

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DOMINIQUE LÉPINGLE

PAUL-ANDRÉ MEYER

MARC YOR

Extrémalité et remplissage de tribus pour certaines martingales purement discontinues

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 604-617

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__604_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Extrémalité et remplissage de tribus pour certaines martingales
purement discontinues.

D. Lépingle, P.A. Meyer, M. Yor.

1. Introduction et préliminaires

1.1) Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité complet, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ continue à droite et (\mathcal{F}, P) -complète. On suppose donné un processus

$$M : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

qui soit une (\mathcal{F}_t, P) -martingale locale, continue à droite et nulle en 0. On note $(\mathcal{F}^{(M)}_t)_{t \geq 0}$ la famille de tribus $(\sigma \{M_s, s \leq t\})_{t \geq 0}$ rendue (\mathcal{F}, P) complète et continue à droite.

Rappelons tout d'abord un résultat général, énoncé et démontré en ([10], théorème 1.5).

Théorème 1. Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) P est un point extrémal de l'ensemble

$$\mathcal{M} = \{Q \text{ probabilité sur } (\Omega, \mathcal{F}) / M \text{ est une } (\mathcal{F}_t, Q)\text{-martingale locale}\}$$

(ii) Toute (\mathcal{F}_t, P) -martingale bornée $(L_t)_{t \geq 0}$ peut s'écrire sous la forme

$$L_t = c + \int_0^t h_s dM_s \quad (t \geq 0),$$

où $c \in \mathbb{R}$, et h est un processus (\mathcal{F}_t) -prévisible convenablement intégrable.

(iii) Même énoncé qu'en (ii), en remplaçant "bornée" par "locale".

Lorsque ces conditions sont réalisées, on dit, en faisant un léger abus de langage, que M est (\mathcal{F}_t) -extrémale, et lorsque $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}^{(M)}_t$, on dit simplement que M est extrémale.

La propriété (ii) jouant un rôle important dans de nombreuses questions, divers auteurs ont été amenés à étudier l'existence de critères de (\mathcal{F}_t) -extrémalité plus opératoires que (i) ; on rappelle, au paragraphe 1.2), une partie des conditions obtenues.

1.2) Supposons ici M continue, et pour simplifier la discussion $\langle M \rangle_\infty = \infty$ P-p.s.

Alors, si

$$\tau_t = \inf \{s / \langle M \rangle_s > t\} \quad \text{pour } t \geq 0,$$

il existe, d'après un théorème maintenant classique, dû à Dambis et Dubins-Schwarz, un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien (B_t) , égal par définition à (M_{τ_t}) , et tel que

$$M_t = B_{\langle M \rangle_t} \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Il a été remarqué par Dubins-Schwarz [6], puis par Jacod-Yor ([10] ;(c),p.108), que si l'une des conditions équivalentes suivantes

$$(\Pi_c) \left\{ \begin{array}{l} \cdot \mathcal{F}(M)_\infty = \mathcal{F}(B)_\infty \\ \cdot \text{pour tout } t, \langle M \rangle_t \text{ est } \mathcal{F}(B)_\infty\text{-mesurable} \\ \cdot \text{pour tout } t, \tau_t \text{ est } \mathcal{F}(B)_\infty\text{-mesurable} \\ \cdot \text{pour tout } t, \mathcal{F}(M)_{\tau_t} = \mathcal{F}(B)_t \end{array} \right.$$

est réalisée (on dit dans ce cas que M est pure), alors M est extrémale. En abrégé : pureté \Rightarrow extrémalité. Mais l'implication inverse est fautive, on en trouve un premier contre-exemple dans [6] et un second, tout à fait différent, dans [14] (voir aussi [12] pour de nombreuses extensions).

1.3) Dans la troisième partie, nous étudierons le cas où M est une $((\mathcal{F}_t), P)$ martingale locale, nulle en zéro, purement discontinue, dont l'amplitude des sauts est identiquement égale à 1, ce qui entraîne en particulier que les instants de saut sont totalement inaccessibles. Les sauts de M étant uniformément bornés, M est localement bornée et $A = \langle M \rangle$ est bien défini. Rappelons que, dans cette situation, on a

$$M_t = N_t - A_t, \quad \text{où } N_t = \sum_{s \leq t} 1_{(\Delta M_s \neq 0)}.$$

Pour simplifier, on supposera encore que $A_\infty = \infty$ P-p.s.

