

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHRISTOPHE STRICKER

Les intervalles de constance de $\langle X, X \rangle$

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 219-220

[<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__219_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__219_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES INTERVALLES DE CONSTANCE DE $\langle X, X \rangle$.

par C. STRICKER

Il est bien connu depuis l'article [1] que si X est une martingale locale continue, les intervalles de constance de $\langle X, X \rangle$ et de X sont les mêmes. Que se passe-t-il dans le cas où X est seulement continue à droite ?

Soit X une martingale locale continue à droite sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ vérifiant les conditions habituelles. Notons d'abord que si $D_r = \inf\{t > r, X_t \neq X_r\}$, $[X, X]_r = [X, X]_{D_r-}$ car on a $[X, X] = \lim_i \sum (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$, la limite étant prise en probabilité. Par contre si X désigne la martingale associée à un processus de Poisson, $[X, X]$ est constant en dehors des instants de sauts de X mais les intervalles de constance de X sont vides.

Examinons maintenant ce qui se passe pour le crochet oblique. Pour qu'il existe, nous devons supposer que X est localement de carré intégrable.

PROPOSITION. X est constant sur les intervalles de constance de $\langle X, X \rangle$.
Réciproquement si X possède la propriété de représentation prévisible,
 $\langle X, X \rangle$ est constant sur les intervalles de constance de X .

Démonstration. Soit $D_r = \inf\{t > r, \langle X, X \rangle_t > \langle X, X \rangle_r\}$. On sait d'après [2] (lemme préliminaire 1.0.) qu'il existe une suite de temps d'arrêt T_n tendant en croissant vers D_r tels que $\langle X, X \rangle_{T_n} = \langle X, X \rangle_r$. Comme X est localement de carré intégrable, on peut supposer que $E[X_{\infty}]^2$ soit finie. Ainsi

pour tout $t \geq r$, $E[X_{t \wedge T_n} - X_r]^2 = E[\langle X, X \rangle_{t \wedge T_n} - \langle X, X \rangle_r] = 0$. Donc X est aussi constante sur $[r, D_r[$. Réciproquement supposons que X possède la propriété de représentation prévisible ; si $D_r = \inf\{t > r, X_t \neq X_r\}$, toute martingale locale est constante sur $[r, D_r[$ d'après les propriétés des intégrales stochastiques. C'est le cas en particulier de la martingale locale $M = A - B$ où A est le processus croissant $\Delta X_D^2 I_{[D_r, +\infty[}$ et B la projection duale prévisible de A . Or $\langle X, X \rangle = \langle X^r, X^r \rangle + B$ sur l'intervalle $[0, D_r]$, si bien que $\langle X, X \rangle$ est constant sur $[r, D_r[$, et la proposition est démontrée.

REMARQUE. On ne peut guère améliorer la réciproque de cette proposition. En effet si T est un temps d'arrêt totalement inaccessible et si $\mathfrak{F}_{T-} \neq \mathfrak{F}_T$ on peut construire une martingale X telle que X soit constante sur $[0, T[$, mais pas $\langle X, X \rangle$. Prenons une variable aléatoire bornée Z de $\mathfrak{F}_T$ n'appartenant pas à $\mathfrak{F}_{T-}$ et posons $X_t = (Z - E[Z | \mathfrak{F}_{T-}]) I_{\{t \geq T\}}$. X est une martingale de carré intégrable constante sur $[0, T[$, mais la projection duale prévisible de $[X, X]$, qui est continue car T est totalement inaccessible, ne peut être constante sur $[0, T]$, sinon elle serait nulle, et la martingale X serait aussi nulle sur $[0, T]$.

REFERENCES.

- [1] GETTOOR R.K. et SHARPE M. : Conformal Martingales. Invent. Math. 16, 1972, p. 271-308.
- [2] LENGLART E., LEPINGLE D. et PRATELLI M. : Une Présentation Unifiée des Inégalités en Théorie des Martingales. Séminaire de Prob. XIV, Lecture Notes in M. 784, p. 26-48.