proposition 2.1.</u> : Les inégalités de la proposition 2.1. généralisent leurs formes réduites rassemblées ici sous le lemme 2.2.

LEMME 2.2. Pour tout réel on a les inégalités

2.2.1. $\exp(-t^2/2) \le (t_+ + 1) \int_t^\infty \exp(-u^2/2)\, du$

2.1.2. $\exp(-t^2/2) \le (t_+^2 + 3) \int_t^\infty \exp(-u^2/2)\, du$

2.1.3. $t_- \exp(-t^2/2) \le (1/3) \int_t^\infty \exp(-u^2/2)\, du$.

A partir de l'inégalité 2.2.1. on obtient l'inégalité 2.1.1. de la manière suivante

$$\Phi_N(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \exp(-(\|x\|^2 - c_x^2)/2) \exp - c_x^2 / 2$$

$$\le (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \exp(-(\|x\|^2 - c_x^2)/2)(c_x^+ + 1) \int_0^\infty \exp(-(u + c_x)^2/2) du$$

$$= (c_x^+ + 1) \int_0^\infty \Phi_N(x + \lambda\, n_x) d\lambda \quad .$$

Cela montre que 2.1.1. découle directement de 2.2.1. Il en va de même pour 2.1.2. et 2.1.3. à partir respectivement de 2.2.2. et 2.2.3. Le lemme 2.2. étant laissé en exercice, la démonstration de la proposition 2.1. est achevée.

Avant d'opérer, on pose pour tout élément z de $\mathbb{R}^N V_a$ qui s'écrit $z = x + \lambda\, n_x$, avec x sur S_a et $\lambda > 0$ $H_a(z) = x$; H_a est une application de de $\mathbb{R}^N$-V_a sur S_a car pour tout z une telle écriture est unique.
Commençons par $G'(a)$. Partant de 1.2.2. on obtient avec la proposition 2.1. (2?1.1.) l'inégalité

$$G'(a) \le \int_{S_a} \ell_x (c_x^+ + 1) \int_0^\infty \Phi_N(x + \lambda \quad _x) d\lambda \ ,$$

qui s'écrit encore avec la fonction $H = H_a$ sous la forme

$$G'(a) \le \int_{S_a} \int_0^\infty \ell_{H(z)}\, (c_{H(z)}^+ + 1)\, \Phi_N(x + \lambda\, n_x) d\lambda\, dS_a(x) \ .$$

Grâce à 2.0.3., 2.0.2. et 2.0.1., $G'(a)$ se majore donc par

$$2.3.1. \quad G'(a) \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus V_a} d(H(z),V_b)(a-b)^{-1} \left(a + d(H(z),V_b)(a-b)^{-1} + 1\right)\gamma_N(dz) .$$

L'inégalité 2.3.1. sera reprise dans la troisième étape.

Pour la limite supérieure des accroissements de G' en a, notée $D^+ G'(a)$, on procède de façon similaire. Reprenant 1.2.3. on a d'une part, en employant successivement le lemme de Fatou, la proposition 2.1. (2.1.3.) et les inégalités 2.0.3., 2.0.1., la majoration suivante

$$\limsup_{h \to 0} \int_{S_{a+h}} \ell_x^2(c_x^-)\, \Phi_N(x)dS_{a+h}(x) \leq \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^N \setminus V_a} d(H(z),V_b)^2(a-b)^{-2}\gamma_N(dz) .$$

D'autre part les mêmes arguments utilisés avec 2.1. (2.1.2), 2.0.4., 2.0.2., et 2.0.1. fournissent l'inégalité

$$\limsup_{h \to 0} \int_{S_{a+h}} \ell_x^2\, \Phi_N(x)K_x dS_{a+h}(x) \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus V_a} (a-b)^{-2}d(H(z),V_b)^2\left(a_+^2(a-b)^{-2}d(H(z),V_b)^2 + 3\right) \gamma_N(dz) .$$

On obtient donc pour $a > b > \alpha_o$ l'inégalité suivante

$$2.3.2. \quad D^+G'(a) \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus V_a} (a-b)^{-2}d(H(z),V_b)^2\left(a_+^2(a-b)^{-2}d(H(z),V_b)^2 + \frac{10}{3}\right) \gamma_N(dz) .$$

Et cela achève la deuxième étape.