L'analogie, dans ce cadre, du théorème de Dambis et Dubins-Schwarz est dû à S. Watanabe [13] (voir aussi Brémaud [2]), et s'énonce ainsi : si

$$\tau_t = \inf \{s/A_s > t\} \quad (t \geq 0),$$

le processus K_t , égal par définition à N_{τ_t} , est un processus de Poisson.

Pour poursuivre l'analogie avec le cas continu, on dira encore que M est pure si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

$$(II_d) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot \mathcal{F}^{(M)}_\infty = \mathcal{F}^{(K)}_\infty \\ \cdot \text{pour tout } t, A_t = \langle M \rangle_t \text{ est } \mathcal{F}^{(K)}_\infty\text{-mesurable} \\ \cdot \text{pour tout } t, \tau_t \text{ est } \mathcal{F}^{(K)}_\infty\text{-mesurable} \\ \cdot \text{pour tout } t, \mathcal{F}^{(M)}_{\tau_t} = \mathcal{F}^{(K)}_t. \end{array} \right.$$

Le théorème 3 montre toutefois que l'analogie entre les situations présentées en 1.2) et 1.3) s'arrête là.

1.4) On a montré en [1] que si $L^1(\mathcal{F}_\infty, P)$ est séparable (autrement dit : si \mathcal{F}_∞ ne diffère d'une tribu séparable que par des ensembles (\mathcal{F}_∞, P) négligeables ; on dira, par la suite, d'une telle tribu qu'elle est p.s. séparable), et s'il existe un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien (ou un (\mathcal{F}_t) -processus de Poisson), alors (\mathcal{F}_t) est la filtration naturelle d'une martingale réelle M , c'est à dire $\mathcal{F}^{(M)}_t = \mathcal{F}_t$. La proposition-clé de la deuxième partie et son corollaire nous permettront (voir le théorème 2) d'étendre cette propriété à d'autres cas. Pour travailler dans un cadre assez général, nous avons fait appel à la notion de bon ordre et à la récurrence transfinie, mais l'application de cette proposition à la troisième partie n'utilise que le cas des suites croissantes de temps d'arrêt tendant vers l'infini .

2. Martingales purement discontinues et filtrations localement constantes.

2.1) Dans cette seconde partie, la probabilité P est fixée et toutes les propriétés de mesurabilité seront, sauf spécification contraire, relatives à une filtration (\mathcal{F}_t) qui, outre les conditions habituelles rappelées en 1.1, satisfait à l'hypothèse suivante :

$$(BO) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{toutes les martingales sont purement discontinues} \\ \cdot \text{il existe un ensemble optionnel } D \text{ à coupes bien-ordonnées} \\ \quad \text{dans } \mathbb{R}_+, \text{ qui épuise les sauts de toutes les martingales, à une} \\ \quad \text{indistinguabilité près.} \end{array} \right.$$

On ne considère ici que les versions continues à droite des martingales. En reprenant les notations du chapitre 0 de [5], nous allons utiliser l'ensemble I (non dénombrable) des ordinaux dénombrables, dont on rappelle que :

- il est bien-ordonné
- pour tout $\alpha \in I$, l'ensemble des $\beta \in I$, tels que $\beta < \alpha$ est

dénombrable

- . il est composé de 0, des ordinaux avec précédent du type $\alpha+1$,
- et des ordinaux limites α , sans précédent, pour lesquels il existe une suite $\alpha_n \in I$, avec $\alpha_n < \alpha$, telle que $\alpha = \sup \alpha_n$.

En raisonnant par récurrence transfinie comme en [7], on peut associer à chaque $\alpha \in I$ un temps d'arrêt T_α en posant

- . $T_0 = 0$
- . $T_{\alpha+1}(\omega) = \inf \{t > T_\alpha(\omega) / (\omega, t) \in D\}$
- . $T_\beta = \sup_{\alpha < \beta} T_\alpha$ si β est un ordinal limite.

Notons que, dans ce dernier cas, T_β est un temps d'arrêt prévisible puisque si $\alpha_n \rightarrow \beta$ en croissant et $\alpha_n < \beta$, on a $T_{\alpha_n} < T_\beta$ sur $(T_\beta < \infty)$ et $T_\beta = \lim_n T_{\alpha_n}$.

Cette famille $(T_\alpha, \alpha \in I)$ vérifie les deux propriétés suivantes :

- $T_\alpha < T_\beta$ sur $(T_\beta < +\infty)$ si $\alpha < \beta$
- $D \subset \bigcup_{\alpha \in I} [[T_\alpha]]$.

