

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

NICOLE EL KAROUÏ

## **Une propriété de domination de l'enveloppe de Snell des semimartingales fortes**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 16 (1982), p. 400-408

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1982\\_\\_16\\_\\_400\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__400_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE PROPRIETE DE DOMINATION DE L'ENVELOPPE  
DE SNELL DES SEMIMARTINGALES FORTES

par Nicole EL KAROUI

Dans la résolution par les inéquations variationnelles, ([1]), du problème d'arrêt optimal, on montre par des méthodes d'analyse, que si la fonction de gain du problème d'optimalité est le  $\alpha$ -potentiel positif d'une fonction non nécessairement positive, la plus petite fonction  $\alpha$ -excessive qui la majore est un  $\alpha$ -potentiel. Ce résultat dont l'importance pratique est évidente, a été étendu par d'autres auteurs à des situations markoviennes plus générales que celles des processus de diffusions. ([2]) et ([3]).

La théorie des réduites par rapport à un cône de fonctions  $\alpha$ -surmédianes permet de résoudre, sous des hypothèses de régularité assez fortes de la résolvante, le même problème. ([4]).

Nous nous proposons de généraliser ces résultats, dans le cadre de la Théorie générale des processus, en montrant grâce aux techniques du balayage, que la plus petite surmartingale forte, c'est-à-dire l'enveloppe de Snell, qui majore une semimartingale forte de la classe (D), est, sous certaines hypothèses, engendrée par un processus croissant dominé par la variation totale de celui qui engendre la semimartingale. Nous interprétons ensuite les résultats obtenus dans le cadre markovien.

RAPPELS ET NOTATIONS

Pour tout ce qui concerne les notions de surmartingales, semimartingales fortes, etc..., nous renvoyons le lecteur à ([5]), où il trouvera entre autres la preuve du résultat fondamental suivant:

Si  $Z$  est une surmartingale forte de la classe (D),  $Z$  se décompose de manière unique en  $Z = M - A^- - B$ , où  $M$  est une martingale uniformément intégrable,  $A$  un processus croissant optionnel, et  $B$  un processus croissant prévisible, purement discontinu, admettant éventuellement un saut à l'infini si  $Z$  est défini jusqu'à l'infini.

Ces processus constituent la décomposition canonique de  $Z$ .

Si maintenant  $Y$  est une semimartingale forte de la classe (D),  $Y$  admet de la même façon une décomposition en :

$Y = M - C^- - K$  où les processus  $C$  et  $K$  sont des processus à variation intégrable, respectivement optionnel et purement discontinu prévisible.

Nous rappelons maintenant, en suivant les résultats de ([6]), les propriétés fondamentales de l'enveloppe de Snell  $J$  d'un processus optionnel  $Y$  de la classe (D), limité à droite et à gauche, défini sur un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \underline{\mathbb{F}}, \underline{\mathbb{F}}_t, P)$ , satisfaisant aux conditions habituelles.

Nous désignons par  $H$  l'ensemble aléatoire :

$$H = \{ J^- = Y^-, \text{ ou } J = Y, \text{ ou } J^+ = Y^+ \}$$

Pour tout t.a.  $T$ , nous notons  $D_T$  le début de l'ensemble

$$[T, +\infty[ \cap H .$$

Les ensembles  $\underline{\mathbb{F}}_T$ -mesurables suivants précisent à quelle partie de  $H$  le début appartient :

$$\begin{aligned}
 H_T^- &= \{ J_{D_T}^- = Y_{D_T}^- \} & H_T &= (H_T^-)^c \cap \{ J_{D_T} = Y_{D_T} \} \\
 H_T^+ &= (H_T^- \cap H_T^+)^c
 \end{aligned}$$

La proposition suivante les propriétés essentielles de l'enveloppe de Snell. Elle est établie dans ([6].p.135.)