3. Troisième étape : expression des intégrales gaussiennes en terme de fonction de répartition.

L'inégalité fondamentale est ici l'inégalité du type Brunn-Minkowski pour les mesures gaussiennes que l'on rappelle sans en donner de démonstration.

Rappel : inégalité de Borell [1]. Pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}^N$ et tout nombre réel positif r, on note A_r l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^N$ dont la distance à A n'éxcède pas r :

$$A_r = \{x \in \mathbb{R}^N : d(x,A) \leq r\} .$$

En désignant par γ_N^* la mesure de Gauss extérieure, le théorème de Borell s'énonce comme suit.

THEOREME 3.1. *Soit* A *est un borélien de* $\mathbb{R}^N$; *on lui associe le nombre réel* t *tel que*

$$\gamma_N(A) = \Phi(t) .$$

Alors pour tout nombre réel positif r , *on a* :

$$\gamma_N^*(A_r) \geq \Phi(t+r) .$$

Avec les notations introduites dans la deuxième partie de cet exposé, la proposition suivante s'énonce comme un corollaire du théorème 3.1.

PROPOSITION 3.2. *Soient* h *une fonction croissante de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}_+$, A *une partie convexe de* $\mathbb{R}^N$ *et* t *un nombre réel tel que* $\gamma_N(A) = \Phi(t)$; *on a* :

$$\int_{\mathbb{R}^N - A} h(d(x,A))\, \gamma_N(dx) \leq \int_t^\infty h(u-t)\, d\Phi(u) .$$

Démonstration de la proposition 3.2. : On peut supposer $h(0) = 0$, on a alors :

$$\int_{\mathbb{R}^N - A} h(d(x,A))\gamma_N(dx) = \int_0^\infty \gamma_N\{d(x,A) > u\} dh(u) = \int_0^\infty (1-\gamma_N(A_u))dh(u) .$$

Le théorème 3.1. implique $\gamma_N(A_u) \geq \Phi(t+u)$; on en déduit :

$$\int_{\mathbb{R}^N - A} h(d(n,A))\gamma_N(dx) \leq \int_0^\infty (1-\Phi(t+u))dh(u) = \int_t^\infty h(u-t)d\Phi(u) .$$

Ce qui prouve la proposition 3.2.

Comme application de la proposition 3.2., donnons tout de suite la preuve du théorème 0.2. dans le cas réduit.

Démonstration des inégalités du théorème 0.2.: On reprend l'inégalité 2.3.1. de la deuxième étape

(2.3.1.) $\forall\, a, \forall\, b,\ a > b > \alpha_o$,

$$G'(a) \leq \int_{\mathbb{R}^N - A} d(H(z),V_b)(a-b)^{-1}(a + d(H(z),V_b)(a-b)^{-1} + 1)\gamma_N(dz) .$$

Puisque a est plus grand que b on a l'inclusion $V_b \subset V_a$; d'autre part pour tout élément z de $\mathbb{R}^N - V_a$ on a

$$d(H_a(z),V_b) \leq d(z,V_b) .$$

La fonction $d(z,V_b)$ s'étend à $\mathbb{R}^N - V_b$, l'inégalité 2.3.1. implique

$$G'(a) \leq \int_{\mathbb{R}^N - V_b} d(z,V_b)(a-b)^{-1}(a + d(z,V_b)(a-b)^{-1} + 1)\ \gamma_N\ (dz) .$$

Soit t le nombre réel tel que $\gamma_N(V_b) = \Phi(t)$; la proposition 3.2. s'applique alors et fournit la première inégalité du théorème 0.2.

3.3.1. $\quad G'(a) \leq \int_t^\infty (u-t)(a-b)^{-1}\ (a + (u-t)(a-b)^{-1} + 1)d\,\Phi(u)$.

Pour $D^+G'(a)$ on procède de la même façon. On conserve les notations précédentes ; avec l'inégalité 2.3.2. et la proposition 3.2. on a successivement les inégalités suivantes :

2.3.2. $D^+G'(a) \le \int_{\mathbb{R}^N \setminus V_a} (a-b)^{-2}\, d(H(z),V_b)^2 (a_+^2\, (a-b)^{-2}\, d(H(z),V_b)^2 + \frac{10}{3})\gamma_N(dz)$

$$D^+G'(a) \le \int_{\mathbb{R}^N \setminus V_a} (a-b)^{-2}\, d(z,V_b)^2 (a_+^2\, (a-b)^{-2}\, d(z,V_b)^2 + \frac{10}{3})\, \gamma_N(dz)$$

$$D^+G'(a) \le \int_{\mathbb{R}^N \setminus V_b} (a-b)^{-2}\, d(z,V_b)^2 (a_+^2\, (a-b)^{-2}\, d(z,V_b)^2 + \frac{10}{3})\gamma_N(dz)$$

3.3.2. $D^+G'(a) \le \int_t^\infty (a-b)^{-2}(u-t)^2 (a_+^2\, (a-b)^{-2}(u-t)^2 + \frac{10}{3}) d\Phi(u)$.

Pour obtenir les expressions exactes du théorème 0.2. il suffit de remarquer que pour tout entier $k \in \{1,2,3,4\}$ et tout nombre réel t on a

$$\int_t^\infty (u-t)^k\, d\,\Phi(u) \le (t_- + 2)^k \quad .$$

On a donc les inégalités

$$G'(a) \le (a-b)^{-1}\, (t_- + 2)(a_+\, (t_- + 2)(a-b)^{-1} + 1) \ ,$$
$$D^+G'(a) \le (a-b)^{-2}\, (t_- + 2)^2\, (a_+^2\, (t_- + 2)^2\, (a-b)^{-2} + \frac{10}{3}) \ ,$$

ce sont celles du théorème 0.2.

Démonstration du théorème 0.3. dans le cas réduit. On reprend la partie précédente avec des estimations plus précises.

Rappel : inégalité de Landau et Shepp [5].

THEOREME 3.4. Si C est une partie convexe de $\mathbb{R}^N$ on lui associe le nombre réel t tel que $\gamma_N(C) = \Phi(t)$ et on suppose que t est positif. Alors pour tout nombre réel $r \ge 1$ on a :

3.4.1. $\gamma_N(rC) \ge \Phi(rt)$.

Si c et r sont réels avec $(c > \alpha_o\ , r \ge 1)$ l'inégalité 0.4.0 :

$$g(r\,c) \;\le\; r\,g(c)\ ,$$

a pour conséquence l'inclusion

$$V_{r\,c} \supset r\,V_c\ .$$

On en déduit l'inégalité

$$G(r\,c) \geq \gamma_N(r\,V_c) \ .$$

Si de plus on suppose que $G(c) = \gamma_N(V_c) = \Phi(t) > \frac{1}{2}$, on a alors par le théorème 3.4. l'inégalité

$$G(r\,c) \geq \Phi(r\,t) \ .$$

Ici a,b et t sont des nombres réels qui vérifient

$$a > b, \ G(b) > \frac{1}{2} \ , \ G(b) = \Phi(t) \ ,$$

nécessairement b est positif, on prend $r = a/b$ dans l'inégalité précédente, elle s'écrit alors

$$G(a) \geq \Phi(a\,t/b) \ .$$

Par ailleur, pour tout élément x de S_a l'inclusion :

$$V_a \subset \{z : \langle z | n_x \rangle \leq c_x\}$$

implique l'inégalité :

$$G(a) \leq \Phi(c_x) \ .$$

En rassemblant toutes ces inégalités on obtient la suivante :

3.5.1. $\forall\, x \in S_a, \forall\, a \in \mathbb{R}, \forall\, b \in \mathbb{R}, \ a > b, \ b = \Phi(t) > \frac{1}{2}, \ c_x \geq at/b$.