2.2) On connaît bien, dans ce cas, la structure de la filtration (\mathcal{F}_t) , grâce au résultat suivant.

Proposition. Sous l'hypothèse (B0),

- 1) $\mathcal{F}_\infty = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{F}_{T_\alpha}$
- 2) pour tout temps d'arrêt T et tout $\alpha \in I$,
 $\mathcal{F}_T \cap (T_\alpha \leq T < T_{\alpha+1}) = \mathcal{F}_{T_\alpha} \cap (T_\alpha \leq T < T_{\alpha+1}),$
- 3) pour tout $\alpha \in I$
 $\mathcal{F}_{(T_{\alpha+1})^-} = \mathcal{F}_{T_\alpha} \vee \sigma(T_{\alpha+1}).$

Démonstration. 1) Puisque toute suite dans I admet une borne supérieure dans I, il est immédiat que $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{F}_{T_\alpha}$ est une tribu. Si $A_\infty \in \mathcal{F}_\infty$, on considère la martingale

(continue à droite) $P(A_\infty | \mathcal{F}_s) - P(A_\infty | \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{F}_{T_\alpha} | \mathcal{F}_s).$

Elle est purement discontinue et nulle sur $[[0, T_\alpha]]$, donc continue en T_α pour tout $\alpha \in I$; de ce fait elle n'a pas de discontinuités et est nulle partout. Cela montre que $A_\infty \in \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{F}_{T_\alpha}$.

2) Soient T un temps d'arrêt, A_T un élément de \mathcal{F}_T et $\alpha \in I$. Posons

$$A = A_T \cap (T_\alpha \leq T < T_{\alpha+1})$$

$$L_s = P(A | \mathcal{F}_s).$$

Puisque $A \in \mathcal{F}_{T_{\alpha+1}}$, la martingale (L_s) est constante et vaut 1_A à partir de $T \wedge T_{\alpha+1}$.

Ainsi, la martingale purement discontinue

$$L_s - L_{s \wedge T_\alpha}$$

admet un seul instant de saut $T_{\alpha+1}$, ce qui permet d'écrire

$$(*) \quad L_s = L_{s \wedge T_\alpha} + \Delta L_{T_{\alpha+1}} 1_{(T_{\alpha+1} \leq s)} - B_s,$$

où (B_s) désigne le compensateur prévisible de $(\Delta L_{T_{\alpha+1}} 1_{(T_{\alpha+1} \leq s)})$. Etudions le

signe de la variable $\Delta L_{T_{\alpha+1}}$:

- sur l'ensemble $A \subset (T < T_{\alpha+1})$, la martingale (L_s) est identiquement égale à 1 pour

$s > T$, donc $\Delta L_{T_{\alpha+1}} = 0$;

- sur l'ensemble A^c , $L_{T_{\alpha+1}} = 1_A = 0$, et comme L est une martingale positive,

$$\Delta L_{T_{\alpha+1}} < 0.$$

Ainsi, $\Delta L_{T_{\alpha+1}} < 0$ p.s., donc le processus (B_s) est à valeurs négatives.

Sur l'ensemble $A^c \cap (T < T_{\alpha+1})$, l'égalité (*) devient, pour $s=T$:

$$L_T = 1_A = 0 = P(A | \mathcal{F}_T \wedge T_\alpha) - B_T > P(A | \mathcal{F}_T \wedge T_\alpha), \quad (1)$$

et cela entraîne

$$A^c \cap (T < T_{\alpha+1}) \subset \{P(A | \mathcal{F}_T \wedge T_\alpha) = 0\}.$$

Mais on sait que

$$\{P(A | \mathcal{F}_T \wedge T_\alpha) = 0\} \subset A^c$$

et par conséquent

$$A^c \cap (T < T_\alpha) = \{P(A | \mathcal{F}_T \wedge T_\alpha) = 0\} \cap (T < T_{\alpha+1})$$

ou encore

$$\begin{aligned} A &= A \cap (T < T_{\alpha+1}) \cap (T_\alpha \leq T) \\ &= \{P(A | \mathcal{F}_T \wedge T_\alpha) > 0\} \cap (T < T_{\alpha+1}) \cap (T_\alpha \leq T), \end{aligned}$$

(1) Les inclusions et / ou égalités ci-dessus, sont, bien entendu, vérifiées à un ensemble négligeable près.

