

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

XAVIER FERNIQUE

Sur le théorème de Kantorovitch-Rubinstein dans les espaces polonais

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 6-10

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__6_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Novembre 1980

SUR LE THEOREME DE KANTOROVITCH-RUBINSTEIN

DANS LES ESPACES POLONAIS

par

X. FERNIQUE

Le théorème de Kantorovitch-Rubinstein dans les espaces polonais est connu et utile ; nous rappelons son énoncé :

THEOREME K.R. : Soient (S, d) un espace polonais, μ et ν deux probabilités sur S vérifiant :

$$\iint d(x, y) d\mu(x) d\mu(y) < \infty, \quad \iint d(x, y) d\nu(x) d\nu(y) < \infty ;$$

il existe alors une probabilité π sur $S \times S$ ayant pour marges μ et ν et vérifiant :

$$\iint d(x, y) d\pi(x, y) = \sup \left\{ \int f d\mu - \int f d\nu, f \in \mathfrak{F}_S \right\},$$

$$\mathfrak{F}_S = \{ f : \forall (x, y) \in S \times S, f(x) - f(y) \leq d(x, y) \}.$$

Ce théorème est en général prouvé ([1], [2]) à partir de constructions explicites de mesures ; nous en donnons ci-dessous une preuve différente et peut-être plus élémentaire qu'on peut utiliser dans tous les problèmes de ce type.

(a) Supposons pour commencer que μ et ν aient un support fini commun $A = \{a_i, 1 \leq i \leq n\}$ et posons pour tout $i \in [1, n]$, $\mu_i = \mu(a_i) > 0$, $\nu_i = \nu(a_i) > 0$. Nous allons comparer 3 problèmes :

$$P_1 : \text{maximiser } \sum_1^n f(a_i)(\mu_i - \nu_i) \text{ sous les conditions : } \forall k, \ell \in [1, n], \\ f(a_k) - f(a_\ell) \leq d(a_k, a_\ell).$$

$$P_2 : \text{maximiser } \sum_1^n f(a_i)\mu_i + g(a_i)\nu_i \text{ sous les conditions : } \forall k, \ell \in [1, n], \\ f(a_k) + g(a_\ell) \leq d(a_k, a_\ell).$$

$$P'_2 : \text{minimiser } \sum_{k,l=1}^{n,n} d(a_k, a_l) \pi_{k,l} \text{ sous les conditions : } \forall k, l \in [1, n], \pi_{k,l} \geq 0 ,$$

$$\sum_{i=1}^n \pi_{i,l} = \nu_l , \quad \sum_{j=1}^n \pi_{k,j} = \mu_k .$$

Remarquons que les problèmes P_2 et P'_2 sont des problèmes de transport duaux ; on sait qu'ils ont l'un et l'autre des solutions et la même valeur ; ceci montre que le théorème sera établi dans ce premier cas si on prouve le lemme :

LEMME 1. Dans les conditions ci-dessus, les problèmes P_1 et P_2 ont la même valeur.

Démonstration du lemme : Le problème P_1 ayant évidemment une valeur inférieure ou égale à celle de P_2 , l'inégalité inverse sera prouvée et le lemme établi si nous montrons que tout couple (f, g) maximal pour P_2 a une somme nulle. Or un tel couple vérifie :

$$\forall k, l \in [1, n] , \quad f(a_k) \leq \inf_{1 \leq j \leq n} \{d(a_k, a_j) - g(a_j)\} ,$$

$$g(a_l) \leq \inf_{1 \leq i \leq n} \{d(a_i, a_l) - f(a_i)\} ,$$

$$f(a_k) + g(a_k) \leq 0 ,$$

et nous allons montrer qu'aucune de ces inégalités n'est stricte ; en première et deuxième lignes, c'est immédiat ; supposons en effet par exemple qu'au rang k_0 , on ait :

$$f(a_{k_0}) < f'(a_{k_0}) = \inf_{1 \leq j \leq n} \{d(a_{k_0}, a_j) - g(a_j)\}$$

on en déduirait immédiatement, puisque μ_{k_0} est strictement positif, que (f, g) n'est pas maximal pour P_2 , c'est absurde. Supposons maintenant qu'au rang k_0 , on ait :

$$f(a_{k_0}) + g(a_{k_0}) < 0 ,$$

la preuve précédente montrerait l'existence de deux rangs i et j tels que :

$$f(a_{k_0}) + g(a_j) = d(a_{k_0}, a_j), f(a_i) + g(a_{k_0}) = d(a_i, a_{k_0})$$

on aurait alors :

$$f(a_i) + g(a_j) \leq d(a_i, a_j) \leq d(a_i, a_{k_0}) + d(a_{k_0}, a_j) \leq f(a_i) + g(a_j) + [f(a_{k_0}) + g(a_{k_0})] \\ < f(a_i) + g(a_j),$$

c'est encore absurde ; le lemme est établi et le théorème prouvé dans ce cas (a).