L'inégalité 3.5.1. permet de minorer la distance $d(x,V_b)$ d'un point x sur S_a à l'ensemble V_b . En effet, on reprend 2.0.2. :

2.0.2. $c_x \leq a.d(x,V_b) \ / \ (a-b)$,

avec 3.5.1. on a pour tout élément x de S_a l'inégalité

$$d(x,V_b) \geq (a-b)t/b = at/b - t \ .$$

A fortiori si z est un élément de $\mathbb{R}^N - V_a$ on a

$$d(z,V_b) \geq at/b - t \ ,$$

et cela permet de remplacer les intégrales sur $[t, +\infty[$ des membres de gauches de 3.3.1. et 3.3.2. par les mêmes prises sur $[\frac{at}{b} , +\infty[$. On obtient respectivement

3.5.2. $G'(a) \le \int_{at/b}^{+\infty} (a-b)^{-1}(u-t)(a(a-b)^{-1}(u-t) + 1)d\Phi(u)$,

et

3.5.3. $D^{+}G'(a) \le \int_{at:b}^{+\infty} (a-b)^{-2}(u-t)^{2}(a^{2}(a-b)^{-2}(u-t)^{2} + \frac{10}{3})\, d\Phi(u)$,

pour tous nombres réels, a,b avec $a \ge b$ et $G(b) = \Phi(t) > \frac{1}{2}$. Pour obtenir les expressions finales du théorème 0.3. on procède de la façon suivante. Puisque le rapport $\Phi(u)/(1-\Phi(T))T \exp -T(u-T)$ est décroissant sur $[T, +\infty[$ et que l'on a :

$$\int_{T}^{\infty} \Phi'(u)du = \int_{T}^{\infty} (1-\Phi(T))T \exp - T(u-T)du \quad ,$$

pour toute fonction croissante h on a l'inégalité :

$$\int_{T}^{\infty} h(u)d\,\Phi(u) \le (1-\Phi(T))T \int_{T}^{\infty} h(u) \exp - T(u-T)du \quad .$$

On a donc pour tout nombre entier k :

$$\int_{at/b}^{\infty} (u-t)^{k} d d\Phi(u) \le (1-\Phi(at/b))(at/b) \int_{at/b}^{\infty} (u-t)^{k} \exp - \frac{at}{b}(u - \frac{at}{b})du$$

$$= (1-\Phi(at/b))(\frac{a-b}{b}\,.t)^{k} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!} \alpha^{j} \quad ,$$

si on pose $\alpha = b^{2}\, a^{-1}(a-b)^{-2}\, t^{-2}$.

On obtient ainsi de 3.5.2. les inégalités :

$$G'(a) \le (1 - \Phi(at/b))((1+2\alpha + 2\alpha^{2})a \frac{t^{2}}{b^{2}} + (1+\alpha| \frac{t}{b})$$

$$\le (1 - \Phi(at/b))((1+4\alpha + 2\alpha^{2})a$$

$$\le (1 - \Phi(at/b))((1+4\alpha + 2\alpha^{2})a \frac{t^{2}}{b^{2}} + (1+\alpha) \frac{t}{b})$$

$$= (1 - \Phi(at/b))((1+2\alpha)a \frac{t}{b} + 1)(1+\alpha) \frac{t}{b}$$

de même qu'a partir de 3.5.3. :

$$D^{+}G'(a) \le (1 - \Phi(at/b))((1+4\alpha + 12\alpha^{2} + 24\alpha^{3})\frac{a^{2}t^{4}}{b^{4}} + \frac{10}{3}(1+2\alpha+2\alpha^{2})\frac{t^{2}}{b^{2}})$$

$$\le (1 - \Phi(at/b))((1+10\alpha + \frac{58}{4}\alpha^{2} + \frac{200}{4}\alpha^{3} + 141\,\alpha^{4}) + 3(1+3\alpha+\frac{9}{4}\alpha^{2})\frac{t^{2}}{b^{2}}$$

$$= (1 - \Phi(at/b))((1 + \frac{7}{\alpha}\alpha)^2 \frac{a^2t^2}{b^2} + 3)(1 + \frac{3}{2}\alpha)^2 \frac{t^2}{b^2} .$$

Cela achève la démonstration du théorème 0.3. pour G et marque la fin de la troisième étape.

4. Quatrième étape :

Le nombre entier N étant plus grand que 3, f_N est la fonction convexe dans $\mathbb{R}^N$ donnée par

$$f_N(x) = \mathrm{Sup}(< z_j | x > + c_j \; ; \; j = 1,2,\ldots,m(N)) ,$$

avec $c_j \geq 0$ pour tout j. Le lemme suivant permet d'approcher f_N par des fonctions auxquelles s'appliquent les résultats précédents.

LEMME 4.1. On suppose que les c_j, pour $j = 1,\ldots,m$ sont strictement positifs. Pour tout nombre réel r strictement positif, il existe une fonction $g = g_r$, convexe, de la classe $C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ qui vérifie les propriétés suivantes

4.1.1. $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$, $f_N(x) \leq g(x) \leq f_N(x) + r(\|x\| + 1)$

4.1.2. $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$, $\forall\, u \geq 1$, $g(u\,x) \leq u\,g(x)$.

Démonstration du lemme 4.1. : On rappelle d'abord un résultat classique sur l'approximation des ensembles convexes que l'on ne démontre pas ici.

THEOREME 4.2. Si A est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ alors pour tout r réel, strictement positif, il existe une partie convexe $A(r)$ dans $\mathbb{R}^n$ dont la fonction d'appui est analytique et qui vérifie

4.2.1. $A \subset A(r) \subset A + r\,B(0,1)$,

où $B(0,1)$ est la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

On pose pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, $f_N(x,t) = \mathrm{Sup}(< z_j | x > + c_j t \; ; \; 1 \leq j \leq m)$ et on applique le théorème 4.2. en prenant pour A l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{(z_j, c_j) \; ; \; 1 \leq j \leq m\}$ dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. On note $g = g_r$ la fonction d'appui du convexe $A(r)$ obtenu grâce au théorème 4.2. Les inclusions de 4.2.1.

fournissent les inégalités suivantes :

$$f_N(x,t) \le g(x,t) \le f_N(x,t) + r(\|x\|^2 + 1)^{\frac{1}{2}} .$$

On prend $t = 1$ et on pose $g(x) = g(x,1)$, on obtient alors 4.1.1. L'inégalité 4.1.2. est vérifiée si r est assez petit pour que l'on ait

$$A(r) \subset \mathbb{R}^N \times \{t \ge 0\} ,$$

c'est possible, car on suppose $c_j > 0$ pour tout j.

Cela démontre le lemme 4.1.

La proposition suivante est alors un corollaire du théorème 4.2.

PROPOSITION 4.3. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction f_ϵ, convexe, de la classe $C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ vérifiant l'inégalité 4.1.2. et telle que l'on ait

4.3.1. $\forall\, a \in \mathbb{R},\ |\gamma_N\{x \in \mathbb{R}^N,\ f_\epsilon(a) < a\} - \gamma_N\{x \in \mathbb{R}^N,\ f_N(x) < a\}| < \epsilon$.