PROPOSITION 1: Avec les notations précisées ci-dessus, si J est l'enveloppe de Snell d'un processus Y làdlàg de la classe (D), les relations suivantes sont satisfaites:

a) Pour tout t.a. T,

$$\begin{aligned}
 (1) \quad E(J_T) &= \sup_{S \geq T} E(Y_S) = E(1_{H_T^-} Y_{D_T}^- + 1_{H_T} Y_{D_T} + 1_{H_{D_T}^+} Y_{D_T}^+) \\
 &= E(1_{H_T^-} J_{D_T}^- + 1_{H_T} J_{D_T} + 1_{H_{D_T}^+} J_{D_T}^+)
 \end{aligned}$$

b) Si A et B sont les processus croissants qui interviennent dans la décomposition canonique de J

$$(2) \quad \{ A - A^- > 0 \} = \{ J = Y \} \quad \text{et} \quad \{ B - B^- > 0 \} = \{ J^- = Y^- \}$$

c) Le t.a.  $D_T$  restreint à  $H_T^-$  est prévisible

Le processus J est donc associé au "balayage" de la semimartingale Y sur H. Pour préciser cette notion, nous introduisons deux processus croissants qui décrivent les passages hors de H.

Le premier est le processus  $D_t$  défini ci-dessus comme le début après t de l'ensemble H, qui est un ensemble fermé.

Les paliers de ce processus croissant continu à gauche correspondent aux excursions hors de H, dont les extrémités droites sont des valeurs prises par D.

Les extrémités gauches sont repérées symétriquement par le processus  $L_t = \sup\{ s \geq t; s \in H \text{ si } \sup\{\emptyset\} = \infty$

L'intervalle  $[t, D_t[$  est identique à l'ensemble  $\{u; L_u < t \leq u\}$ ,

ce qui entraîne :  $s \in D_t \Leftrightarrow L_s < t$ .

Nous désignons par  $L_n^\varepsilon$  et  $T_n^\varepsilon$  les extrémités gauches et droites des intervalles contigus à  $H$ , de longueur plus grande que  $\varepsilon$ ,

et par  $U_n^\varepsilon$  la v.a.  $L_n^\varepsilon + \varepsilon$ . Il est bien connu que les v.a.

$U_n^\varepsilon$  et  $T_n^\varepsilon$  sont des t.a., et que  $T_n^\varepsilon = D_{U_n^\varepsilon}$ .

L'ensemble  $\{L_s + \varepsilon < s\}$  s'exprime comme :  $\bigcup_n [U_n^\varepsilon, T_n^\varepsilon[$

A tout processus  $V$  à variation finie, continu à gauche, on associe son balayé  $V^H$ , égal à  $V_D - V_{D^O}$ . Les remarques précédentes nous permettent de décomposer  $V^H$  en :

$$V_t^H = \int_{[0, t[} 1_{\{L_s = s\}} dV_s + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_n 1_{\{L_n^\varepsilon < t\}} (V_{T_n^\varepsilon} - V_{U_n^\varepsilon})$$

Si nous travaillons avec des processus croissants continus à droite, nous aurons plutôt besoin des processus :

$$l_t = \sup\{s < t; s \in H\} \quad \text{et} \quad T_t = \inf\{s > t; s \in H\}$$

Le processus  $l$  est croissant et prévisible. L'ensemble  $\{l_s = s\}$  décrit les points de  $H$ , qui sont points d'accumulation à gauche; il est donc inclus dans  $\{Y^- = J^-\}$ .

Nous désignons par  $H^+$  la réunion des graphes des v.a.  $L_n^\varepsilon$  pour tout  $n$  et tout  $\varepsilon$  de  $Q^+$ . C'est l'ensemble des extrémités gauches des excursions hors de  $H$ .

On vérifie aisément que :  $\{l_s < s\} = \bigcup_{g \in H^+} ]g, T_g]$

Les outils sont en place pour établir le principal résultat de ce travail :

THEOREME 2: Soit  $Y$  une semimartingale forte optionnelle, positive et de la classe (D), de décomposition canonique:

Soit  $J$  l'enveloppe de Snell de  $Y$ , de décomposition  $J = M - A^- - B$ .

