SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DOMINIQUE BAKRY

Remarques sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck en dimension infinie

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 134-137
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__134_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1980/81

REMARQUES SUR LE PROCESSUS D'ORNSTEIN UHLENBECK EN DIMENSION INFINIE

par D. Bakry

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck en dimension infinie, introduit par Malliavin, est un processus à valeurs dans un espace de trajectoires. Il peut donc être considéré aussi comme processus à deux paramètres. Nous allons faire ici quelques remarques à ce sujet.

1. Nous désignons par E l'espace $\underline{\underline{C}}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, muni de la topologie de la convergence compacte (pour laquelle il est polonais) et de la tribu borélienne correspondante $\underline{\underline{E}}^\circ$. On pose comme d'habitude $w(s)=X_s(w)$ pour $w\in W$; la tribu $\underline{\underline{E}}^\circ$ est alors engendrée par les applications X_s, $s\in\mathbb{R}_+$.

On note par μ la mesure de Wiener sur E, pour laquelle les fonctions X_s constituent un mouvement brownien standard, avec $X_0=0$ p.s..

On sait (voir dans ce volume le travail de Meyer sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, auquel on renvoie par la référence (OU) dans la suite de cette note) que E peut être muni d'un semi-groupe (P_t) de noyaux markoviens μ-symétriques, définis par la formule (8) de (OU)

(1) $$P_t(w,f) = \int f(e^{-t/2}w+\sqrt{1-e^{-t}}\,\hat{w})\mu(d\hat{w})$$

Rappelons aussi la définition de diverses fonctions introduites dans (OU) :

- Les fonctions linéaires $w\mapsto \{\alpha,w\} = \int_{0-}^{\infty}\alpha(s)dX_s(w) = -\int_{0-}^{\infty}X_s(w)d\alpha_s$,

où α est nulle sur $\mathbb{R}_-$, à variation finie et à support compact sur $\mathbb{R}_+$. On pose $q(\alpha) = \int_0^{\infty}a^2(s)ds$.

- Les fonctions $e_\alpha(w)=e^{i\{\alpha,w\}}$, et leurs combinaisons linéaires , appelées polynômes trigonométriques.
- Les fonctions $\varepsilon_\alpha = e^{+q(\alpha)/2}\,e_\alpha$, sur lesquelles P_t opère par la formule très simple

(2) $$P_t\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\alpha e^{-t/2}} \qquad \text{(formule (10) de (OU)).}$$

2. Nous désignons par Ω l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans E. Nous posons $Y_t(\omega)=\omega(t)$ et (comme $Y_t(\omega)$ est elle même une trajectoire)

$$Y_{s,t}(\omega) = X_s(Y_t(\omega))$$

de sorte que Ω s'identifie aussi à l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}_+^2$ dans $\mathbb{R}$. Nous notons $\underline{\underline{F}}^\circ$ la tribu sur Ω engendrée par les applications Y_t à valeurs dans $(E,\underline{\underline{E}}^\circ)$, ou par les applications Y_{st} à valeurs dans $\mathbb{R}$. Enfin, P sera la loi P^μ sur Ω, pour laquelle le processus (Y_t) est markovien, admettant (P_t) comme semi-groupe de transition et μ comme loi initiale.

Nous introduisons sur l'espace Ω une double filtration :

$$(3)\qquad \begin{aligned} \underline{\underline{F}}_s^1 &= \underline{\underline{F}}_{s\infty}^\circ = \sigma(Y_{uv}\ ,\ u\leq s,\ v\in\mathbb{R}_+\ ) \\ \underline{\underline{F}}_t^2 &= \underline{\underline{F}}_{\infty t}^\circ = \sigma(Y_{uv}\ ,\ u\in\mathbb{R}_+,\ v\leq t\ ) = \sigma(Y_v,\ 0\leq v\leq t\ ) \end{aligned}$$

La seconde est la filtration naturelle du processus (Y_t).

3. Il existe un moyen plus explicite de construire la loi P. Considérons sur un espace probabilisé $\overline{\Omega}$ un mouvement brownien standard $(B_s)_{s\geq 0}$ issu de 0, un drap brownien $(D_{st})_{s,t\geq 0}$ nul sur les axes, tous deux à trajectoires continues, et indépendants. Posons

$$H_s^\circ = \sigma(B_r,\ r\leq s\ )\ ,\quad \underline{\underline{K}}_{st}^\circ = \sigma(W_{qr}\ ,\ q\leq s,\ r\leq t\ )$$

et enfin (cf. (OU), formule (7))

$$Y_t(\overline{\omega}) = (\ s\mapsto e^{-t/2}(\ B_s(\overline{\omega}) + D_{s,e^t-1}(\overline{\omega}))$$

Alors (Y_t) sur $\overline{\Omega}$ est un processus à valeurs dans W, à trajectoires continues, et de loi P. Dans cette réalisation, les tribus $\underline{\underline{F}}_s^1$ et $\underline{\underline{F}}_t^2$ se lisent $\underline{\underline{H}}_s^\circ\vee\underline{\underline{K}}_{s\infty}^\circ$ et $\underline{\underline{H}}_\infty^\circ\vee\underline{\underline{K}}_{\infty t}$. Il est bien connu que les filtrations du drap brownien satisfont à la condition de commutation (F4) de Cairoli-Walsh. Comme les tribus $\underline{\underline{H}}$ et $\underline{\underline{K}}$ sont toutes indépendantes, nous en déduisons en revenant sur Ω :

PROPOSITION 1. Sur Ω , les espérances conditionnelles par rapport aux filtrations $(\underline{\underline{F}}_s^1)$ et $(\underline{\underline{F}}_t^2)$ commutent.

Cela s'étend aux filtrations obtenues en rendant continues à droite $(\underline{\underline{F}}_s^1)$ et $(\underline{\underline{F}}_t^2)$, et en les enrichissant des ensembles de mesure nulle.

REMARQUE. Pour construire la famille $(\underline{\underline{F}}_t^2)$ définitive, on part de $(\underline{\underline{F}}_{\infty t}^\circ)$, on la rend continue à droite, et on l'enrichit des P-négligeables. On montre en théorie des processus de Markov, pour les semi-groupes de Feller, que la première de ces deux opérations est inutile : l'enrichissement suffit à rendre la filtration continue à droite. Ici, (P_t) n'est pas fellérien sur E. Mais si f est une fonction continue/bornée sur E dépendant seulement d'un nombre fini de coordonnées $X_{s_1},\ldots,X_{s_n}$, P_tf ou $R_\lambda f$ (R_λ est la résolvante) ne dépend que de ces mêmes coordonnées, et est continue sur E. Il en résulte sans difficulté une transposition du raisonnement classique, et la propriété mentionnée plus haut pour $(\underline{\underline{F}}_{\infty t})$.

On a une propriété analogue pour l'autre filtration. Notons $\xi_s(\omega)$ la trajectoire $t \mapsto X_s(Y_t(\omega))=Y_{st}(\omega)$. Alors le processus (ξ_s) à valeurs dans W est un processus à accroissements indépendants et homogènes, issu de 0 (la trajectoire identiquement nulle), dont l'accroissement $\xi_t-\xi_s$ a pour loi υ_{t-s} , la loi du processus d'Ornstein-Uhlenbeck réel associé à la mesure gaussienne centrée sur $\mathbb{R}$ de variance t-s. Il est bien connu que la filtration naturelle d'un p.a.i. possède la propriété cherchée.

4. Dans (OU), Meyer signale que le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck transforme les martingales en martingales : soit f une fonction bornée sur W, et soit $f_s=E_\mu[f|\underline{\underline{E}}_s]$, l'espérance conditionnelle brownienne de f. En réalité, f_s est une μ-classe , mais (comme μ est invariante par le semi-groupe), P_tf_s est bien définie en tant que μ-classe, et l'on a

$$P_tf_s = E_\mu[P_tf|\underline{\underline{E}}_s] \ .$$

Meyer a posé la question suivante : si l'on prend pour (f_s) une version continue de la martingale, peut on affirmer que le processus (P_tf_s) est continu en ses deux indices ? D'autre part, possède t'il des propriétés intéressantes en tant que processus à deux indices ? Nous allons répondre au moins partiellement à ces questions.

Tout d'abord, nous allons définir f_s <u>sans aucune ambigüité</u>. Il existe en effet un procédé, dû à Dawson et présenté dans le Sém. Prob. VII, p. 555, pour calculer les martingales d'un processus de Markov. La recette de Dawson est la suivante. On part de la fonction f(w) sur W, supposée $\underline{\underline{E}}^\circ$-mesurable bornée ou positive. On fabrique une fonction $\varphi(w,s,\tilde{w})$ sur $W\times\mathbb{R}_+\times W_0$ (ce dernier, l'espace des trajectoires nulles en 0) en posant

$$\varphi(w,s,\tilde{w}) = f(w/s/\tilde{w}) \text{ où } \quad X_r(w/s/\tilde{w}) = X_r(w), \ r\leq s$$
$$= X_s(w)+ X_{r-s}(\tilde{w}), \ r\geq s$$

et enfin, on pose $f_s(w)=\Pi_s(w,f)= E_\mu[\varphi(w,s,.)]$. Il s'agit en fait d'une version de la martingale $E_\mu[f|\underline{\underline{E}}_s]$, indistinguable de la version continue.

