

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Sur une inégalité de Stein

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 151-152

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__151_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR UNE INEGALITE DE STEIN

par P.A. Meyer

Il y a cinq ans que cette note aurait dû être rédigée, mais il n'est jamais trop tard.

Dans son livre sur la théorie de Littlewood-Paley, Stein fait jouer un rôle crucial à une inégalité de martingales du type de Burkholder. Il énonce cette inégalité en temps discret, où l'on ne voit pas grand chose. Cette note consiste en une traduction et démonstration de la même inégalité en temps continu.

On se place sur $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P}, (\mathbb{F}_t))$ comme d'habitude, et on considère une martingale (X_t) . Voici le théorème de Stein (chez Stein, $\varepsilon=1$) :

THEOREME. On a pour $1 < p < \infty$, pour $\varepsilon > 0$

$$(1) \quad \sqrt{\varepsilon} \left\| \left(\int_0^\infty \frac{ds}{s^{1+2\varepsilon}} \left(\int_0^s t^\varepsilon dX_t \right)^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \leq A_p \|X\|_{L^p}$$

DEMONSTRATION. Nous considérons un mouvement brownien standard (B_s) , issu de 0, défini sur $(\Omega', \mathbb{F}', \mathbb{P}', (\mathbb{F}'_s))$, et nous construisons le produit $\bar{\Omega} = \Omega \times \Omega'$, $\bar{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \times \mathbb{P}'$. Si h est une v.a. sur Ω (resp. sur Ω'), nous convenons de noter encore par h la fonction $(\omega, \omega') \mapsto h(\omega)$ sur $\bar{\Omega}$ (resp. $h(\omega')$). Ainsi nous pouvons parler des tribus \mathbb{F}_t ou \mathbb{F}'_s (indépendantes) sur $\bar{\Omega}$.

Nous pouvons supposer que la martingale X est bornée dans L^p .

Considérons une fonction déterministe $a(s, t)$ sur \mathbb{R}_+^2 , combinaison linéaire finie d'indicatrices de rectangles bornés. Nous allons évaluer de deux manières l'intégrale stochastique double (élémentaire)

$$\int a(s, t) dB_s dX_t = M(\omega, \omega').$$

1) Nous la considérons comme une intégrale stochastique $\int_0^\infty \varphi_s dB_s$, où $\varphi_s = \int a(s, t) dX_t$. Comme (B_s) est encore un m^t brownien par rapport à la filtration obtenue en ajoutant tout \mathbb{F} à \mathbb{F}'_0 , cette intégrale est une i.s. usuelle de processus prévisible, et nous avons (Burkholder)

$$(2) \quad \|M\|_{L^p} \sim \left\| \left(\int_0^\infty ds \left(\int_0^\infty a(s, t) dX_t \right)^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}$$

2) Soit H , l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{F}')$, et considérons le processus déterministe à valeurs dans H $t \mapsto \psi_t$, où $\psi_t = \int a(s, t) dB_s$. Nous considérons le processus à valeurs dans H (intégrale stochastique élémentaire)

$$M_t = \int_0^t \psi_u dX_u$$

Ceci est en réalité une somme finie $\sum h_i(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$, avec des $h_i \in H$,

donc (les X_t étant intégrables), M_t est une vraie martingale à valeurs dans H . Le processus croissant scalaire associé est $\int_0^t \|\psi_u\|^2 d[X, X]_u$,
 où

$$\|\psi_u\|^2 = \int P'(d\omega') (\int a(s, u) dB_s(\omega'))^2 = \int a^2(s, u) ds$$

On a de même

$$\|M_\infty\|_H^2 = \int M^2(\omega, \omega') P'(d\omega') = \int_0^\infty ds (\int a(s, t) dX_t)^2$$

Ecrivant alors l'inégalité de Burkholder vectorielle

$$(3) \quad \| \|M_\infty\|_H \|_{L^p} \leq c_p \| (\int_0^\infty \|\psi_u\|^2 d[X, X]_u)^{1/2} \|_{L^p}$$

et la rapprochant de (2), on trouve une inégalité

$$(4) \quad \| (\int ds (\int a(s, t) dX_t)^2)^{1/2} \|_{L^p} \leq c_p \| (\int d[X, X]_t (\int a^2(s, t) ds)^{1/2} \|_{L^p}$$

Ceci a été établi pour un processus $a(s, t)$ très simple, mais il n'y a pas de difficulté à l'étendre aux processus $a(s, t)$ "raisonnables".

L'inégalité (1) concerne le cas où $a(s, t) = \frac{1}{s^{\varepsilon+1/2}} t^\varepsilon \mathbb{1}_{\{t < s\}}$. On a alors $\int a^2(s, t) ds = t^{2\varepsilon} \int_0^\infty ds/s^{1+2\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon}$. Du côté droit, nous avons donc simplement $c_p \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \| [X, X]_\infty^{1/2} \|_{L^p} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A_p \| X \|_{L^p}$.