ce qui montre que

$$A_T \cap (T_\alpha < T < T_{\alpha+1}) = \{P(A | \mathcal{F}_{T_\alpha}^-) > 0\} \cap (T_\alpha < T < T_{\alpha+1}).$$

3) Il est clair que $\mathcal{F}_{T_\alpha}^- \vee \sigma(T_{\alpha+1}) \subset \mathcal{F}_{(T_{\alpha+1})}^-$. Inversement, comme

$$\mathcal{F}_{(T_{\alpha+1})}^- = \mathcal{F}_0^- \vee \bigvee_{t>0} (\mathcal{F}_t^- \cap (t < T_{\alpha+1})),$$

on vérifie que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t^- \cap (t < T_{\alpha+1}) &= \sum_{\beta < \alpha} \mathcal{F}_t^- \cap (T_\beta < t < T_{\beta+1}) \\ &= \sum_{\beta < \alpha} \mathcal{F}_{T_\beta}^- \cap (T_\beta < t < T_{\beta+1}) \quad \text{d'après 2)} \\ &\subset \mathcal{F}_{T_\alpha}^- \vee \sigma(T_{\alpha+1}). \quad \square \end{aligned}$$

Remarque. Associons à tout temps d'arrêt T la variable positive

$$\begin{aligned} T'(\omega) &= \sup \{t \leq T(\omega) / (\omega, t) \in D\} \quad \text{si } T(\omega) < \infty \\ &= +\infty \quad \text{si } T(\omega) = +\infty. \end{aligned}$$

La variable T' n'est pas en général un temps d'arrêt. Toutefois, l'égalité 2) de la proposition peut être condensée en

$$\mathcal{F}_T^- \cap (T < \infty) = \sigma(Z_T, 1_{(T' < \infty)} / Z \text{ processus optionnel}) \cap (T' < \infty).$$

Cette relation a encore un sens si D n'a plus ses coupes bien-ordonnées.

Reste-t-elle encore vraie ?

2.3) Corollaire. Supposons que (\mathcal{F}_t^-) vérifie l'hypothèse (BO). Soit (\mathcal{G}_t^-) une sous-filtration de (\mathcal{F}_t^-) , c'est-à-dire une filtration continue à droite, (\mathcal{F}, P) -complète et telle que pour tout t , $\mathcal{G}_t^- \subset \mathcal{F}_t^-$. Si les $(T_\alpha, \alpha \in I)$ sont également des (\mathcal{G}_t^-) -temps d'arrêt, une condition suffisante (et évidemment nécessaire) pour que $\mathcal{F}_t^- = \mathcal{G}_t^-$, pour tout t , est que

$$\mathcal{F}_{T_\alpha}^- \cap (T_\alpha < \infty) = \mathcal{G}_{T_\alpha}^- \cap (T_\alpha < \infty) \quad \text{pour tout } \alpha \in I.$$

Démonstration. Supposons donc vérifiée la relation ci-dessus. Si $t > 0$ et si $A \in \mathcal{F}_t^-$, d'après le 1) de la proposition, il existe $\gamma \in I$ tel que $A \in \mathcal{F}_{T_\gamma}^-$, et alors

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{\alpha < \gamma} A \cap (T_\alpha < t \wedge T_\gamma < T_{\alpha+1}) \\ &= \bigcup_{\alpha < \gamma} A_\alpha \cap (T_\alpha < t \wedge T_\gamma < T_{\alpha+1}) \quad \text{avec } A_\alpha \in \mathcal{F}_{T_\alpha}^- \text{ et } A_\alpha \subset (T_\alpha < \infty) \\ &\in \mathcal{G}_{t \wedge T_\gamma}^-. \quad \square \end{aligned}$$

2.4) Nous allons maintenant appliquer la proposition et son corollaire à des questions d'engendrement de filtrations (cf. [1]). Pour cela nous aurons besoin d'un lemme sur les espérances conditionnelles.

Lemme. Soit \mathcal{A} une tribu p.s. séparable, et soit \mathcal{B} une sous-tribu de \mathcal{A} . Si C désigne la borne essentielle supérieure des éléments de \mathcal{B} sur lesquels les restrictions de \mathcal{A} et de \mathcal{B} coïncident p.s., il existe une variable X positive et bornée, engendrant p.s. la tribu \mathcal{A} , telle que

$$\{X = E(X|\mathcal{B})\} = C \quad \text{p.s.}$$

Démonstration. Soit X_0 une variable aléatoire positive, bornée par $K > 0$, engendrant p.s. la tribu \mathcal{A} . Considérons alors

$$A = \{X_0 = E(X_0|\mathcal{B})\}.$$

Si $B = \{P(A|\mathcal{B})=1\}$, l'ensemble B est \mathcal{B} -mesurable et contenu dans A , donc $X_0 = E(X_0|\mathcal{B})$ sur B , ce qui montre que les tribus \mathcal{A} et \mathcal{B} coïncident p.s. sur B , et ainsi $B \subset C$. Il en résulte que

$$1_A - P(A|\mathcal{B}) > 0 \quad \text{p.s.} \quad \text{sur } A \setminus C.$$

Si l'on pose pour tout $\lambda \in]K, 2K]$

$$X_\lambda = X_0 + \lambda 1_A$$

et

$$\Omega_\lambda = \{X_\lambda = E(X_\lambda|\mathcal{B})\} \setminus C,$$

les ensembles Ω_λ sont disjoints, et cela entraîne l'existence d'un $\mu \in]K, 2K]$ tel que $P(\Omega_\mu) = 0$. Il est clair que $0 \leq X_\mu \leq 3K$ et que $\sigma(X_\mu) = \mathcal{A}$ p.s. \square

2.5) Revenons aux filtrations localement constantes.

Théorème 2. Supposons que (\mathcal{F}_t) vérifie l'hypothèse (BO) avec de plus \mathcal{F}_∞ p.s. séparable. Il existe alors une (\mathcal{F}_t) -martingale M telle que pour tout t

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t(M).$$

Démonstration. i) Montrons, pour commencer, que la partie accessible T_α^a de chaque T_α est prévisible. Evidemment, $T_0 = 0$ est prévisible. De même, si α est un ordinal limite,

T_α est prévisible par construction. Supposons donc que α ait un précédent β . On sait qu'il existe une suite $(T_\alpha^n, n \geq 0)$ de temps d'arrêt prévisibles telle que

$$[[T_\alpha^a]] \subset \bigcup_n [[T_\alpha^n]].$$

Puisque le graphe $[[T_\alpha^a]]$ est contenu dans l'ensemble prévisible $]]T_\beta, +\infty[[$, on peut supposer que

$$\bigcup_n [[T_\alpha^n]] \subset]T_\beta, +\infty[.$$

Pour $n \geq 0$, on considère la martingale

$$N_t^n = \begin{pmatrix} 1 & -P(T_\alpha > T_\alpha^n | \mathcal{F}_{(T_\alpha^n)^-}) \\ (T_\alpha > T_\alpha^n) & (T_\alpha \leq t) \end{pmatrix}.$$

Comme elle n'a pas de saut dans $]]T_\beta, T_\alpha[[$, nous avons

$$P(T_\alpha > T_\alpha^n | \mathcal{F}_{(T_\alpha^n)^-}) = 1 \text{ sur } (T_\alpha > T_\alpha^n),$$

donc $(T_\alpha > T_\alpha^n) \in \mathcal{F}_{(T_\alpha^n)^-}$. On peut ainsi restreindre T_α^n à $(T_\alpha \leq T_\alpha^n)$, donc supposer

$T_\alpha \leq T_\alpha^n$, et ceci pour tout $n \geq 0$. Mais alors $[[T_\alpha^a]]$ est égal à l'ensemble prévisible

$$\bigcup_n]T_\alpha^n, +\infty[\setminus]T_\alpha, +\infty[,$$

ce qui prouve que T_α^a est un temps d'arrêt prévisible.

ii) Remarquons tout d'abord que la séparabilité p.s. de \mathcal{F}_∞ (c'est-à-dire l'égalité

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma(A_n, n \geq 0) \vee \mathcal{N}$$

où \mathcal{N} désigne les ensembles négligeables, (A_n) une suite d'éléments de \mathcal{F}_∞) entraîne l'existence d'un $\gamma \in I$ tel que $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_{T_\gamma}$. Construisons maintenant une famille au plus

dénombrable de variables aléatoires $(U_\alpha, \alpha \leq \gamma)$ de la façon suivante.

Si $\alpha=0$, on choisit U_0 bornée par un nombre c_0 telle que $\sigma(U_0) = \mathcal{F}_0$ p.s.

Si α est un ordinal limite, on choisit encore U_α bornée par un nombre c_α telle que $\sigma(U_\alpha) = \mathcal{F}_{T_\alpha}$ p.s.

Si α admet un précédent, remarquons que sur l'ensemble C_α borne essentielle supérieure des ensembles $\mathcal{F}_{(T_\alpha^a)^-}$ -mesurables contenus dans $(T_\alpha^a < +\infty)$ sur lesquels

$\mathcal{F}_{T_\alpha^a}$ et $\mathcal{F}_{(T_\alpha^a)^-}$ coïncident, nécessairement aucune martingale ne pourra avoir de saut

à l'instant T_α^a ; on peut donc exclure de D et du graphe de T_α^a l'ensemble

$$\{(\omega, t) / \omega \in C_\alpha, t = T_\alpha^a(\omega)\}.$$

D'après le lemme, on peut alors choisir sur l'ensemble $(T_\alpha^a < +\infty)$ une variable U_α bornée par un nombre c_α et vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \mathcal{F}_{T_\alpha^a} \cap (T_\alpha^a < +\infty) = \sigma(U_\alpha) \cap (T_\alpha^a < +\infty) \quad \text{p.s.} \\ \cdot U_\alpha - E(U_\alpha | \mathcal{F}_{(T_\alpha^a)^-}) \neq 0 \quad \text{p.s.} \quad \text{sur } (T_\alpha^a < +\infty). \end{array} \right.$$

Complétons ce choix en prenant pour U_α , sur $(T_\alpha^a = +\infty)$, une variable aléatoire à valeurs dans $]c_\alpha, 2c_\alpha]$ qui engendre p.s. la restriction de $\mathcal{F}_{T_\alpha^a}$ à $(T_\alpha^a = +\infty)$. Si l'on a pris soin de choisir les c_α de sorte que $\sum_{\alpha < \gamma} c_\alpha^2 < +\infty$, le processus

$$M_t = U_0 + \sum_{0 < \alpha < \gamma} (U_\alpha 1_{(T_\alpha \leq t)} - A_t^\alpha),$$

où (A_t^α) désigne le compensateur prévisible de $(U_\alpha 1_{(T_\alpha \leq t)})$, est une martingale de carré intégrable.

Notons $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}(M)_t$ et montrons que $\mathcal{G}_{T_\alpha} = \mathcal{F}_{T_\alpha}$ pour tout $\alpha < \gamma$. Nous aurons alors

$$\mathcal{G}_{T_\alpha} = \mathcal{F}_{T_\alpha} \text{ pour tout } \alpha \in I \text{ puisque}$$

$$\mathcal{G}_{T_\beta} = \mathcal{F}_{T_\beta} = \mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_{T_\beta} \quad \text{pour tout } \beta > \gamma,$$

et le corollaire nous donnera l'égalité $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t$ désirée.

Clairement, $\mathcal{G}_0 = \mathcal{F}_0$.

Si α est un ordinal limite, supposons que pour tout $\beta < \alpha$, T_β soit un (\mathcal{G}_t) -temps d'arrêt et que $\mathcal{G}_{T_\beta} = \mathcal{F}_{T_\beta}$. Par construction, $T_\alpha = \lim_n T_{\alpha_n}$ où $\alpha_n \rightarrow \alpha$,

$\alpha_n < \alpha$ et $T_{\alpha_n} < T_\alpha$ sur $(T_\alpha < +\infty)$. Il en résulte que T_α est un (\mathcal{G}_t) -temps d'arrêt

prévisible et que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(T_\alpha)^-} &= \vee_n \mathcal{F}_{T_{\alpha_n}} \\ &= \vee_n \mathcal{G}_{T_{\alpha_n}} \\ &= \mathcal{G}_{(T_\alpha)^-}, \end{aligned}$$

tandis que de

$$\Delta M_{T_\alpha} = (U_\alpha - E(U_\alpha | \mathcal{F}_{(T_\alpha)^-})) 1_{(T_\alpha < +\infty)}$$

on déduit :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{T_\alpha} &= \sigma(U_\alpha) \\ &\subset \sigma(\Delta M_{T_\alpha}) \vee \mathcal{F}_{(T_\alpha)^-} \\ &\subset \mathcal{G}_{T_\alpha}. \end{aligned}$$

Enfin, si $\alpha = \beta + 1$, supposons que T_β soit un (\mathcal{G}_t) -temps d'arrêt et que

$$\mathcal{G}_{T_\beta} = \mathcal{F}_{T_\beta}. \text{ D'après le choix de } U_\alpha,$$

$$T_\alpha = \inf \{t > T_\beta / \Delta M_t \neq 0\}$$

puisque

$$\begin{aligned} \Delta M_{T_\alpha} &= U_\alpha - E(U_\alpha | \mathcal{F}_{(T_\alpha)^-}) \neq 0 \quad \text{p.s. sur } (T_\alpha^a < +\infty) \\ &= U_\alpha > 0 \quad \text{p.s. sur } (T_\alpha < +\infty) \cap (T_\alpha^a = +\infty) \\ &= 0 \quad \text{p.s. sur } (T_\alpha = +\infty). \end{aligned}$$

Il en résulte que T_α est un (\mathcal{G}_t) -temps d'arrêt. En outre

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{T_\alpha} &= \sigma(U_\alpha) \\ &\subset \sigma(\Delta M_{T_\alpha}) \vee \mathcal{F}_{(T_\alpha)^-} \\ &= \sigma(\Delta M_{T_\alpha}, T_\alpha) \vee \mathcal{F}_{T_\beta} \quad \text{d'après le 3) de la proposition} \\ &= \sigma(\Delta M_{T_\alpha}, T_\alpha) \vee \mathcal{G}_{T_\beta} \\ &\subset \mathcal{G}_{T_\alpha}. \end{aligned}$$

Le principe de récurrence transfinie permet de conclure que $\mathcal{G}_{T_\alpha} = \mathcal{F}_{T_\alpha}$ pour tout $\alpha \in I$. \square

3. Extrémalité de certaines martingales purement discontinues.

3.1) Nous travaillons à nouveau dans le cadre général défini en 1.1). Nous aurons besoin des définitions suivantes, empruntées à N. Kazamaki [11].

- On appelle (\mathcal{F}_t) -changement de temps tout processus $R = (r_t)$, croissant, continu à droite, à valeurs finies, tel que, pour tout r , r_t soit un (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt ;
- un (\mathcal{F}_t) -changement de temps $T = (r_t)$ est dit M-continu si le processus M est

constant sur tous les intervalles $[r_{t-}, r_t]$ ($t \geq 0$; $r_{0-} = 0$).

On montre aisément dans ce cas que si M est une $(\mathcal{F}_t), P$ -martingale locale, (M_{r_t}) est une $(\mathcal{F}_{r_t}), P$ -martingale locale ; si de plus M vérifie les conditions énoncées en 1.3), (M_{r_t}) les vérifie également, relativement à (\mathcal{F}_{r_t}) .

3.2) Nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème 3. Soit (M_t) une $(\mathcal{F}_t), P$ -martingale locale, nulle en 0, de sauts d'amplitude 1 et telle que $\langle M \rangle_{\infty} < \infty$ P-p.s. On note $N_t = \sum_{s \leq t} \Delta M_s$. Les assertions

suivantes sont équivalentes :

- (j) M est (\mathcal{F}_t) -extrémale
- (jj) pour tout t , $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(N)_t$
- (jjj) si (τ_t) désigne l'inverse à droite de $A_t = \langle M \rangle_t$ et si $K_t = N_{\tau_t}$, alors, pour tout t , $\mathcal{F}_{\tau_t} = \mathcal{F}(K)_t$.
- (jv) pour tout changement de temps (r_t) M -continu tel que $r_{\infty} = +\infty$ P-p.s., (M_{r_t}) est (\mathcal{F}_{r_t}) -extrémale.

Démonstration.

(jj) \Rightarrow (j) De nombreux auteurs ([8],[4],[3]) ont montré que si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(N)_t$ pour tout $t \geq 0$, alors M a la propriété de représentation prévisible pour (\mathcal{F}_t) , c'est-à-dire la propriété (ii) du théorème 1, qui est équivalente à la propriété (i). D'où (j).

(j) \Rightarrow (jj). Remarquons tout d'abord que l'hypothèse entraîne que \mathcal{F}_0 est P -triviale (on peut aussi utiliser le théorème 1). Notons $T_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, T_n le n -ième temps de saut de N (ou de M). Soit $A \in \mathcal{F}_{T_n}$ pour $n \geq 1$. D'après la propriété de représentation prévisible, équivalente à (j), on peut associer à la martingale $(P(A|\mathcal{F}_t))$ un processus h (\mathcal{F}_t) -prévisible et convenablement intégrable tel que

$$P(A|\mathcal{F}_t) = P(A) + \int_0^t h_s dM_s,$$

ce qui donne, en $t=T_n$:

$$I_A = P(A) + \sum_{k=1}^n h_{T_k} I_{(T_k < +\infty)} - \int_0^{T_n} h_s dA_s.$$