Démonstration de la proposition 4.3.: On peut évidemment supposer que tous les C_j sont strictement positifs. Soit K une boule bornée de $\mathbb{R}^N$ telle que, pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, on ait $\gamma_N(K \cap B) \ge \gamma_N(B) - \epsilon/4$; on choisit un nombre réel η tel que, pour tout réel a,

$$|\gamma_N(K \cap \{f_N(x) < a - \eta\}) - \gamma_N\{K \cap \{f_N(x) < a\}| < \epsilon/2$$

puis un nombre réel r, positif, assez petit pour avoir

$$r \operatorname{Sup}(\|x\| + 1 \ ;\ x \in K) < \eta .$$

Grâce au lemme 4.1. il existe alors une fonction f_ϵ ayant les propriétés voulues et vérifiant pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}|\gamma_N\{f_\epsilon(x) < a\} - \gamma_N\{f_N(x) < a\}| &\le \epsilon/2 + |\gamma_N(\{f_\epsilon(x) < a\} \cap K) - \gamma_N(\{f_N(x) < a\} \cap K)| \\ &\le \epsilon/2 + |\gamma_N(\{f_N(x) < a - \eta\} \cap K) - \gamma_N(\{f_N(x) < a\} \cap K)| \\ &\le \epsilon .\end{aligned}$$

La proposition 4.3. s'en suit.

Application : Fixons une suite $\epsilon = (\epsilon(N) \; ; N \in \mathbb{N})$ de nombres réels positifs décroissant vers zéro. A tout $N \geq 3$,on associe par la proposition 4.3. une fonction $f_{\epsilon(N)}$, convexe, de classe $C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, vérifiant les inégalités 4.1.2. et 4.1.3., à laquelle s'applique donc le théorème 0.2. sous sa forme réduite. On note $F_{N,\epsilon}$ la fonction de répartition correspondante, c'est la fonction définie par

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad F_{N,\epsilon}(a) = \gamma_N\{f_{\epsilon(N)}(x) \leq a\} \; .$$

On sait que la suite $(F_N \; ; N \in \mathbb{N})$ tend vers F en tout point de continuité de F ; grâce à l'inégalité 4.3.1. il en va de même pour la suite $(F_{N,\epsilon} \; ; N \in \mathbb{N})$. Soit b un nombre réel strictement plus grand que α_o , on lui associe pour chaque N entier le nombre réel t_N tel que $F_N(b) = \Phi(t_N)$; pour tout N , t_N est minoré par le nombre réel strictement positif $\Phi^{-1}(F(b))$. On va en déduire l'existence d'un minorant pour la suite $(t_N^\epsilon \; ; N \in \mathbb{N})$ définie par :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \quad F_{N,\epsilon}(b) = \Phi(t_N^\epsilon) \; .$$

En effet puisque l'on a :

$$\forall\, b > a_o, \; t_N^\epsilon = \Phi^{-1}(F_{N,\epsilon}(b)) \geq \Phi^{-1}(F_N(b) - \epsilon(N)) \geq \Phi^{-1}(F(b) - \epsilon(N)) \; ,$$

il existe un nombre entier N_o tel que :

$$\forall\, N \geq N_o \; , \quad t_N^\epsilon \geq \Phi^{-1}(F(b) - \epsilon(N_o)) > -\infty \; .$$

Du coup, par le théorème 0.2., pour tout intervalle $[a_1,a_2]$ inclus dans l'ensemble $]a_o, +\infty[$, il existe un nombre entier N_o et des nombres réels m_1, m_2 qui vérifient :

$$\forall\, N \geq N_o \; , \; \forall\, b, b_1, b_2 \in [a_1,a_2] \; , \; b_1 < b_2 \; ,$$

$$0 \leq F'_{N,\epsilon}(b) \leq m_1 \; , \; |F'_{N,\epsilon}(b_2) - F'_{N,\epsilon}(b_1)| < m_2(b_2 - b_1) \; .$$

Par conséquent, si on note $V_{a_1}^{a_2}$ la variation totale sur l'intervalle $[a_1,a_2]$ on a les inégalités :

$$V_{a_1}^{a_2} F'_{N,\varepsilon} \le V_{a_1}^{a_2} m_1 b + V_{a_1}^{a_2} (m_2 b - F'_{N,\varepsilon}(b)) \le 2\, m_2(a_2 - a_1) + m_1 \quad .$$

Cela implique que la suite $(F'_{N,\varepsilon}\ ;\ N \in \mathbb{N})$ est uniformément bornée dans l'espace des fonctions à variation bornée sur $[a_1,a_2]$. Il existe donc une suite extraite $(F'_{N_k,\varepsilon}\ ;\ k \in \mathbb{N})$ et une fonction W à variation bornée sur l'intervalle $[a_1,a_2]$ telles qu'en tout point de continuité de W (et donc p.s.) on ait

$$\lim_{k \to \infty} F'_{N_k,\varepsilon}(b) = W(b) \ .$$

Si b_1 et b_2 sont des points de continuité de F, on a les égalités :

$$F(b_2) - F(b_1) = \lim_{k\to\infty} F_{N_k,\varepsilon}(b_1) = \lim_{k\to\infty} \int_{b_1}^{b^2} F'_{N_k,\varepsilon}(b)\,db = \int_{b_1}^{b_2} W(b)\,db \ .$$

Par suite F est absolument continue et sur l'intervalle $[a_1,a_2]$, F' coïncide presque surement avec W : F est absolument continue et sa dérivée, définie à un ensemble de mesure nulle près est à variation bornée sur tout intervalle compact inclus dans $]a_o, +\infty[$.

La fonction F est donc continue sur l'intervalle $]a_o, +\infty[$. Il en découle que pour tout nombre réel b dans $]a_o, +\infty[$ on a :

$$\lim_{N\to\infty} t_N^{\varepsilon} = t \quad ,$$

on en déduit le théorème 0.2. pour F.

Le théorème 0.3. se montre de la même manière.

Le théorème 0.1. est une conséquence immédiate du théorème 0.2.

La démonstration de ces trois théorèmes est achevée.

<u>Conclusion</u> : Comme nous avons essayé de le souligner au cours de cet exposé, les inégalités de Borell et de Landau et Shepp sont les points clefs de la démonstration de Tsirel'son. De ce fait son domaine est limité aux seules mesures gaussiennes. Cependant, un cadre naturel pour l'étude de la régularité de la densité de la loi d'une semi-norme d'un vecteur aléatoire à valeur dans un espace

mesurable est celui des mesures convexes introduites par C. Borell dans [2] . En effet, ainsi que le prouve Hoffmann-Jorgensen dans [4] th. 3.1. p 74, l'énoncé d'Ylvisaker [7] est pour de telles mesures une conséquence directe de leur définition.

REFERENCES

-:-:-:-:-:-

[1] BOREll C. : The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space, Inv. Math. 30, 1975, p. 207-216.

[2] BORELL C. : Convex measure on locally convexe spaces, Ark. Math. 120, 1974, p; 390 - 408 .

[3] FERNIQUE X. : Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes, Lect. Notes Math. 480, 1975, p. 1-96.

[4] HOFFMANN-JORGENSEN : Probability in B-spaces. Aarhus universität Lect. Notes Ser. 48 .

[5] LANDAU H.J. et SHEPP L.A. : On the supremum of a gaussian process, Sankhya Ser. A, 32, 1971, P. 369-378.

[6] TSIREL'SON V.S. : The density of the maximum of a gaussian process, Theory of probability and Ap., 1975, 847-856.

[7] YLVISAKER N.D. : The expected number of zeros of a stationary gaussian process. Ann. Math. Stat. 36, 1043-1046 .