

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

RAJAE ABOULAICH

Intégrales stochastiques généralisées

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 380-383

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__380_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

INTEGRALES STOCHASTIQUES GENERALISEES

par ABOULAICH Rajae

L'objet de cette note est de démontrer le lemme fondamental permettant de construire les intégrales stochastiques généralisées sans utiliser la récurrence transfinie [1]. Nous profitons aussi de cette occasion pour répondre à une question d'Emery concernant ces intégrales. Nous remercions vivement Monsieur C. Stricker pour son aide et son accueil à Strasbourg.

Un ensemble aléatoire J est appelé un intervalle optionnel (resp. prévisible) s'il est optionnel (resp. prévisible) et si toutes ses coupes $J(\omega)$ sont des intervalles (certaines coupes pouvant être fermées d'autres ouvertes, etc ...).

LEMME. Soit \mathcal{J} une classe d'intervalles optionnels (resp. prévisibles) ayant les propriétés suivantes :

- a) \mathcal{J} est héréditaire : chaque intervalle optionnel (prévisible) contenu dans un élément de \mathcal{J} appartient aussi à \mathcal{J} ;
- b) \mathcal{J} est stable par réunion disjointe : si J_1 et J_2 appartiennent à \mathcal{J} , si leur intersection est vide et si leur réunion est un intervalle, alors leur réunion appartient aussi à \mathcal{J} ;
- c) \mathcal{J} est stable par limite croissante : si (J_n) est une suite croissante d'éléments de \mathcal{J} , sa limite appartient aussi à \mathcal{J} ;
- d) il existe dans \mathcal{J} un recouvrement dénombrable de $[0, \infty[$.

Alors $[0, \infty[$ appartient aussi à \mathcal{J} .

DEMONSTRATION. La démonstration se fera en plusieurs étapes.

- 1) Si T est un temps d'arrêt (prévisible), son graphe appartient à \mathcal{J} .

En effet si (J_n) est une suite d'éléments de \mathcal{J} recouvrant $[0, \infty[$, les intervalles $A_n = [T] \cap J_n \cap (\bigcap_{m < n} J_m^c)$ appartiennent aussi à \mathcal{J} car $A_n \subset J_n$. En utilisant les propriétés b) et c) on montre aisément que $[T] = \bigcup_n A_n$ appartient aussi à \mathcal{J} .

2) Dans le cas optionnel on désigne par \mathcal{J}' les éléments de \mathcal{J} qui sont prévisibles. Alors \mathcal{J}' vérifie les propriétés a), b) et c). Montrons qu'il existe aussi un recouvrement dénombrable de $[0, \infty[$ par des éléments de \mathcal{J}' . Si (J_n) est une suite d'intervalles de \mathcal{J} recouvrant $[0, \infty[$, on appelle S_n et T_n ses extrémités gauche et droite et on voit que l'intervalle prévisible $]S_n, T_n]$ appartient à \mathcal{J}' . Comme $(\cup]S_n, T_n])^c$ est prévisible et à coupes dénombrables, il existe une suite de temps d'arrêt prévisibles (U_n) qui recouvrent cet ensemble. Ainsi les intervalles $[U_n]$ et $]S_n, T_n]$ recouvrent $[0, \infty[$ et appartiennent à \mathcal{J}' d'après 1).

3) Nous allons maintenant établir le lemme dans le cas prévisible et le cas optionnel s'en déduira compte tenu de 2). Si J est un intervalle de \mathcal{J} ayant pour extrémités S et T , $]S, T] \cap J^c$ est le graphe d'un temps d'arrêt prévisible que nous noterons T' . D'après 1) $[T']$ appartient à \mathcal{J} et d'après les propriétés a) et b) $]S, T]$ qui est contenu dans $J \cup [T']$ appartient aussi à \mathcal{J} . On en déduit qu'il existe un recouvrement dénombrable de $[0, \infty[$ par des intervalles de la forme $[U_n]$ et $]S_n, T_n]$. Si $]S, R]$ et $]S, T]$ sont deux intervalles de \mathcal{J} , $]S, R \vee T] =]S, R] \cup]R_{\{R < T\}}, T]$ appartient aussi à \mathcal{J} grâce aux propriétés a) et b). A chaque temps d'arrêt S nous associons la borne supérieure essentielle T' des temps d'arrêt T tels que $]S, T]$ appartienne à \mathcal{J} . L'ensemble précédent étant stable pour le sup., il existe une suite de temps d'arrêt (T_p) tendant en croissant vers T' telle que $]S, T_p]$ appartienne à \mathcal{J} pour tout p , si bien que $]S, T']$ appartient à \mathcal{J} d'après c) et 1). Nous appliquons maintenant ce procédé aux temps d'arrêt S_n définis précédemment et nous continuerons à noter $]S_n, T_n]$ les intervalles agrandis qui jouissent de la propriété suivante notée (*): si deux tels intervalles ont une intersection non vide, leurs extrémités droites sont confondues. En effet l'intervalle

$]S_n, T_n] \cup]T_n\{S_p < T_n \leq T_p\}, T_p]$ appartient à \mathcal{J} , donc $T_n = T_p$ par définition de la borne supérieure sur l'ensemble $\{S_p < T_n \leq T_p\}$. Comme T_n et T_p jouent des rôles symétriques, $T_n = T_p$ sur l'ensemble des ω où l'intersection des deux intervalles est non vide. Si on pose $T = \inf\{T_n\{T_n > T_1\}\}$ les intervalles $]S_n\{S_n > T_1\}, T]$ qui appartiennent à \mathcal{J} , recouvrent $]T_1, T]$. Or lorsque $]S, T]$ et $]S', T]$ sont des éléments de \mathcal{J} , $]S \wedge S', T]$ qui est égal à $]S\{S < S'\}, S'] \cup]S', T]$ appartient aussi à \mathcal{J} . Par conséquent $]T_1, T]$ qui est la limite croissante d'une suite d'éléments de \mathcal{J} , appartient aussi à \mathcal{J} , c'est-à-dire $T_1 = T$ par définition de T_1 . Appliquant le même raisonnement à chaque T_n , on en déduit que l'adhérence de l'ensemble aléatoire $A = \cup [T_n]$ qui est contenue dans la réunion des graphes des S_n , T_n et U_n en vertu de la propriété (*), est un parfait aléatoire dénombrable et sans points isolés, donc vide d'après le théorème de Baire. Ainsi $T_n = \infty$ p.s. pour tout n . Pour conclure la démonstration du lemme on remarque que $[0]$ appartient évidemment à \mathcal{J} , que $]0, \infty[$ est la limite d'une suite croissante d'éléments de \mathcal{J} obtenus à partir des intervalles $]S_n, \infty[$ (cf. le raisonnement concernant $]T_1, T]$) et que $]0, \infty[$ est la réunion disjointe de $[0]$ et de $]0, \infty[$.

UN CONTRE -EXEMPLE.

Rappelons d'abord quelques notations et définitions tirées de [1]. Si f est une fonction càdlàg, on peut définir une mesure simplement additive df sur les intervalles bornés par :

$$df([0, t]) = f(t) ; df([0, t[) = f(t-)$$

et pour chaque intervalle J une nouvelle fonction $f^J = df(J \cap [0, t])$. On dira qu'un processus prévisible H est pseudo-intégrable par rapport à la semimartingale X s'il existe un processus càdlàg Y et une suite (J_n) d'intervalles optionnels recouvrant $]0, \infty[$ telle que pour tout n , H soit intégrable par rapport à la semimartingale X^{J_n} et qu'on ait l'égalité $Y^{J_n} = H \cdot (X^{J_n})$. Le lemme précédent montre immédiatement que pour X et H donnés le processus Y est unique, ce qui nous permettra d'appeler

Y la pseudo-intégrale de H par rapport à X. Soit (G_t) une filtration telle que pour tout t on ait l'inclusion $\mathfrak{F}_t \subset G_t$ et que X soit aussi une semimartingale par rapport à la filtration (G_t) . Est-ce-que H reste pseudo-intégrable par rapport à X dans la filtration (G_t) ? L'exemple 2 de [2] nous fournira une réponse négative. Soit B un mouvement brownien réel issu de 0, relativement à sa filtration naturelle (\mathfrak{F}_t) , rendue continue à droite et complétée. Nous désignons par (L_t) le processus du temps local de B en 0, par (G_t) la filtration obtenue en adjoignant à \mathfrak{F}_0 toutes les variables aléatoires L_t . Si $X = B.B$, le processus prévisible $H = B^{-1} 1_{\{B \neq 0\}}$ est intégrable par rapport à X dans la filtration (\mathfrak{F}_t) et l'intégrale $H.X$ est égale à B d'après l'associativité des intégrales stochastiques. Supposons que H soit pseudo-intégrable par rapport à X dans la filtration grossie (on sait d'après un résultat de Jeulin que X reste une semimartingale dans (G_t)). Il existe alors un processus càdlàg Y et des intervalles optionnels J_n recouvrant $[0, \infty[$ tels que $Y^{J_n} = H.(X^{J_n})$. Ainsi Y sera une semimartingale dans l'ouvert aléatoire $\bigcup_n \overset{\circ}{J}_n$, $\overset{\circ}{J}_n$ désignant l'intérieur de l'intervalle J_n : en effet si $u < v$ sont deux rationnels et si la loi P est restreinte à l'ensemble des ω tels que $]u, v]$ soit contenu dans J_n , $Y^{]u, v]} = H.X^{]u, v]} = B^{]u, v]}$; en faisant varier n, u et v et en appliquant le théorème de convexité 11 de [2], on voit aisément que Y est une semimartingale dans $\bigcup_n \overset{\circ}{J}_n$ dont le complémentaire est à coupes dénombrables. La continuité de B et Y (X est une semimartingale continue) et l'égalité $B^{J_n} = Y^{J_n}$ entraînent que $B = Y$, ce qui contredit le fait que $\{B \neq 0\}$, dont le complémentaire est à coupes non dénombrables, est l'ouvert maximal dans lequel B est une semimartingale par rapport à la filtration (G_t) .

REFERENCES

- [1] EMERY M. : A generalization of stochastic integration with respect to semimartingales. A paraître dans Annals of Probability.
 [2] MEYER P.A. et STRICKER C. : Sur les semimartingales au sens de L. SCHWARTZ. Math. An. and Appl. part B, Adv. in Math. Suppl. Studies, vol. 7B (1981), 577-602.