Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Are Uppman

# Sur le flot d'une équation différentielle stochastique

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 16 (1982), p. 268-284

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__268_0>

# SUR LE FLOT D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE

par Are UPPMAN

Le but de cet exposé est de présenter des démonstrations nouvelles et, je l'espère, simples, des théorèmes de continuité, d'injectivité, de surjectivité et de différentiabilité par rapport à la valeur initiale x de la solution $X^x$ de l'équation

$$(1) \qquad X = x + \int F(X)_- dZ$$

où F est localement lipschitzienne et Z une semimartingale continue. Comme application nous donnons une formule de type "variation de la constante" dans le cas où F est linéaire.

Je tiens ici à vivement remercier Erik Lenglart pour toute l'aide qu'il m'a apporté dans ce travail. Je suis également reconnaissant à M. P.A. Meyer de m'avoir envoyé son article "Flot d'une équation différentielle stochastique" [4] qui m'a constamment servi de fil directeur dans l'adaptation de la méthode des exponentielles (voir [7] ) aux démonstrations des théorèmes sur le flot données dans cet exposé.

Donnons brièvement un rappel historique puisé dans l' article cité de Meyer. C'est Neveu qui le premier démontre un théorème de continuité de la solution $X^x$ en fonction de la valeur initiale x dans son cours de $3^e$ cycle de 1973 [6] pour les équations du type classique gouvernées par des termes en $dB_t$ et dt. Malliavin a démontré, pour les équations du type classique sur les variétés, que si l'équation différentielle stochastique est très bonne, on peut trouver une version de $X(t,\omega,x)$ qui soit $C^\infty$ en x. Malliavin a également démontré l'injectivité des applications $x \mapsto X(t,\omega,x)$ dans le cas du processus de Wiener (par l'argument du retournement du temps) et Bismut a démontré la surjectivité dans le cas de $\mathbb{R}^n$. Plus récemment (1980) le cas général de l'injectivité a été traité sans retournement du temps, d'abord l'injectivité dite faible par Emery [1] et indépendamment par nous-même [7] : pour x et y distincts donnés on a p.s. pour tout t $X(t,\omega,x) \neq X(t,\omega,y)$ ;

ensuite l'injectivité dite forte par Kunita [3] : on a p.s. pour tous x et y distincts et tout t $X(t,\omega,x) \neq X(t,\omega,y)$ ; une des "difficultés" de la théorie tient justement en cela: montrer que le p.s. ne dépend pas du paramètre x dans l'équation (1). Enfin Kunita a démontré la surjectivité de lapplication $X(t,\omega,\cdot)$ pour t fixé (pouvant cependant dépendre de $\omega$).

Tous nos résultats - à l'exception des théorèmes de dérivation - sont valables pour des équations à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. En revanche, sous une hypothèse d'analyticité sur F dans le cas d'une équation à valeurs dans le corps des complexes $\mathbb{C}$, nous montrons que $X(t,\omega,x)$ dépend analytiquement de x.

L'application du théorème d'homéomorphisme à l'étude des équations différentielles stochastiques linéaires est à notre connaissance originale (bien qu'étant une transposition directe d'une méthode classique en théorie des fonctions).

## NOTATIONS, PRELIMINAIRES.

Précisons maintenant les notations employées.

Tous les processus étudiés sont définis sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ vérifiant les conditions habituelles, i.e. $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, toutes complétées par l'ensemble des P-négligeables de $\mathcal{F}$ et vérifiant la condition de continuité à droite $\mathcal{F}_t = \bigcap_{t<s} \mathcal{F}_s$ .

Toutes les égalités (inégalités) de processus, toute unicité de solution, s'entendent à une indistinguabilité près.

$\mathbb{D}^n$ (resp. $\mathbb{D}^{n,m}$) désigne l'ensemble des processus adaptés cadlag à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (resp. l'espace $\mathbb{R}^{n,m}$ des matrices (n,m)); $\mathbb{D}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathbb{D}(\mathbb{R}^{n,m})$) désigne l'ensemble des fonctions cadlag de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^{n,m}$) , et nous munissons ces derniers de la convergence uniforme sur tout compact (rappelons qu'il s'agit d'une topologie métrisable).

Les normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n,m}$ sont toutes notées $\| \ \|$ sans indice.

Un processus X de $\mathbb{D}$ appartient à $\mathcal{S}^r$, $r \in [1,\infty]$, si et seulement si la v.a. $X^* = \sup_t |X_t|$ appartient à $L^r$, et sa norme dans $\mathcal{S}^r$ est $\|X\|_{\mathcal{S}^r} = \|X^*\|_{L^r}$ .

Sauf spécification expresse du contraire, Z désigne dans la suite une semimartingale continue à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Si $X \in \mathbb{D}^{n,m}$ l'intégrale de X par rapport à Z est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ noté $\int X\_dZ$ dont la i-ième composante est $\Sigma_j \int X^i_{j-} dZ^j$ où $X^i_j$ est le j-ième élément de la i-ième ligne de X, et où $Z^j$ est la j-ième composante de Z.

Dans le cas où Z est réelle on pose $\|Z\|_{H^\infty} = \inf \| [M,M]^{\frac{1}{2}}_\infty + \int_0^\infty |dA| \|_{L^\infty}$ où le inf porte sur toutes les décompositions $Z = M + A$, M étant une martingale locale et A un processus à variation finie. Si X est également à valeurs dans $\mathbb{R}$ on a l'inégalité d'Emery (voir Meyer [5]) $\|\int X\_dZ\|_{S^r} \leq k_r \|X\|_{S^r} \|Z\|_{H^\infty}$

où $k_r$ est une constante ne dépendant que de r. Dans le cas où $X = (X^{ij})$ appartient à $\mathbb{D}^{n,m}$ et $Z = (Z^j)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ on pose pour $r \in [1,\infty]$ $\|X\|_{S^r} = \max_{ij} \|X^{ij}\|_{S^r}$ et $\|Z\|_{H^\infty} = \max_j \|Z^j\|_{H^\infty}$.

Il vient donc $\quad \|\int X\_dZ\|_{S^r} \leq m(\max_{ij} \|\int X^{ij}_- dZ^j\|_{S^r}) \leq mk_r \max_{ij}(\|X^{ij}\|_{S^r} \|Z^j\|_{H^\infty})$

(2) $\qquad \|\int X\_dZ\|_{S^r} \leq mk_r \|X\|_{S^r} \|Z\|_{H^\infty}$

On établit également sans peine les inégalités

(3) $\qquad \|\int X\_dZ\|_{H^\infty} \leq m \|X\|_{S^\infty} \|Z\|_{H^\infty}$

(4) $\qquad \|X \cdot Y\|_{S^r} \leq m \|X\|_{S^p} \|Y\|_{S^q} \quad (r,p,q \geq 1$ et $1/r = 1/p + 1/q)$

(où le produit matriciel $X \cdot Y$ est supposé avoir un sens...) à partir des inégalités similaires pour X, Y et Z réels.

Dans la suite nous aurons affaire à des familles $(C^\alpha, \alpha \in I)$ d'éléments de $\mathbb{D}^n$ ou $\mathbb{D}^{n,m}$ où I est une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

DEFINITION:-Nous dirons que $(C^\alpha)$ est uniformement localement (u.l.) dans $S^r$ $(r \in [1,\infty])$ s'il existe une suite $(T_n)$ de t.a. et une suite de constantes $(c_n)$ telles que $T_n \uparrow \infty$ et pour tous n et $\alpha$ $\|(C^\alpha)^{T_n}\|_{S^r} \leq c_n$

(Noter que $(C^\alpha)$ u.l. dans $S^r$ implique $(C^\alpha)$ u.l. dans $S^p$ pour $1 \leq p \leq r$)

-Nous dirons que $(C^\alpha)$ est $S^r$- lipschitzienne si

$$C^{\alpha\beta} = (C^\alpha - C^\beta)/\|\alpha - \beta\| \qquad (\alpha,\beta) \in I^2\text{-diagonale}$$

est une famille u.l. dans $S^r$.

Nous appliquerons aux familles $S^r$-Lipschitziennes le lemme de Kolmogorov, dont voici l'énoncé:

Soient $\Delta$ l'ensemble des dyadiques de $\mathbb{R}^p$ et E un espace métrique complet pour une distance d. Pour tout $\alpha \in I \cap \Delta$ soit $\xi_\alpha$ une v.a. à valeurs dans E. On suppose qu'il existe des constantes $\varepsilon > 0$, $C > 0$, $r > p$ telles que $E(d(\xi_\alpha, \xi_\beta)^\varepsilon) \leq C\|\alpha - \beta\|^r$. Alors pour presque tout $\omega$ l'appliquation $\alpha \mapsto \xi_\alpha(\omega)$ sur $\Delta \cap I$ est prolongeable en une application continue de I dans E;

sous la forme suivante:

LEMME 0

Soient r un élément de $]p,\infty[$ et $(C^\alpha,\alpha\in I)$ une famille $S^r$-lipschitzienne sur tout compact de I. Alors le processus $\xi_\alpha(\omega) = C^\alpha_\bullet(\omega)$ à valeurs dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}^n)$ ou $\mathbb{D}(\mathbb{R}^{n,m})$ possède une version continue.
(on dira plus brièvement: alors $\alpha\mapsto C^\alpha$ est continue).

Comme d'habitude $\mathcal{E}(Z)$ désigne la semimartingale exponentielle de Z, i.e. la solution unique de l'équation $X = 1 + \int X_- dZ$. Rappelons que, Z étant continue, on a $\mathcal{E}(Z) = \exp(Z-Z_0-\frac{1}{2}\langle Z,Z\rangle)$ et que dans ce cas, si H est une deuxième semimartingale, la solution unique de l'équation $X = H + \int X_- dZ$ est la semimartingale

$$\mathcal{E}_H(Z)_t = \mathcal{E}(Z)_t\left[H_0 + \int_0^t \mathcal{E}(Z)_s^{-1}\, d(H-\langle H,Z\rangle)_s\right]$$

(voir [8] ).

Les lemmes 1 et 2 nous serviront constamment. $(C^\alpha,\alpha\in I)$ y désigne une famille d'éléménts de $\mathbb{D}^m$, I étant un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Posons $1/r = 1/q + 1/q'$. (Précisons que, conformément à nos notations, $\int C^\alpha_- dZ$ est la semimartingale réelle $\sum_j \int C^\alpha_{j-} dZ^j$ , où $C^\alpha_j$ et $Z^j$ désignent les composantes dans $\mathbb{R}^m$ respectivement de $C^\alpha$ et de Z).

LEMME 1

Si $(C^\alpha)$ est u.l. dans $S^\infty$ alors $\mathcal{E}(\int C^\alpha dZ)$ est u.l. dans $S^r$ pour tout $r\in[1,\infty[$.

LEMME 2

Si $(C^\alpha)$ est u.l. dans $S^{q'}$ et $S^q$-lipschitzienne pour un $r>p$, alors $\alpha\mapsto\int C^\alpha dZ$ et $\alpha\mapsto\langle\int C^\alpha dZ,\int C^\alpha dZ\rangle$ possèdent des versions continues.

Démonstration du lemme 1

Soit $(T_n)$ une suite de t.a. telle que $T_0=0$, $T_n\uparrow\infty$ et $\|(C^\alpha)^{T_n}\|_{S^\infty}\leq c_n$ ($c_n$ constante). Il suffit de démontrer que le lemme est vrai avec $(C^\alpha)^{T_n}$ à la place de $C^\alpha$, nous supposons donc $C^\alpha$ borné par c dans $S^\infty$.
Posons Z = M + A où M est une martingale locale continue et A un processus à variation finie continue. Définissons la suite de t.a. $(T_n)$ par $T_0=0$ et pour $k\geq 0$

$$T_{k+1} = \inf\left\{t\geq T_k:\ \langle M,M\rangle_t - \langle M,M\rangle_{T_k}\geq\varepsilon^2 \text{ ou } \int_{T_k}^t |dA_s|\geq\varepsilon\right\}$$

Alors on a
$$\|(\int C^{\alpha} dZ)^{T_k} - (\int C^{\alpha} dZ)^{T_{k-1}}\|_{H^\infty} \leq 2c\varepsilon$$

On en déduit que si $\varepsilon < 1/4cmk_r$ où pour r donné la constante $k_r$ provient de (2), alors $(T_n)$ vérifie pour tout n et tout $\alpha$
$$\|\int C^{\alpha} d(Z^{T_n} - Z^{T_{n-1}})\|_{H^\infty} \leq \frac{1}{2mk_r}$$

Posons $X = \mathcal{E}(\int C^{\alpha} dZ)$, on peut écrire:
$$X^{T_n} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (X^{T_k} - X^{T_{k-1}})$$

avec
$$X^{T_k} = X^{T_{k-1}} + \int X^{T_k} C^{\alpha} d(Z^{T_k} - Z^{T_{k-1}})$$

Or l' inégalité (2) montre que $\xi \mapsto X^{T_{k-1}} + \int \xi C^{\alpha} d(X^{T_k} - X^{T_{k-1}})$ est alors une contraction dans $S^r$ ($r \in [1,\infty[$) de rapport $\leq 1/2$. Comme l'image de 0 est 0 on a $\|X^{T_k} - X^{T_{k-1}}\|_{S^r} \leq 2\|X^{T_{k-1}}\|_{S^r}$ et donc $\|\mathcal{E}(\int C^{\alpha} dZ)^{T_n}\|_{S^r} \leq 3^n$

Démonstration du lemme 2

Utilisant (2) et (3) on obtient: pour tout t.a. T:
$$\|(\int C^{\alpha} dZ)^T - (\int C^{\beta} dZ)^T\|_{S^r} \leq mk_r \|\alpha - \beta\| \|(C^{\alpha\beta})^T\|_{S^r} \|Z^T\|_{H^\infty}$$
$$\|\langle \int C^{\alpha} dZ, \int C^{\alpha} dZ\rangle^T - \langle \int C^{\beta} dZ, \int C^{\beta} dZ\rangle^T\|_{S^r} \leq mk_r \|\alpha - \beta\| \|(C^{\alpha\beta})^T\|_{S^q} \|(C^{\alpha} + C^{\beta})^T\|_{S^{q'}} \|\langle Z, Z\rangle^T\|_{H^\infty}$$

On en déduit que les deux familles sont $S^r$-lipscitziennes, puis on applique le lemme 0.

## CAS LIPSCHITZIEN

Considérons l'équation (1). Dans toute la suite x est un élément de $\mathbb{R}^n$, Z une semimartingale continue à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, et F une fonctionnelle de $\mathbb{D}^n$ dans $\mathbb{D}^{n,m}$ vérifiant la condition de non-anticipativité
$$\forall T \text{ t.a. } \forall X,Y \in \mathbb{D}^n \quad X^{T-} = Y^{T-} \quad \text{implique} \quad F(X)^{T-} = F(Y)^{T-}$$
et, dans ce paragraphe, la condition de Lipschitz suivante:

(5) Il existe un processus réel C cadlag adapté tel que
$$\forall X,Y \in \mathbb{D}^n \quad \|F(X) - F(Y)\| \leq C\|X - Y\|$$

Sous ces hypothèses nous avons besoin d'un théorème d'existence et d'unicité de la solution de (1). Pour celà nous donnons la proposition ci-après où l'hypothèse (5) sur F est remplacée par l'hypothèse plus faible

(5') Il existe un processus réel C cadlag adapté tel que
$\forall X,Y \in \mathbb{D}^n \quad (F(X) - F(Y))^* \leqslant C(X - Y)^*$

(l'hypothèse classique où C ne dépend ni de $\omega$ ni de t, ou seulement de $\omega$, en est évidemment un cas particulier). Rappelons que l'unicité s'entend à une indistinguabilité près.

PROPOSITION

Sous les conditions citées l'équation (1) possède une solution et une seule.

Demonstration

La démonstration que nous donnons est dûe à E. Lenglart.
Quitte à prendre C+1 on peut supposer $C \geqslant 1$. Posons

$$\tilde{F}(X) = F(X)/C \qquad \text{et} \qquad \tilde{Z} = \int C dZ$$

L'équation (1) est alors équvalente à

$$(1') \qquad X = x + \int \tilde{F}(X)_- d\tilde{Z}$$

où $\tilde{F}$ est non-anticipative et lipschitzienne de constante c = 1 (!) et il est alors bien connu que (1') possède une solution et une seule (voir p.ex. [2]).

REMARQUE. Z étant continue, la solution de (1) possède une version continue en t, dans la suite on la note $X^x$.

Le lemme suivant, conséquence facile du théorème de changement de variable d'Ito, nous servira constamment:

LEMME 3

La famille $(X^x, x \in \mathbb{R}^n)$ est $\mathcal{S}^r$-lipschitzienne pour tout $r \in 2\mathbb{N}$. Plus précisement, pour x et $y \in \mathbb{R}^n$ donnés, il existe des proc. prévisibles $a_i^{xy}$ et $b_{ij}^{xy}$ $(i,j=1,\dots,m)$ u.l. dans $\mathcal{S}^\infty$ et tes que

$$(7) \quad \|X^x - X^y\|^r = \|x - y\|^r \,\mathcal{E}\Big(\sum_i \int a_i^{xy} dZ^i + \sum_{ij} \int b_{ij}^{xy} d\langle Z^i, Z^j\rangle\Big)$$

Démonstration

Posons $u = X^x - X^y$, $v = F(X^x)_- - F(X^y)_-$, notons $u_k$ la k-ième composante de u et $v_i$ la i-ième colonne de v. Le théorème d'Ito donne alors pour tout r élément de $2\mathbb{N}$:

$$(8) \quad \|u\|^r = \|x-y\|^r + \sum_k \int r\|u\|^{r-2} u_k du_k + \frac{1}{2}\sum_{kl} \int r\big[(r-2)\|u\|^{r-4} u_k u_l + \delta_l^k \|u\|^{r-2}\big] d\langle u_k, u_l\rangle$$

Soit alors

et
$$a_i^{xy} = r\|u\|^{-2}(u,v_i)1_{\{u\neq 0\}}$$
$$b_{ij}^{xy} = r/2\left[(r-2)\|u\|^{-2}(u,v_i) + \delta_j^i\right]\|u\|^{-2}(u,v_j)1_{\{u\neq 0\}}$$

où $(u,v_i)$est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ de u et $v_i$. On vérifie que
$$|a_i^{xy}| \leq |r|C_- \quad \text{et} \quad |b_{ij}^{xy}| \leq \left[|r(r-2)|/2 + 1\right]C_-$$
et que les a et b sont prévisibles. Remarquant que $u_k$ s'écrit $\Sigma_i v_i^k dZ^i$, où $v_i^k$ est la k-ième composante de $v_i$, on déduit (7) de (8), puis on termine en appliquant le lemme 1.

Dans la suite on notera $\mathcal{E}_r^{xy}$ ou $\mathcal{E}(\zeta_r^{xy})$ l'exponentielle dans (7).

<u>THEOREME 1</u> (théorème d'injectivité faible)

Pour $x \neq y$ donnés, $\{(t,\omega)| X_t^x(\omega) = X_t^y(\omega)\}$ est évanescent. (L'ensemble évanescent dépend donc ici de (x,y)).

Démonstration

Prenons r=2 dans (7), Z étant continue on a $\|X^x - X^y\|^2 = \|x-y\|^2\mathcal{E}(\zeta_2^{xy})$ où la semimartingale $\zeta_2^{xy}$ est continue, le membre de droite est donc identiquement strictement positif, et $X^x - X^y$ par conséquent indistinguable d'un processus ne prenant jamais la valeur zéro.

<u>THEOREME 2</u> (théorème de continuité)

Le processus $\zeta_x(\omega) = X_\cdot^x(\omega)$ à valeurs dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}^n)$ possède une version continue.

Démonstration

On prend $r > n$ dans le lemme 3 et on applique le lemme 0.

Le lemme suivant permet d'utiliser l'égalité (7) en particulier pour des exposants r négatifs:

<u>LEMME 4</u>

Pour $x \neq y$ donnés, l'égalité (7) est vraie pour tout $r \in \mathbb{R}$.

Démonstration

D'après le théorème 1 , $X^x - X^y$ n'est nul que sur un évanescent, $\|X^x - X^y\|^r$ est donc bien défini pour tout r réel, et la démonstration du lemme 3 reste valable pour r quelconque.

THEOREME 3

Pour presque tout $\omega$ on a: $\forall t \lim\limits_{\|x\|\to\infty} \inf\limits_{s\le t} \|X_s^x(\omega)\| = \infty$.

Démonstration

Pour $x \neq 0$ posons $Y^x = \|X^x - X^o\|^{-1}$, $Y^x$ est bien défini (théoreme 1) et ( lemme 4 ) on a

$$|Y^x| = \|x\|^{-1}\mathcal{E}(\zeta_{-1}^{xo})$$

et

$$\begin{aligned} |Y^x - Y^y| &\leq \|X^x - X^y\| \, \|X^x - X^o\|^{-1} \|X^y - X^o\|^{-1} \\ &\leq \|x-y\| \, \|x\|^{-1} \|y\|^{-1} \mathcal{E}(\zeta_1^{xy}) \, \mathcal{E}(\zeta_{-1}^{xo}) \mathcal{E}(\zeta_{-1}^{yo}) \end{aligned}$$

où les exponentielles proviennent de (7) et sont u.l. dans $S^r$ (lemme 1) pour tout $r \in [1,\infty[$. Posons $Y^\infty = 0$ et $A = \{x \mid \|x\| > 1\}$. Alors pour tout $r$ les inégalités ci-dessus montrent qu'il existent $(T_n)$ et $(c_n)$ telles que $T_n \uparrow \infty$ et pour tous $x$ et $y \in \bar{A} = A \cup \{\infty\}$: $\|(Y^x - Y^y)^{T_n}\|_{S^r} \leq d(x,y)c_n$ où $d$ ($d(x,y) = \|x-y\| \, \|x\|^{-1} \|y\|^{-1}$) est une distance compatible avec la topologie du compactifié d'Alexandrov $\bar{A}$ de $A$, et où $c_n$ majore les trois exponentielles arrêtées en $T_n$. Comme $\bar{A}$ s'identifie à une calotte sphérique, on peut appliquer le lemme 0. Enfin on passe de $\|X_s^x - X_s^o\|$ à $\|X_s^x\|$ en remarquant que p.s. $\sup\limits_{s\le t} \|X_s^o(\omega)\| < \infty$.

Soit $\sigma$ égal à $(\mathbb{R}^n)^2$ privé de la diagonale. On a vu que pour tout $(x,y)$ élément de $\sigma$, $\|X^x - X^y\|^{-1}$ est un processus bien défini, réel continu. Introduisons les deux familles $(C^{xy}, (x,y) \in \sigma)$ et $(D^{xy}, (x,y) \in \sigma)$ en posant:

$$\begin{aligned} C^{xy} &= (F(X^x) - F(X^y)) \|X^x - X^y\|^{-1} \\ D^{xy} &= (X^x - X^y) \|X^x - X^y\|^{-1} \end{aligned}$$

Ces deux familles sont u.l. dans $S^\infty$ puisque l'on a $\|C^{xy}\| \leq C$ et $\|D^{xy}\| = 1$ ($C$ est le processus de (5)).

On pose aussi $\sigma_p = \sigma - \{(x,y) \mid \|x-y\| \leq 1/p\}$.

LEMME 5

Les deux familles $C^{xy}$ et $D^{xy}$ sont $S^r$-lipschitziennes sur $\sigma_p$ pour tout $r$ et tout $p$.

Démonstration

Montrons-le pour $C^{xy}$, la démonstration étant similaire pour $D^{xy}$ . Un petit calcul montre que pour $(x,y)$ et $(x',y')$, éléments fixés dans $\sigma_p$, on a:

$$\begin{aligned} \|C^{xy} - C^{x'y'}\| \leq\ & (\|C^{xx'}\| \, \|X^{x'} - X^{y'}\|^{-1} + \|C^{x'y'}\| \, \|X^x - X^y\|^{-1}) \|X^x - X^{x'}\| \\ & + (\|C^{yy'}\| \, \|X^{x'} - X^{y'}\|^{-1} + \|C^{x'y'}\| \, \|X^x - X^y\|^{-1}) \|X^y - X^{y'}\| \end{aligned}$$

On y remplace tous les $\|X^x-X^{x'}\|$ etc. par le deuxième membre correspondant dans (7), et comme $\|x-y\|^{-1}$ et $\|x'-y'\|^{-1}$ sont majorés par p, on n'a aucune peine à montrer qu'il existe $(T_n)$ et $(c_n)$ telles que $T_n \uparrow \infty$ et

$$\|(C^{xy} - C^{x'y'})^{T_n}\|_{S^r} \leq (\|x-x'\| + \|y-y'\|)c_n$$

Le lemme 5 implique évidemment que les deux familles sont continues sur $\mathcal{O}$, mais surtout le lemme 6 suivant, où $\zeta_r^{xy}$ est la semimartingale dans l'exponentielle du membre de droite de (7).

LEMME 6

Pour tout $q\in[1,\infty[$, $(\zeta_r^{xy},(x,y)\in \mathcal{O}_p)$ est $S^q$-lipschitzienne, en particulier $(x,y) \to \zeta_r^{xy}$ à valeurs dans $\mathbb{D}(\mathbb{R})$ admet une version continue sur $\mathcal{O}$.

Démonstration

Comme $a_i^{xy}$ et $b_{ij}^{xy}$ sont u.l. dans $S^\infty$, le lemme 6 résultera du lemme 2 si l'on montre que ces familles sont aussi $S^q$- lipschitziennes pour tout q dans $[1,\infty[$.
Or cela est une conséquence de la définition de $a_i^{xy}$ et de $b_{ij}^{xy}$ (voir la démonstration du lemme 3 ) et du fait que, d'apres le lemme 5 la famille de produits scalaires $(D^{xy},C^{xy}) = \|u\|^{-2}(u,v_i)$ (notations de la démonstration du lemme 3 ) est $S^q$-lipschitzienne sur $\mathcal{O}_p$.

Notons $X(t,\omega,x)$ la version continue en x de $X^x$;

THEOREME 4 (théoreme d'injectivité fort de Kunita)

L'ensemble $\{(t,\omega) \mid \exists (x,y)\in\mathcal{O}\ X(t,\omega,x)=X(t,\omega,y)\}$ est évanescent.
Pour presque tout $\omega$ on a: pour tout compact K de $\mathcal{O}$ et tout t

$$\inf \| X(s,\omega,x)-X(s,\omega,y)\| > 0$$

$$\sup \| X(s,\omega,x)-X(s,\omega,y)\| < +\infty$$

où sup et inf portent sur (x,y) dans K et s dans $[0,t]$.

Démonstration

On a en effet pour presque tout $\omega$: quels que soient x, y, s à coordonnées rationnelles $\|X(s,\omega,x)-X(s,\omega,y)\| = \|x-y\| \exp(\zeta_1^{xy}{}_s(\omega) - \frac{1}{2}\langle\zeta_1^{xy},\zeta_1^{xy}\rangle_s(\omega))$ (*)
où le membre de gauche est continu en (s,x,y), et où le processus sous l'exponentielle peut être pris continu en (s,x,y) (théorème 2 et lemme 2)
Alors, hors d'un ensemble négligeable de $\Omega$, (*) est vraie identiquement

en tout $(s,x,y)$ rationnel; la continuité des deux membres implique l'égalité $(*)$ partout, et comme l'exponentielle ne s'annule pas le théorème s'ensuit.

THEOREME 5 (théorème de surjectivité de Kunita, th. d'homéomorphisme)

Pour presque tout $\omega$ on a: pour tout $t$ l'application $x \longrightarrow X(t,\omega,x) = f(x)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

Démonstration

Nous suivons le raisonnement de Kunita (voir Meyer [4] ).
Pour presque tout $\omega$ $f$ vérifie:
-elle est continue (théorème 2 ), injective (théorème 4 ),
-$f(\mathbb{R}^n)$ est fermé. En effet, soit $y \in \overline{f(\mathbb{R}^n)}$ et considérons une suite $(x_k)$ telle que $\lim_k f(x_k) = y$. Alors le théorème 3 montre que $\limsup \|x_k\| < \infty$, et par conséquent $(x_k)$ possède une valeur d'adhérence réelle $x$. Par continuité $y = f(x)$,
-$f$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $f(\mathbb{R}^n)$. En effet, si $y_k=f(x_k)$ converge vers $y=f(x)$, alors $(x_n)$ ne peut avoir que $x$ pour valeur d'adhérence dans le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^n$.
On termine alors la démonstration en appliquant le théorème d' invariance du domaine: tout sousespace de $\mathbb{R}^n$ homéomorphe à une variété de dimension n est ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

REMARQUE. Dans le cas où $X$ de (1) est à valeurs dans $\mathbb{R}$, i.e. $F$ àvaleurs dans $\mathbb{D}^m$, on peut donner une démonstration plus simple du théorème 3. En effet, si on pose $G^{xy}=(F(X^x_{-})-F(X^y_{-}))(X^x-X^y)^{-1}$ $(x \neq y)$ on obtient

$$X_t^x(\omega) - X_t^y(\omega) = (x-y)\exp\{(\int G^{xy}dZ - \tfrac{1}{2}\langle \int G^{xy}dZ, \int G^{xy}dZ \rangle)_t(\omega)\} \tag{9}$$

et on démontre facilement (cf. théorème 2) que le processus sous l'exponentielle admet une version continue de $\mathbb{R}^2$-diagonale à valeurs dans $\mathbb{D}(\mathbb{R})$ . L'application $x \mapsto f(x)=X(t,\omega,x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie alors pour presque tout $\omega$ :
- elle est strictement croissante (identité (9)),
- elle est continue (théorème 2),
- $\lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = +\infty$ (théorème 3);

f est par conséquent un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

ETUDE DE LA DERIVEE DE $x \longmapsto X(\cdot,\omega,x)$ (X A VALEURS DANS $\mathbb{R}$)

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continument dérivable, posons:

$$\phi(x,y) = (f(x)-f(y))(x-y)^{-1} \qquad \text{si } x \neq y$$
$$\phi(x,x) = Df(x)$$

$\phi$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, elle est de classe $C^1$ si f est de classe $C^2$, et $D\phi$ est localement lipschitzienne.

Si Df est bornée, si $x \in \mathbb{R}$ et si Z est une semimartingale continue à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, l'équation

(10) $$X = x + \int f(X_-)dZ$$

est un cas très particulier de (1) sous les hypothèses (5). Notons $X(t,\omega,x)$ sa solution continue en x (Théorème 2) .

THEOREME 6

Soit f $C^2$ avec Df bornée , alors on a pour presque tout $\omega$ : l'application $x \longmapsto X(\cdot,\omega,x)$ à valeurs dans $\mathbb{D}(\mathbb{R})$ est continument dérivable et

(11) $$DX(\cdot,\omega,x) = \mathcal{E}\left(\int Df(X(s,\cdot,x))dZ_s\right)_\cdot(\omega)$$

Démonstration

Onsait que pour x et y fixés, $x \neq y$, on a (cf. remarque ci-dessus)

$$(X(\cdot,\cdot,x) - X(\cdot,\cdot,y))(x-y)^{-1} = \mathcal{E}\left(\int \phi(X^x,X^y)dZ\right)$$

où le coté gauche est continu en (x,y) sur $\mathbb{R}^2$ - diagonale, $\phi$ est loc. lipschitzienne, et $X^x$ est lipschitzienne en x dans tout $S^r$. Le lemme 0 montre alors que $\phi(X^x,X^y)$ possède une version continue en (x,y) sur tout $\mathbb{R}^2$, et l'égalité (11) en résulte.
Pour voir que DX est continue en x il suffit de remarquer que Df est loc. lipschitzienne puis d'utiliser le lemme 2.

REMARQUE. Le th. 6 peut être généralisé à une fonction $f: \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vérifiant: $\forall(\omega,x) f(\cdot,\omega,x) \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^m)$ et f est $C^2$ en x (avec dérivée première bornée) et $\forall(t,x)$ $f(t,\cdot,x)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

EXTENSION AU CAS LOCALEMENT LIPSCHITZIEN

Considérons l'équation (1), mais supposons que l'hypothèse (5) soit remplacée par

(12) $F: \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{D}^{n,m}$ est localement lipschitzienne, i.e. pour toute boule centrée en 0 de rayon p il existe un processus

$C^p$ prévisible localement dans $\mathbf{S}^\infty$ tel que
$\forall X,Y\in \mathbb{D}^n$, $\|X\|$ et $\|Y\|\leq p$ implique $\|F(X)-F(Y)\|\leq C^p\|X-Y\|$

Nous allons montrer comment l'étude de (1) sous (12) peut être ramenée à l'étude de (1) sous (5). La définition de la suite $S_i$ ci-dessous et ses propriétés ainsi que le théorème 5 sont dans Meyer [4] (qui utilise une suite $h_p$ légèrement différente):

Soit $(h_p)$ une suite de fonctions lipscitziennes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant pour tout p $\|h_p(x)\|\leq p$ et tendant vers l'identité sur $\mathbb{R}^n$ de telle sorte que l'intérieur $U_p$ des compacts $\{h_p(x)=x\}$ tende en croissant vers $\mathbb{R}^n$. (Prendre par exemple $h_p(x)=x$ pour $\|x\|\leq p$ et $=px\|x\|^{-1}$ pour $\|x\|\geq p$). Considérons pour chaque p l'équation

$$X = x + \int F(h_p(X))_- dZ \tag{13}$$

vérifie (5) avec $C^p$ à la place de C.

Soit $X^p(t,\omega,x)$ la version continue en x de la solution de (13) (Théorème 2) . Posons $S_p(\omega,x) = \inf\{t: X^p(t,\omega,x)\notin U_p\}$. Pour p et x fixés on a p.s.

$$X^p(\cdot,\omega,x) = X^{p+1}(\cdot,\omega,x) \quad \text{sur} \quad [0,S_p(\omega,x)[ \tag{14}$$

puisque les deux processus sont solutions de la même équation sur cet intervalle. Or $t< S_p(\omega,x)$ implique: $\forall s\leq t$ $X^p(s,\omega,x)\in U_p$ ouvert, donc, par la continuité en x (uniforme en $s\in[0,t]$), on a pour y assez près de x: $\forall s\leq t$ $X^p(s,\omega,y)\in U_p$, i.e. $t<S_p(\omega,y)$. $S_p(\omega,\cdot)$ est donc s.c.i. Endehors d'une partie négligeable, (14) reste vraie identiquement en p et en x rationnel; mais alors si $x_q$ est une suite de rationnels dans $\mathbb{R}^q$ tendant vers x, (14) écrite pour $x_q$ passe à la limite puisque $S_p(\omega,\cdot)$ est s.c.i., et (14) est donc vraie pour tout x de $\mathbb{R}^n$.

En particulier $S_p(\omega,x)\leq S_{p+1}(\omega,x)$. Nous notons $S(\omega,x)$ la limite de cette suite. $S(\omega,\cdot)$ est s.c.i., nous l'appellerons la durée de vie de (1) sous (12).

<u>THEOREME 7</u>

Il existe sur $[0, S(\omega,x)[$ une fonction $X(\cdot,\omega,x)$ égale à $X^p(\cdot,\omega,x)$ sur $[0,S_p(\omega,x)[$ pour tout p; sur $[0,S(\omega,x)[$ $X(\cdot,\omega,x)$ vérifie (1). En outre, si $S(\omega,x)>t$ alors $S(\omega,y)>t$ pour y assez près de x et $X(\cdot,\omega,y)$ converge uniformement vers $X(\cdot,\omega,x)$ sur $[0,t]$ lorsque y tend vers x.

Démonstration

La première assertion résulte de (14), et la deuxième du fait que pour tout p $h(X) = h(X^p) = 1$ sur $[0,S_p(\omega,x)[$ et de la propriété de non-anticipativité. La troisième résulte de la s.c.i. de $S(\omega,\cdot)$ et du théorème 2 appliqué à $X^p$ pour p assez grand.

THEOREME 8

On a pour presque tout $\omega$: pour tout (x,y), élément de l'ouvert $\{S(\omega,\cdot)>t\}^2$-diagonale, et pour tout $r\in\mathbb{R}$, il existe une semimartingale continue $\zeta_r^{xy}$ sur $[0,t]$ telle que pour tout $s\in[0,t]$

(15) $$\|X(s,\omega,x)-X(s,\omega,y)\|^r = \|x-y\|^r\mathcal{E}(\zeta_r^{xy})_s(\omega)$$

De plus, pour tout $q\in[1,\infty[$, $\zeta_r^{xy}$ est $S^q$-lipschitzienne en (x,y), donc possède une version continue sur l'ouvert où elle est définie.

Démonstration

L'ouvert en question étant réunion dénombrable de pavés fermés $B_1xB_2$ où $B_i$ est une boule fermé de $\mathbb{R}^n$ de rayon et de centre rationnels, il suffit de démontrer que si $B_1$ et $B_2$ sont deux boules fermés de $\mathbb{R}^n$ telles que $B_1\cap B_2=\emptyset$, alors, pour presque tout $\omega$ tel que $S(\omega,x)>t$ et $S(\omega,y)>t$ pour tout $(x,y)\in B_1xB_2$, le théorème 8 est vérifié.
Soit J l'évènement $\{\forall(x,y)\in B_1xB_2,\ S(\omega,x)>t \text{ et } S(\omega,y)>t\}$. La continuité de $X(\cdot,\omega,x)$ en x montre que l'ensemble des couples de trajectoires $(X(\cdot,\omega,x),X(\cdot,\omega,y))$ sur $[0,t]$ est compact dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}^n)^2$ pour (x,y) parcourant $B_1xB_2$, donc contenu dans un carré cartésien de boule B(O,R) pour un R assez grand.
Nous bornant à raisonner sur l'ensemble H des $\omega$ tels que cela ait lieu avec un R fixé, nous remplaçons la loi P par la loi conditionnelle $P_H$ sous laquelle Z reste une semimartingale. Dans (1) nous remplaçons F par $F\circ h$ où h est lipschitzienne, bornée par R et vérifiant $h(x)=x$ pour $\|x\|\leq R$; et nous remplaçons Z par la semimartingale arrêtée $Z^t$. Nous sommes alors ramenés à l'étude d'une équation (1) sous les hypothèses (5) et le théorème 8 résulte des théorèmes 1 et 2.

le théorème d'injectivité fort de Kunita en est de nouveau une conséquence:

THEOREME 9

Soit $X(s,\omega,x)$ la solution continue en x de (1) sous les hypothèses (12) (Z étant toujours supposée continue), alors pour presque tout $\omega$ on a: soient $K_1$ et $K_2$ deux compacts sans point commun de l'ouvert $\{S(\omega,\cdot)>t\}$, on a

$$\inf_{(x,y)\in K_1 \times K_2,\, s\in[0,t]} \|X(s,\omega,x) - X(s,\omega,y)\| > 0$$

Le théorème 6 peut être reformulé sans l'hypothèse de bornitude sur Df. Nous n'énonçons pas explicitement ce résultat, mais nous allons donner son exact parallèle analytique:

Pour une semimartingale continue Z à valeurs dans le corps des complexes $\mathbb{C}$ nous posons

$$\langle Z,Z\rangle = \langle \mathrm{Re}(Z),\mathrm{Re}(Z)\rangle - \langle \mathrm{Im}(Z),\mathrm{Im}(Z)\rangle + 2i\langle \mathrm{Re}(Z),\mathrm{Im}(Z)\rangle$$

et $$\mathcal{E}(Z) = \exp(Z - \langle Z,Z\rangle)$$

Supposons maintenant que Z est une semimartingale continue à valeurs dans $\mathbb{C}^m$ et soit Y un processus cadlag adapté à valeurs dans $\mathbb{C}^m$, nous désignerons par $\int Y_- dZ$ la semimartingale à valeurs dans $\mathbb{C}$ définie par $\int Y_- dZ = \Sigma_j \int Y_{j-} dZ^j$ où

$$\int Y_{j-} dZ^j = \int [\mathrm{Re}Y_{j-} d(\mathrm{Re}Z^j) - \mathrm{Im}Y_{j-} d(\mathrm{Im}Z^j) + i\mathrm{Re}Y_{j-} d(\mathrm{Im}Z^j) + i\mathrm{Im}Y_{j-} d(\mathrm{Re}Z^j)]$$

On vérifie que si $x\in\mathbb{C}$, $x\mathcal{E}(\int Y_- dZ)$ est la solution de l'équation

$$U = x + \int U_- Y_- dZ$$

Soient $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}^m$ une fonction analytique, Z une semimartingale continue à valeurs dans $\mathbb{C}^m$ et x un élément de $\mathbb{C}$. Considérons l'équation complexe

(16) $$X = x + \int f(X_-)dZ$$

où l'inconnue X est à valeurs dans $\mathbb{C}$. (L'équation (16) est équivalente à un système de deux équations réelles, ce qui autorise à appliquer les résultats obtenus pour l'équation (1)).

Soit $S(\omega,x)$ la durée de vie de (16) et notons $X(t,\omega,x)$ la solution de (16) sur $[0,S(\omega,x)[$ (théorème 7).

THEOREME 10

Sous les hypothèses précédentes on a pour presque tout $\omega$ : Sur l'ouvert $\{S(\omega,\cdot)>t\}$, $X(\cdot,\omega,x)$ est analytique en x en tant que fonction à valeurs dans $\mathbb{D}_{[0,t]}(\mathbb{C})$, et sa dérivée est $\mathcal{E}(\int f'(X^x)dZ)$.

Démonstration

La démonstration est formellement la même que celle du théorème 6, la dérivabilité au sens complexe assurant ici l'analyticité :

Posons pour $x \neq y$ $\phi(x,y)=(f(x)-f(y))(x-y)^{-1}$ et $\phi(x,x)=f'(x)$. Comme $\phi$ est localement lipschitzienne, le théorème 8 et le lemme 2 montrent que $\int\phi(X^x,X^y)dZ$ et $\langle\int\phi dZ,\int\phi dZ\rangle$ possèdent des versions continues en $(x,y)$ sur $\{S(\omega,\cdot)>t\}^2$ en tant qu'applications à valeurs dans $\mathbb{D}_{[0,t]}(\mathbb{C})$, et pour ces versions on a pour presque tout $\omega$: quel que soit $(x,y)$ élément de $\{S(\omega,\cdot)>t\}^2$

$$X(\cdot,\omega,x) - X(\cdot,\omega,y) = (x-y)\,\mathcal{E}(\textstyle\int\phi(X^x,X^y)dZ)_{\bullet}(\omega)$$

sur $[0,t]$, et le théorème en résulte.

REMARQUE. Le théorème 10 possède une généralisation analogue à celle du théorème 6 mentionnée dans la remarque suivant ce dernier.

## APPLICATION AUX EQUATIONS LINEAIRES.

Supposons que la fonctionnelle F dans (1) soit de la forme

(17) Il existe un processus A prévisible, loc. borné à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n,m})$ tel que $F(X)_t(\omega) = A_t(\omega)\cdot X_t(\omega)$.

(le point marque le produit matriciel ou plus généralement une opération linéaire).

Il est clair que (17) implique (5).

Dans la suite nous représenterons A à l'aide de m processus $A^j$ à valeurs dans $\mathbb{D}^{n,n}$, la j-ième colonne de $A\cdot X$ etant donné par $A^j\cdot X$.

Soit I la matrice identité (n,n). Considérons l'équation linéaire

(18) $$U = I + \textstyle\sum_j\int A^j_-\cdot U_-dZ^j$$

où le processus inconnu U est à valeurs dans l'espace de matrices $\mathbb{R}^{n,n}$ (et dont les composantes sont $U_{ik} = \delta_{ik} + \sum_j\int\sum_l A^j_{il-}U_{lk}dZ^j$) et soit $X^x$ la solution de (1) sous l'hypothèse (17).

LEMME 7

Pour presque tout $\omega$ on a: quels que soient t et x $U_t(\omega)\cdot x = X^x_t(\omega)$ et $U_t(\omega)$ est inversible.

Démonstration

La deuxième assertion résulte de la première et du théorème 3 d'homéomorphie. Démontrons donc la première assertion.

Chacune des n colonnes de U vérifie une équation (1) avec l'hypothèse (17), (18) admet par conséquent une solution U unique, p.s. à trajectoires continues puisque Z est continue. On a donc p.s.: l'application $x \mapsto U_\bullet(\omega)\cdot x$ est continue de $\mathbb{R}^n$ dans le sousespace de

$\mathbb{D}(\mathbb{R}^n)$ formé des applications continues, en particulier $(t,x) \mapsto U_t(\omega)\cdot x$ est continue. Comme d'autre part on constate que pour tous x et t $U_t \cdot x = X_t^x$ p.s., la continuité des deux membres en (t,x) implique la première assertion du théorème.

Nous noterons $U^{-1}$ le processus à valeurs dans $\mathbb{R}^{n,n}$ et p.s. à trajectoires continues défini par $(U^{-1})_t(\omega) = (U_t(\omega))^{-1}$.

Soit $H = (H^i)$ une semimartingale à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Notons $[H,Z^j]$ le processus à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ dont la i-ième composante est le processus à variation finie $[H^i,Z^j]$. Considérons l'équation linéaire "avec deuxième membre"

(19) $$X = H + \Sigma_j \int A_-^j \cdot X_- dZ^j$$

où le processus inconnu est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

<u>THEOREME 4</u>

La solution $X^H$ de l'équation (19) est donnée par

$$X_t^H = U_t \cdot H_o + U_t \cdot \int_{]o,t]} U_s^{-1} \cdot (dH - \Sigma_j A_-^j \cdot d[H,Z^j])_s$$

où U est la solution de (18).

Démonstration

Chercheons la semimartingale $X^H$ sous la forme du produit matriciel $U\cdot Y$ où $Y = U^{-1}\cdot X^H$ est une semimartingale à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ à déterminer. Avec des notations matricielles évidentes on peut écrire:

$$d(U\cdot Y) = dH + \Sigma_j A_-^j \cdot X_- dZ^j$$

soit $$dU\cdot Y + UdY + d[U,Y] = dH + \Sigma_j A_-^j \cdot U_- \cdot Y_- dZ^j$$

et comme $dU\cdot Y = \Sigma_j A_-^j \cdot U_- \cdot Y_- dZ^j$ , on en déduit

(20) $$dY = U^{-1}\cdot dH - U^{-1}\cdot d[U,Y]$$

avec

(21) $$d[U,Y] = \Sigma_j A^j \cdot U \cdot d[Y,Z^j]$$

De (20) on déduit $d[Y, Z^j] = U^{-1}\cdot d[H,Z^j]$ que l'on substitue dans (21) pour finalement écrire (20) sous la forme

$$dY = U^{-1}\cdot (dH - \Sigma_j A_-^j \cdot d[H,Z^j])$$

d'où le théorème.

REMARQUE. Quand les processus $A^j$ sont égaux à des matrices constantes, l'exponentielle $\exp_A(t) = e^{At}$ d'une matrice carrée A permet d'expliciter U, solution de l'équation (18) correspondante.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. EMERY: Non-confluence des solutions d'équations différentielles stochastiques. Sém. Proba. 15, Lecture Notes in Math. Springer.

[2] M. EMERY: Equations différentielles lipschitziennes, étude de la stabilité. Sém. Proba. 13, Lecture Notes in Math. Springer.

[3] KUNITA: Exposé au Congrès sur les intégrales stochastiques de Durham, 1980, à paraître.

[4] P.A. MEYER: Flot d'une équation différentielle stochastique. Sém. Proba. 15, Lecture Notes in Math. Springer.

[5] P.A. MEYER: Inégalités de normes pour les intégrales stochastiques. Sém. Proba. 12, Lecture Notes in Math. Springer.

[6] J. NEVEU: Equations différentielles stochastiques et applications. Cours de 3e cycle, Paris 1973.

[7] A. UPPMAN: C.R. Acad. Sc. Paris, t. 290, 1980, Série A p. 661-664.

[8] C. YOEURP et M. YOR: Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verv. Gebiete, à paraître.

Are Uppman
Université de Rouen
Laboratoire de Mathématiques
B.P. n° 67
76130 Mont-Saint-Aignan