Si le processus prévisible, purement discontinu  $K$  est décroissant, le processus  $B$  est nul, et le processus croissant  $A$  absolument continu par rapport à la variation totale de  $C$ .

Preuve: Nous commençons par montrer que  $B$  est nul si  $K$  est décroissant.

En effet, les sauts de  $K$  sont liés à la projection prévisible  $Y^D$  de  $Y$  par la relation :  $K - K^- = \Delta K = Y^- - Y^D$ .

L'hypothèse de décroissance faite sur  $K$  entraîne donc que:  $Y^- \leq Y^D$  et que :  $Y^- \leq Y^D \leq J^D \leq J^-$ . Mais, d'après la proposition 1, un saut de  $B$  ne peut avoir lieu que si à cet instant  $Y^- = J^-$ ; les inégalités précédentes montrent qu'on a aussi  $J^- = J^D$ , relation qui montre que le saut de  $B$  est nul. Le même argument montre que le processus  $\Delta K$  est nul sur  $\{y^- = J^-\}$

Avant de préciser la décomposition de  $J$ , nous remarquons que, quitte à soustraire une martingale (u.i.) à  $Y$ , et donc à  $J$ , on peut supposer que  $Y$  et  $J$  s'annulent à l'infini, et que  $Y$  est la projection optionnelle du processus  $C_\infty - C_\cdot + K_\infty - K$ .

La proposition 1 nous permet d'exprimer  $E(J_T)$  en fonction de  $C_-^H$

$$\begin{aligned} E(J_T) &= E( C_\infty^H - C_T^{-H} + K_\infty - K_{D_T} - 1_{H_T^+} \Delta C_{D_T} ) \\ (5) \quad &= E( \int_{[T, \infty[} 1_{\{L_S = S\}} dC_S + K_\infty - K_{D_T} - 1_{H_T^+} \Delta C_{D_T} ) \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E( \sum_n 1_{\{T \leq L_n^\varepsilon\}} (C_{T_n}^- - C_{U_n}^-) ) \end{aligned}$$

Nous allons transformer ce dernier terme afin d'étudier son signe.

$$\begin{aligned} E( 1_{\{T \leq L_n^\varepsilon\}} (C_{T_n}^- - C_{U_n}^-) ) &= E[ 1_{\{T \leq L_n^\varepsilon\}} (C_{T_n}^- + K_{T_n}^\varepsilon - C_{U_n}^- - K_{U_n}^\varepsilon + 1_{H_{U_n}^\varepsilon} \Delta C_{T_n}^\varepsilon) ] \\ &\quad - E[ 1_{\{T \leq L_n^\varepsilon\}} (K_{U_n}^\varepsilon - K_{U_n}^\varepsilon + 1_{H_{U_n}^\varepsilon} \Delta C_{T_n}^\varepsilon) ] \end{aligned}$$

ce qui compte-tenu de la relation (5) appliquée aux t.a.  $U_n^\varepsilon$  et  $T_n^\varepsilon = D_{U_n}^\varepsilon$

entraîne que:

$$E(1_{\{T \leq L_n^\varepsilon\}} (C_{T_n}^\varepsilon - C_{U_n}^\varepsilon)) = E[1_{\{T \leq L_n^\varepsilon\}} (Y_{U_n}^\varepsilon - J_{U_n}^\varepsilon - (K_{T_n}^\varepsilon - K_{U_n}^\varepsilon)) - 1_{H_{U_n}^\varepsilon} \Delta C_{T_n}^\varepsilon]$$

Comme J majore Y, il reste à étudier les processus:

$$S_t^\varepsilon = \sum_n 1_{\{L_n^\varepsilon \geq t\}} (K_{U_n}^\varepsilon - K_{T_n}^\varepsilon) \quad \text{et} \quad \hat{S}_t^\varepsilon = - \sum_n 1_{\{L_n^\varepsilon \geq t\}} 1_{H_{U_n}^\varepsilon} \Delta C_{T_n}^\varepsilon$$

Nous transformons l'écriture de  $S_t^\varepsilon$  en faisant intervenir l'ensemble  $H^\rightarrow$ :

$$S_t^\varepsilon = \sum_{g \in H^\rightarrow} 1_{\{g \geq t\}} 1_{\{g+\varepsilon \leq T_g\}} (K_{g+\varepsilon} - K_{T_g})$$

Mais K est un processus décroissant. Le théorème de Fubini prouve alors:

$$S_t^\varepsilon = - \int dK_s 1_{\{t \leq l_s < l_{s+\varepsilon} < s\}} \quad , \quad \text{processus qui tend en croissant vers}$$

$$S_t = - \int dK_s 1_{\{t \leq l_s < s\}} = - \int dK_s 1_{\{t \leq l_s\}}$$

car nous avons vu que K ne charge pas l'ensemble  $\{l_s = s\}$ .

Nous comparons maintenant  $S_t$  au processus croissant  $K_\infty - K_{D_t}$

$$K_\infty - K_{D_t} + S_t = \int dK_s 1_{\{l_s < t \leq l_s\}} - \Delta K_{D_t}$$

Le deuxième membre vaut:

$$\text{si } l_t < t < D_t \quad \int dK_s 1_{\{s=D_t\}} - \Delta K_{D_t} = 0$$

$$\text{si } l_t < t \text{ et } t \in H \quad \int dK_s 1_{\{s=t\}} - \Delta K_{D_t} = 0 \text{ car } t = D_t$$

$$\text{si } l_t = t \quad , \text{ la première intégrale est nulle et } \Delta K_{D_t} = \Delta K_t \text{ aussi.}$$

Les deux processus croissants  $K_\infty - K_{D_t}$  et  $-S_t$  sont identiques.

De la même façon, nous transformons l'écriture de  $\hat{S}_t^\varepsilon$  en:

$$\hat{S}_t^\varepsilon = - \sum_{g \in H^\rightarrow} 1_{\{g \geq t\}} 1_{\{g+\varepsilon \leq T_g\}} 1_{H_{g+\varepsilon}^+} \Delta C_{T_g} \quad \text{qui est un processus croissant car sur } H_{g+\varepsilon}^+ \quad , \quad \Delta C_{T_g} \text{ est négatif, puisque } \Delta C = Y - Y^+$$

Ces processus convergent donc en croissant vers un processus  $\hat{S}_t$  que l'on

$$\text{peut d'écrire par : } \hat{S}_t = - \sum 1_{\{l_s \geq t\}} 1_{\{l_s < s = l_s\}} 1_{\{Y_s^- < J_s^- \quad Y_s^- < J_s^- \quad Y_s^+ = J_s^+\}} \Delta C_s$$

Le processus  $\hat{S}_t$  ne charge pas l'ensemble  $\{l_s = s\}$  et des arguments tout

à fait analogue à ceux que nous avons employés ci-dessus montrent que:

$$\hat{S}_t - 1_{H_t^+} \Delta C_{D_t} + \sum_{s \geq D_t} 1_{H_s^+} 1_{\{s = l_s\}} \Delta C_s \quad \text{est nul.}$$

Nous pouvons maintenant réécrire la relation (5) de la manière suivante:

$E(J_T) = E \int_{[T, \infty[} 1_{\{L_S=S\}} (1 - 1_{H_S}^+) dC_S + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E(\sum_n 1_{\{T \leq L_n^\varepsilon\}} (Y_{U_n^\varepsilon} - J_{U_n^\varepsilon}))$   
 si on pose:

$$\hat{H}_S^+ = H_S \cap \{L_S=S, \Delta C_S \neq 0\} \quad \text{et} \quad R_t^\varepsilon = \sum_n 1_{t < L_n^\varepsilon} (Y_{U_n^\varepsilon} - J_{U_n^\varepsilon})$$

Cette relation vraie pour tout t.a., est encore vraie en espérance conditionnelle, car les processus  $S_t^\varepsilon$  et  $\hat{S}_t^\varepsilon$  convergent en croissant.

Les summartingales fortes, projection optionnelle des processus décroissants  $R_t^\varepsilon$  convergent en croissant vers une summartingale forte  $Z$ , qui d'après tout ce que nous venons de voir ne peut être que régulière.

Elle est engendrée par un processus croissant continu à gauche  $U_t$ .

L'unicité de la décomposition de  $J$  prouve immédiatement que:

$$A_t = -U_t + \int_{[0, t[} 1_{\{L_S=S\}} (1 - 1_{H_S}^+) dC_S$$

ce qui entraîne évidemment que  $A$  admet une densité par rapport à la variation totale de  $C$ . CQFD.

REMARQUE: Si nous supposons la semimartingale forte  $Y$ , continue à droite et régulière, soit engendrée par un processus à variation finie continu, la démonstration que nous venons de faire se rapproche beaucoup de celle de ([7]), sur le balayage des semimartingales.

On peut effectivement déduire, dans ce cas, notre théorème, mais après quelques ajustements, de la proposition 3 de l'article cité, appliquée à la semimartingale  $J - Y$ , balayée sur l'ensemble de ses zéros.

Il nous reste à énoncer le parallèle markovien du théorème 2

THEOREME 3 : Soit  $(\Omega, \underline{F}_t, X_t, P^H)$  une réalisation d'un semi-groupe droit, à valeurs dans un espace lusinien  $E$ .

Nous considérons deux  $\alpha$ -potentiels gauches  $v_1$  et  $v_2$ , réguliers, et un  $\alpha$ -potentiel  $k$  naturel.

On pose  $g = v_1 - v_2 - k$ , et on suppose  $g$  positive.

La plus petite fonction  $\alpha$ -excessive qui majore  $g$  est un  $\alpha$ -potentiel



gauche, engendrée par une fonctionnelle additive gauche fortement domi-  
née par celle qui engendre  $v_1$ .

PREUVE: Notons  $q$  la plus petite fonction  $\alpha$ -excessive qui majore  $g$ .

Il est montré en ([6]), que le processus  $e^{-\alpha t} q(X_t)$  est l'enveloppe de Snell, pour toute loi  $P^\mu$  du processus  $Y_t = e^{-\alpha t} g(X_t)$ .

Il suffit de remarquer que les hypothèses faites sur  $v_1, v_2$  et  $k$  impliquent que le processus  $Y_t$  satisfait aux hypothèses du théorème 2.

La relation de domination énoncée est alors une simple conséquence de la décomposition de  $J$  faite au cours de la démonstration du théorème 2.

---

BIBLIOGRAPHIE

- ([1]) A. Bensoussan    Applications des inéquations variationnelles au  
J.L.Lions            contrôle stochastique  
Dunod 1978
- ([2]) J.M.Bismut        Théorie probabiliste du contrôle des diffusions  
Mém. Am. Math.Soc. 4 -1;130- 1976
- ([3]) S.R.Pliska        A semigroup representation of the maximum expected  
reward in continuous parameter Markov Décision Théory  
SIAM.J.of CONTROL and OPTIMIZATION, Vol 13 (1975)
- ([4]) G.Mokobodski    Densité relative de deux potentiels comparables.  
Sem. de Proba. n°4. Lectures Notes in Mathematics  
n°124. Springer Verlag.
- ([5]) E.Lenglart        Tribu de Meyer et théorie générale des processus  
Sém. Proba XIV .Lect.Notes en Math. Springer Verlag  
n° 784 p. 500-546            1980.

- ([6]) N.El Karoui      Les aspects probabilistes du contrôle stochastique  
Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour  
Lect. Notes in Math. n° 876  
Springer Verlag 1980
- ([7]) N. El Karoui      Temps local et balayage des semimartingales  
Sém. Proba XIII . Lect. Notes in Math n° 721  
Springer Verlag 1979.

Nicole EL KAROUI

E.N.S. de Fontenay aux Roses  
5, rue Boucicaut  
92260 Fontenay- aux Roses