En particulier, si l'on prend $f(w) = \{\alpha,w\} = \int_{0-}^\infty \alpha_r dX_r(w)$, on a $\varphi(w,s,\tilde{w}) = \int_{0-}^s \alpha_r dX_r(w) + \int_s^\infty \alpha_{r-s}dX_r(\tilde{w})$. On en déduit sans peine

$$\Pi_s \ \varepsilon_\alpha = \varepsilon_{I_{[0,s]}\alpha}$$

et comme $P_t\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\alpha e^{-t/2}}$, on voit que <u>les noyaux</u> P_t <u>et</u> Π_s <u>commutent sans aucun ensemble exceptionnel</u>.

En ce qui concerne la continuité de $P_tf_s=P_t\Pi_sf$ en (s,t), elle est évidente lorsque f est un ε_α , donc lorsque f est un polynôme trigonométrique. Pour savoir l'étendre à l'adhérence des polynômes trigonométriques pour une norme convenable, il suffit de savoir majorer en probabilité $\sup_{s,t}|P_tf_s|$ en fonction de $\|f\|$.

Cette méthode permet de montrer que $P_t f_s$ est continue en ses deux arguments lorsque f appartient à l'espace d'Orlicz $L\log^2 L$. Mais en fait on peut dire un peu mieux. Supposons seulement $f \in L\log L$. Alors, d'après le lemme de Rota (Dellacherie-Meyer, Probabilités et Potentiel B, V-64), on peut affirmer que $\sup_t P_t|f| \in \underline{\underline{L}}^1$, et le raisonnement précédent entraîne que $P_t f$ est continu en t pour presque tout w. Mais alors la projection optionnelle sur la filtration $(\underline{\underline{F}}_s)$ du mouvement brownien du processus $(P_t f)_t$ se prête à l'application des théorèmes de Millet-Sucheston [1] (théorèmes 4c et 6 p. 47) : <u>le processus</u> $(\Pi_s P_t(w,f))$ <u>est continu en ses deux paramètres</u>, pour presque tout $w \in E$.

5. Il nous reste à trouver une interprétation de ce processus à deux indices. Pour cela, nous nous placerons pour commencer sur un intervalle $t \in [0,a]$, et nous utiliserons la réversibilité du processus d'Ornstein-Uhlenbeck $(Y_t)_{0 \leq t \leq a}$: posant

$$\hat{F}^a_{\infty t} = \sigma(Y_u,\ t \leq u \leq a\ )\ ,\quad \hat{\underline{\underline{F}}}_{\infty t} = \bigvee_a \hat{\underline{\underline{F}}}^a_{\infty\, t}$$ (filtrations décroissantes)

et appliquant la proposition 1 au processus (Y_{a-t}), nous voyons que les espérances conditionnelles par rapport à $\underline{\underline{F}}_{sa}$ et $\hat{\underline{\underline{F}}}^a_{\infty t}$ commutent. Faisant alors tendre a vers $+\infty$, nous voyons que la filtration croissante $(\underline{\underline{F}}_{s\infty})$ et la filtration décroissante $(\hat{\underline{\underline{F}}}_{\infty\, t})$ satisfont à (F4).

Soit f une fonction positive ou bornée sur E. Il est clair sur la représentation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck utilisée pour prouver la proposition 1 que l'on a

$$E[f\circ Y_0 | \underline{\underline{F}}_{s\infty}] = \Pi_s f(Y_0)$$

car Y_0 a pour loi μ, et il est indépendant du drap brownien (D_{st}). Prenant une espérance conditionnelle par rapport aux tribus du futur $\hat{\underline{\underline{F}}}_{\infty\, t}$, et utilisant la réversibilité du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, nous avons l'interprétation cherchée

$$E[f\circ Y_0 | \underline{\underline{F}}_{s\infty} \cap \hat{\underline{\underline{F}}}_{\infty t}] = P_t \Pi_s f(Y_t)\ . \tag{4}$$

<u>Référence</u>

[1]. Bakry (D.). Limites quadrantales des martingales à deux indices. Processus aléatoires à deux indices, Colloque E.N.S.T.-C.N.E.T. Paris 1980. Lecture Notes in M. 863, Springer-Verlag.

D. Bakry
Département de Mathématiques
Université de Monastir
TUNISIE