(b) Supposons maintenant que S soit compact ; pour tout entier $p > 0$, nous notons $A = A_p$ une partie finie de S (de cardinal n) dont le voisinage d'ordre $\frac{1}{p}$ soit S ; nous notons $h = h_p$ une application mesurable de S dans A vérifiant $d(x, h(x)) \leq \frac{1}{p}$; nous choisissons un point a de S et nous posons :

$$\mu_p = (1 - \frac{1}{p})\mu \circ h^{-1} + \frac{1}{np} \sum_A \delta_a, \quad \nu_p = (1 - \frac{1}{p})\nu \circ h^{-1} + \frac{1}{np} \sum_A \delta_a,$$

de sorte que μ_p et ν_p satisfaisant les hypothèses de (a), il existe une probabilité π_p sur $S \times S$ portée par $A \times A$, ayant μ_p et ν_p pour marges et vérifiant :

$$\iint d(x, y) d\pi_p(x, y) \leq \sup \{ \int f d\mu_p - \int f d\nu_p, f \in \mathcal{F}_A \}.$$

Pour transformer ce dernier terme, nous utilisons le lemme suivant :

LEMME 2. Soient (S, d) un espace métrique, A un sous-ensemble de S et f une fonction sur A appartenant à $\mathcal{F}_A$; alors f est la restriction à A d'une fonction $\bar{f}$ sur S appartenant à $\mathcal{F}_S$. Si A est mesurable, on a donc pour tout couple (μ, ν) de probabilités sur S portées par A :

$$\sup \{ \int f d\mu - \int f d\nu, f \in \mathcal{F}_A \} = \sup \{ \int \bar{f} d\mu - \int \bar{f} d\nu, \bar{f} \in \mathcal{F}_S \}.$$

La preuve de ce lemme est immédiate ; on peut définir $\bar{f}$ par :

$$\forall x \in S, \bar{f}(x) = \sup \{ f(y) - d(x, y), y \in A \}.$$

L'application du lemme 2 et des définitions de μ_p et ν_p fournit alors :

$$\iint d(x,y) d\pi_p(x,y) \leq \sup\left\{\int f d\mu - \int f d\nu, f \in \mathfrak{F}_S\right\} + \frac{2}{p}.$$

On peut alors extraire de la suite π_p une suite convergeant étroitement sur $S \times S$ vers une probabilité π ayant pour marges μ et ν et vérifiant, puisque d est continue bornée :

$$\iint d(x,y) d\pi(x,y) \leq \lim \iint d(x,y) d\pi_p(x,y)$$

c'est le résultat du théorème qui est ainsi prouvé dans le cas (b).

(c) Dans le cas général, nous notons a un élément de S ; les hypothèses du théorème impliquent la convergence de $\int (1+d(x,a))(d\mu(x)+d\nu(x))$; pour tout entier $p > 0$, il existe donc une partie compacte $K = K_p$ de S telle que :

$$\int_{S \setminus K_p} [1+d(x,a)](d\mu(x) + d\nu(x)) \leq \frac{1}{p};$$

nous définissons alors deux probabilités μ_p et ν_p à support compact en posant :

$$\mu_p = I_K \cdot \mu + (1-\mu(K))\delta_a, \nu_p = I_K \cdot \nu + (1-\nu(K))\delta_a;$$

la preuve précédente montre qu'il existe une probabilité π_p sur $S \times S$ des marges μ_p et ν_p vérifiant, d'après les définitions de μ_p et ν_p :

$$\iint d(x,y) d\pi_p(x,y) = \sup\left\{\int_{K_p} (f(x) - f(a))(d\mu(x) - d\nu(x)), f \in \mathfrak{F}_S\right\};$$

la définition de K_p majore alors ce dernier membre par :

$$\sup\left\{\int f(x)(d\mu(x) - d\nu(x)), f \in \mathfrak{F}_S\right\} + \frac{1}{p}.$$

Enfin l'ensemble $\{\pi_p, p \in \mathbb{N}\}$ ayant des marges étroitement convergentes est relativement compact, on peut en extraire une suite partielle étroitement convergente vers une probabilité π qui a pour marges μ et ν ; on a par ailleurs pour tout nombre $t > 0$ et tout entier $p > 0$:

$$\begin{aligned} \iint_{d(x,y) > t} d(x,y) d\pi_p(x,y) &\leq \iint_{d(x,a)+d(y,a) > t} [d(x,a)+d(y,a)] d\pi_p(x,y) \\ &\leq 2 \int_{d(x,a) > \frac{t}{2}} d(x,a) d\mu(x) + 2 \int_{d(y,a) > \frac{t}{2}} d(y,a) d\nu(y). \end{aligned}$$

Ceci montre que d est uniformément intégrable par rapport à l'ensemble $\{\pi_p, p \in \mathbb{N}\}$ et on a donc :

$$\iint d(x,y) d\pi(x,y) \leq \overline{\lim} \iint d(x,y) d\pi_p(x,y) \leq \sup\left\{ \int f d\mu - \int f d\nu, f \in \mathcal{F}_S \right\}.$$

Ceci prouve le théorème dans le cas général.

- | | |
|-------------------|--|
| [1] DUDLEY, R.M. | Probabilities and metrics, Lecture Notes
Series n° 45.
Matematik Institut, Aarhus University. |
| [2] DE ACOSTA, A. | Invariance principles in probability for
triangular arrays of B -valued random
vectors and some applications, to appear. |

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX