SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Interpolation entre espaces d'Orlicz

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 153-158

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__153_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1980/81

INTERPOLATION ENTRE ESPACES D'ORLICZ

par P.A. Meyer

Ayant eu besoin d'utiliser le théorème d'interpolation complexe de Calderòn-Lions, dans le cas particulier des espaces d'Orlicz modérés, je me suis aperçu que les résultats concernant ces espaces ne sont pas faciles à extraire du grand article de Calderòn (<< Intermediate spaces and interpolation, the complex method >>, Studia M. 24, 1964, p. 113-190). L'exposé suivant rendra peut être service, en servant d'introduction à ces très beaux travaux.

I. VARIATIONS SUR LE << THEOREME DES TROIS DROITES >>

La notation standard pour la variable complexe est $z=x+iy$, utilisée sans mention spéciale. Nous désignons par S la bande ouverte $0<x<1$ du plan complexe, par $\bar{S}$ la bande fermée, par $D=D_0 \cup D_1$ sa frontière. Pour tout $z \in S$, H_z est la mesure harmonique au point z ; si f est une fonction bornée sur D, nous écrivons

(1) $$H_z(f) = \int f(iu)\mu_0(z,du) + \int f(1+iu)\mu_1(z,du)$$

et nous notons les points suivants :

a) $\mu_0(z,.)$ et $\mu_1(z,.)$ sont des mesures positives sur $\mathbb{R}$, de masses égales respectivement à $1-x$ et à x . Nous introduirons aussi les mesures de probabilité

$$\bar{\mu}_0(z,.) = \frac{1}{1-x}\mu_0(z,.) \quad , \quad \bar{\mu}_1(z,.) = \frac{1}{x}\mu_1(z,.)$$

b) Soient z et z' deux points de S . Alors les mesures $\mu_i(z,.)$ et et $\mu_i(z',.)$ sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et les rapports de leurs densités sont bornés supérieurement et inférieurement, de sorte que ces (quatre) mesures ont mêmes espaces L^p. En particulier, nous dirons qu'une fonction f sur D (resp. sur $\mathbb{R}$) est <u>harmoniquement intégrable</u> si elle est intégrable par rapport à $H_z(.)$ (resp. à $\mu_0(z,.)$ ou $\mu_1(z,.)$) pour <u>un</u> $z \in S$, et la propriété a alors lieu pour <u>tout</u> $z \in S$.

Nous disons qu'une fonction harmonique complexe f dans S est <u>poissonnienne</u> s'il existe deux fonctions harmoniquement intégrables f_0, f_1 sur $\mathbb{R}$ telles que l'on ait pour $z \in S$

(2) $$f(z) = \int f_0(u)\mu_0(z,du) + \int f_1(u)\mu_1(z,du)$$

Si l'on désire calculer les μ_i , on utilisera une représentation conforme $z \mapsto e^{\pi iz}$ de S sur le demi-plan supérieur, et l'expression bien connue

($H_z(du) = \Re(\frac{1}{\pi i}\frac{du}{z-u})$) de la mesure harmonique du demi-plan. Cette représentation conforme, ramenant à une situation plus familière, montre aussi que le caractère poissonnien de f signifie qu'une certaine martingale locale (1) construite sur l'espace du mouvement brownien est en réalité une martingale fermée à droite. Il en résulte :

<u>si</u> f <u>et</u> g <u>sont harmoniques</u>, g <u>harmonique poissonnienne</u>, <u>et</u> $|f|\leq|g|$, <u>alors</u> f <u>est poissonnienne</u>.

En particulier, toute fonction harmonique bornée est poissonnienne. Les fonctions $\sin\pi x e^{\pm\pi y}$ (continues sur $\bar{S}$ et nulles sur D) ne sont pas poissonniennes.

Voici l'inégalité fondamentale pour le théorème de Calderòn. Nous ne pousserons pas la discussion plus loin.

THEOREME 1. <u>Soit</u> f <u>une fonction</u> holomorphe <u>poissonnienne</u>, <u>donnée par</u> (2). <u>Alors on a</u>

(3) $$|f(z)| \leq (\int|f_0(u)|\bar{\mu}_0(z,du))^{1-x} (\int|f_1(u)|\bar{\mu}_1(z,du))^x$$

<u>Démonstration</u>. Notons $I_0^{1-x}I_1^x$ le second membre. Il est clair sur la représentation (2), écrite sous la forme

$$f(z) = (1-x)\int f_0(u)\bar{\mu}_0(z,du) + x\int f_1(u)\bar{\mu}_1(z,du)$$

que l'on a $|f(z)|\leq I_0 \vee I_1$. La fonction $e^{rz}f(z)$ est majorée en module par $e^r|f(z)|$, donc poissonnienne, et en lui appliquant le résultat précédent on obtient(2)

$$|f(z)| \leq e^{-rx}(I_0 \vee I_1 e^r) = e^{-rx}I_0 \vee e^{r(1-x)}I_1$$

On choisit r de manière à rendre égaux les deux termes du $\vee$, et on obtient alors (3). Cela nous suffit.

II. SUR LES ESPACES D'ORLICZ

Nous avons quelque part un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ - en fait, tout s'étend aux mesures positives σ-finies, mais peu importe. Nous considérons une <u>fonction de Young modérée</u> Φ et l'espace d'Orlicz $\Phi(L)$ correspondant. Rappelons les définitions :

Φ est nulle en 0, croissante, convexe ; $\Phi(x)/x$ (ou de manière équivalente $\Phi'(x)$) tend vers l'infini pour $x\to\infty$; on a $x\Phi'(x)\leq p\Phi(x)$ pour tout x, où p est une constante (cela équivaut à la condition plus usuelle de modération $\Phi(2x)\leq k\Phi(x)$)

(1). Si T est le temps de sortie du demi-plan pour le mouvement brownien (B_t), $f(B_t)$ est une martingale locale sur l'intervalle $[0,T[$. Ce raisonnement montre aussi que f_0 et f_1 sont en un certain sens des limites de f au bord. (2) Ici on triche un peu : il faut encore identifier les "valeurs au bord" de $e^{rz}f(z)$ comme $e^{iru}f_0(u)$ et $e^{r+iru}f_1(u)$. Cf. note (1).

Pour simplifier, nous supposerons Φ strictement croissante.

$\Phi(L)$ est l'ensemble des v.a. complexes f sur Ω telles que $E[\Phi(\frac{|f|}{\lambda})] \leq 1$ pour λ assez grand, le plus petit λ possible étant par définition la norme $\|f\|_\Phi$.

Nous adopterons la convention de notation suivante : soit Φ une fonction positive, croissante, convexe, etc., mais sur un intervalle $[A,\infty[$ seulement, où $A \geq 0$. Nous supposerons que $A\Phi'(A) \geq \Phi(A)$ (c'est toujours possible, quitte à augmenter A). Alors Φ admet un prolongement $\hat{\Phi}$ en une fonction de Young modérée sur tout $\mathbb{R}$, et l'espace d'Orlicz $\hat{\Phi}(L)$ ne dépend ni de A, ni du prolongement utilisé. Nous le noterons $\Phi(L)$ dans la suite. Quant à la norme, elle dépend de $\hat{\Phi}$, mais nous choisirons arbitrairement un prolongement et conviendrons de la noter encore $\| \ \|_\Phi$. Cela nous permet de définir l'espace d'Orlicz noté $L^p\log^\alpha L$ pour tout $p>1$ et tout α réel (ces espaces nous intéressent à cause des inégalités de Sobolev logarithmiques).

Maintenant, nous adoptons le point de vue de Calderón : nous considérons une fonction $m(x)$ sur $\mathbb{R}_+$, nulle en 0, croissante, concave, telle que $m'(x) \to 0$ ($x\to\infty$), ou de manière équivalente $m(x)/x \to 0$, et telle que $xm'(x) \geq \frac{1}{p}m(x)$. Soit Φ la fonction réciproque de m ; nous noterons Λ_m l'espace d'Orlicz $\Phi(L)$ (on a écrit tout ce qu'il faut pour que Φ soit une fonction de Young modérée !). La norme dans Λ_m (que nous noterons $[\![f]\!]_m$) est le plus petit $\lambda>0$ possédant la propriété

il existe $h\in\mathcal{B}_1^+$ (la boule unité positive de L^1) tel que
$|f| \leq \lambda m\circ h$ p.p.

Nous dirons que m est un générateur concave de l'espace $\Phi(L)$. Ce que nous avons dit plus haut pour les fonctions Φ définies seulement sur $[A,+\infty[$ s'applique évidemment aux m définis seulement sur $[B,\infty[$, avec mêmes abus de langage.

Les espaces d'Orlicz les plus couramment utilisés, après les L^p bien sûr, sont les $L^p\log^r L$ ($p>1$, r réel ; la fonction Φ correspondante est convexe pour x assez grand - par exemple pour $x \geq e$ si $r \geq 0$, $x \geq 1$ si $r \geq 1$). On ne peut donner explicitement la fonction Φ^{-1}, mais :

LEMME 1. Le générateur concave $m(x)=x^{1/p}\log^{-r/p}x$ (x assez grand) engendre l'espace $L^p\log^r L$ ($p>1$, r réel).

Démonstration. On laisse les détails au lecteur. Le point essentiel est de former $\Phi(m(x))$ et de s'assurer que cela vaut $p^{-r}x(1+o(1))$, de sorte que $\Phi(m(x))$ est compris entre Ax et Bx pour x grand.

LEMME 2. Soient m_o et m_1 deux générateurs concaves, et soit $s\in]0,1[$. Alors $m_s=m_o^{1-s}m_1^s$ est encore un générateur concave.

Démonstration. Pour vérifier que m_s est concave, on prend deux points u et v, une mesure $\Theta=p\varepsilon_u+q\varepsilon_v$ ($p\geq 0$, $q\geq 0$, $p+q=1$) ; on applique l'inégalité de Hölder aux fonctions m_o^{1-s} et m_1^s avec les exposants conjugués $1/1-s$ et $1/s$, et c'est ce qu'on veut. Le reste est à peu près évident.

III. LE THEOREME D'INTERPOLATION

Pour simplifier, nous allons raisonner sur des espaces mesurés finis, ce qui nous permettra de travailler sur L^∞ au lieu des fonctions simples. Nous considérons une famille $(T_z)_{z\in\overline{S}}$ d'opérateurs linéaires de L^∞ dans L^1 (ce pourrait être $L^\infty(\Omega)$ dans $L^1(\Omega')$, mais nous prendrons ici $\Omega=\Omega'$) possédant les propriétés suivantes

1) Pour $f\in L^\infty$, l'application $z\mapsto T_zf$ de $\overline{S}$ dans L^1 est continue, et holomorphe dans S.

2) Il existe un espace d'Orlicz modéré Λ_a tel que l'on ait, pour $f\in L^\infty$
$$\|T_zf\|_{L^1} \leqq c[\![f]\!]_a \quad \text{(c ne dépend pas de z).}$$
En pratique, ce sera souvent un espace L^p.

Nous nous donnons maintenant quatre générateurs concaves m_o,m_1,n_o,n_1 et nous supposons que, pour $f\in L^\infty$

(4) $$[\![T_{iy}f]\!]_{n_o} \leqq M_0[\![f]\!]_{m_o} \ , \ [\![T_{1+iy}f]\!]_{n_1}\leqq M_1[\![f]\!]_{m_1}$$

Dans ces conditions, le théorème de Calderon nous dit que

THEOREME 2. On a $[\![T_sf]\!]_{n_s} \leqq 2M_0^{1-s}M_1^s[\![f]\!]_{m_s}$, avec $m_s=m_o^{1-s}m_1^s$, $n_s=n_o^{1-s}n^s$.

Démonstration. 1) Nous prenons $f\in L^\infty$ telle que $[\![f]\!]_{m_s} \leqq 1$, soit $|f|\leqq m_s(h)$, où h est positive d'intégrale $\leqq 1$, inégalité que nous pouvons écrire
$$f = rm_o^{1-s}(h)m_1^s(h) \quad , \text{ avec } |r|\leqq 1$$
Soit c une borne pour $|f|$, et soit Φ_s la fonction inverse de m_s ; on ne restreint pas la généralité en supposant h bornée par $\Phi_s(c)$. Nous posons alors pour tout $z\in\overline{S}$
$$g_z = rm_o^{1-z}(h)m_1^z(h)$$
fonction uniformément bornée par c sur $\overline{S}$, qui se réduit à f pour z=s. L'espace Λ_a fait maintenant une brève apparition : $z\mapsto g_z$, considérée comme élément de Λ_a, est continue sur $\overline{S}$ (par convergence dominée ; nous laisserons le lecteur vérifier ce point en général, mais en pratique il sera trivial, Λ_a étant un L^p), uniformément bornée, holomorphe dans S (il suffit de vérifier que son intégrale le long de tout cercle est nulle, et pour cela on vérifie que l'intégrale de $E[g_zj]$ est nulle pour

$j\in L^\infty$). Nous posons maintenant $T_z(g_z)=k_z$. Notons en les propriétés, que nous vérifierons ensuite, et qui seules interviendront dans la suite de la démonstration.

1) $z\mapsto k_z$ est une fonction continue bornée de $\overline{S}$ dans L^1, holomorphe dans S. Elle se réduit à $T_s f$ pour z=s.
2) On a $\|k_{iu}\|_{n_0}\leq M_0$ et $\|k_{1+iu}\|_{n_1}\leq M_1$

Pour vérifier la continuité, on écrit $\|T_zg_z-T_{z_0}g_{z_0}\|_1\leq\|T_z(g_z-g_{z_0})\|_1+\|(T_z-T_{z_0})g_{z_0}\|_1$. Pour le premier terme, on utilise le fait que T_z est uniformément borné de Λ_a dans L^1, et que $g_z\to g_{z_0}$ dans Λ_a (propriété 2) de T_z), et pour le second la propriété 1) de T_z^o . Pour vérifier que k_z est uniformément bornée dans L^1, on utilise la propriété 2) de T_z. Nous laissons alors le lecteur vérifier l'holomorphie (sous la forme de la dérivabilité).

La propriété 1) nous permet de choisir une version de $k_z(\omega)$, mesurable par rapport au couple (z,ω) dans $\overline{S}$. Voici la partie délicate de la démonstration.

a) Considérons l'intégrale forte dans L^1

$$k'_z = \int k(iu)\mu_o(z,du) + \int k(1+iu)\mu_1(z,du)$$

et soit $j=L^\infty$. La fonction holomorphe $z\mapsto E[jk_z]$ est bornée, donc poissonnienne. Elle admet les limites au bord $E[jk_{iu}]$, $E[jk_{1+iu}]$ dans la topologie ordinaire, donc elle est intégrale de Poisson de ces fonctions, et donc elle coïncide avec $E[jk'_z]$. Donc $k_z=k'_z$.

b) Nous avons

$$\left\| \int |k(iu,\omega)|\mu_o(z,du)+\int|k(1+iu,\omega)|\mu_1(z,du)\right\|_1 \leq$$
$$\int \|k(iu)\|_1\mu_o(z,du) + \int \|k(1+iu)\|_1 \mu_1(z,du) < \infty$$

donc la v.a. figurant au premier membre est finie pour $\omega\notin N$ négligeable. Mais ce résultat d'intégrabilité harmonique ne dépend pas de z, et pour $\omega\notin N$ nous avons une fonction harmonique poissonnienne complexe

$$\hat{k}(\cdot,\omega) = \int k(iu,\omega)\mu_o(\cdot,du) +\int k(1+iu,\omega)\mu_1(\cdot,du)$$

Pour z fixé, le théorème de Fubini nous dit que si $j\in L^\infty$

$$E[j\hat{k}(z,\cdot)] = \int E[jk_{iu}]\mu_o(z,du) + \int E[jk_{1+iu}]\mu_1(z,du) = E[jk_z]$$

Donc $\hat{k}(z,\cdot)$ est un représentant de la classe k_z, et nous pouvons enlever le ^. Puisque $z\mapsto k_z$ est holomorphe à valeurs dans L^1, l'intégrale de $E[jk_z]$ le long de tout cercle est nulle. Prenant « suffisamment » de j et de cercles (en infinité dénombrable), on voit qu'il existe un ensemble négligeable $N'\supset N$ tel que, pour $\omega\notin N'$, $k(z,\omega)$ soit <u>holomorphe</u>.

c) La démonstration est virtuellement terminée : nous appliquons le th. 1 pour obtenir que, si $\omega \notin N'$

$$|k_z(\omega)| \leqq (\int |k(iu,\omega)|\overline{\mu}_o(z,du))^{1-x}(\int |k(1+iu,\omega)|\mu_1(z,du)$$

Ecrivons maintenant que $[\![k(iu)]\!]_{n_o} \leqq M_O$: cela signifie que la fonction

$$h_o(u,\omega) = \Psi_O(\frac{1}{M_O}|k(iu,\omega)|) \qquad (\ \Psi_O \text{ inverse de } n_o\ )$$

a une intégrale $\leqq 1$ - noter qu'elle est mesurable du couple (u,ω) ! Nous avons $|k(iu,\omega)| = M_O n_o(h_o(u,\omega))$, et par conséquent, en intégrant par rapport à la loi $\overline{\mu}_O(z,.)$ et un utilisant la concavité de n_o

$$\int |k(iu,.)|\overline{\mu}_o(z,du) \leqq M_O n_o(h_o(\omega)), \text{ où } h_o(\omega) = \int h_o(u,\omega)\overline{\mu}_O(z,du)$$

et h_o est positive d'intégrale $\leqq 1$. Faisant la même chose en 1, on obtient pour z=s

$$|T_s f| = |k_s| \leqq M_O^{1-s}M_1^s\ n_o^{1-x}(h_o)n_1^x(h_1)$$

Posons $h = \frac{1}{2}(h_o+h_1)$, positive et d'intégrale $\leqq 1$; n_o et n_1 étant concaves, nous avons

$$n_o^{1-x}(h_o)n_1^x(h_1) \leqq n_o^{1-x}(2h)n_1^x(2h) \leqq 2^{1-x}2^x n_o^{1-x}(h)n_1^x(h)$$

et donc $[\![T_s f]\!]_{n_s} \leqq 2M_O^{1-x}M_1^x$. Le théorème est établi.

REMARQUE. Lorsque $T_z=T$, un opérateur fixe, les conditions au bord sur T entraînent que T est continu de $\Lambda_{m_o+m_1}$ dans $\Lambda_{n_o+n_1}$, donc a fortiori dans L^1. En effet, si l'on a

$$|g| \leqq \lambda(m_o(h)+m_1(h)) \qquad (\ h \text{ positive d'intégrale} \leqq 1\ )$$

et si $A=\{m_o\circ h \geqq m_1\circ h\}$, $B=A^c$, on a $|gI_A| \leqq 2\lambda m_o(h)$, $|gI_B| \leqq 2\lambda m_1(h)$, donc $|T(gI_A)| \leqq 2\lambda M_O n_o(h'_o)$, $|T(gI_B)| \leqq 2\lambda M_1 n_1(h'_1)$, et comme ci-dessus

$$|Tg| \leqq 4\lambda(M_O+M_1)(n_o(h')+n_1(h')) \quad \text{avec} \quad h' = \frac{1}{2}(h'_o+h'_1)$$

Donc en fait l'hypothèse 2) sur T est automatiquement satisfaite dans ce cas.