Tous les termes du second membre sont $\mathcal{F}_{(T_n)^-}$ -mesurables, ce qui prouve que

$\mathcal{F}_{T_n} = \mathcal{F}_{(T_n)^-}$ pour tout $n \geq 1$. L'hypothèse (B0) est vérifiée, puisque, à l'aide de la propriété de représentation prévisible, les (\mathcal{F}_t) -martingales n'ont de sauts qu'aux instants (T_n) . La partie 3) de la proposition montre donc que

$$\mathcal{F}_{T_n} = \sigma(T_1, \dots, T_n) = \mathcal{F}^{(N)}_{T_n} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

On déduit alors (jj) du corollaire.

(j) \Rightarrow (jjj). D'après l'hypothèse, pour toute variable $X \in L^2(\mathcal{F}_\infty, P)$, il existe un processus (\mathcal{F}_t) -prévisible ψ tel que

$$X = E(X) + \int_0^\infty \psi(s) dM_s \quad \text{avec } E\left(\int_0^\infty \psi^2(s) dA_s\right) < \infty.$$

D'après le théorème (10.19), p. 318, du livre [9] de Jacod, on peut écrire

$$X = E(X) + \int_0^\infty \psi(\tau_{s-}) d(K_s - s),$$

et donc $(K_t - t)$ est (\mathcal{F}_t) -extrémale. L'équivalence de (j) et de (jj) prouvée précédemment entraîne alors $\mathcal{F}_{\tau_t} = \mathcal{F}^{(K)}_t$ pour tout t .

(jjj) \Rightarrow (j). Utilisons les notations du théorème 1. Soient $P_1, P_2 \in \mathcal{M}$ et $\alpha \in]0, 1[$ tels que $P = \alpha P_1 + (1-\alpha)P_2$. Les probabilités $P_i (i=1,2)$ étant absolument continues par rapport à P , $P'_i = \frac{P+P_i}{2}$ est équivalente à P , et appartient à \mathcal{M} . D'autre part, (K_t) est un processus de Poisson sous P et sous P'_i . Mais comme $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}^{(K)}_\infty$ sous P (et par équivalence sous P'_i), on a nécessairement $P'_i = P$, ou encore $P_i = P$, ce qui veut dire que (M_t) est (\mathcal{F}_t) -extrémale.

(jv) \Rightarrow (j). Il suffit de prendre $r_t = t$.

(j) \Rightarrow (jv). Cela découle du changement de temps dans les intégrales stochastiques, déjà utilisé pour montrer (j) \Rightarrow (jjj). \square

3.3) Terminons par deux remarques à ce théorème.

- Comme cas particulièrement important de l'implication (j) \Rightarrow (jj), notons que si (N_t) est un (\mathcal{F}_t) -processus de Poisson tel que toute (\mathcal{F}_t) -martingale s'écrive comme intégrale stochastique par rapport à (N_t-t) , alors $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{(N)_t}$ pour tout t.

- La propriété (jjj) est identique à l'énoncé d'une des conditions équivalentes de (Π_d) définissant la notion de pureté pour ce type de martingales. L'équivalence (j) \Leftrightarrow (jjj) signifie que dans ce cas, extrémalité \Leftrightarrow pureté, contrairement à ce qui se passe pour les martingales continues. Remarquons en outre que si M est (\mathcal{F}_t) -extrémale, on a alors $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{(M)_t}$, puisque, d'après (jj) : $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{(N)_t} \subset \mathcal{F}_{(M)_t}$.

Références

- [1]. J. Auerhan, D. Lépingle, M. Yor : Construction d'une martingale réelle continue de filtration naturelle donnée. Séminaire de Probabilités XIV. Lecture Notes in Math. 784. Springer Verlag 1980.
- [2]. P. Brémaud : An extension of Watanabe's theorem of characterization of Poisson processes. J. App. Proba. 12, 396-399, 1975.
- [3]. C.S. Chou, P.A. Meyer : La représentation des martingales relatives à un processus ponctuel discret. CRAS (A) 278, 1561-1563, 1974.
- [4]. M.H.A. Davis : The representation of martingales of a jump process. S.I.A.M. J. of Control, 14, 623-638, 1976.
- [5]. C. Dellacherie, P.A. Meyer : Probabilités et potentiel. Ch I à IV. Hermann 1975.
- [6]. L. Dubins, G. Schwarz : On extremal martingale distributions. Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Proba. II, part I, 295-299, 1967.
- [7]. R.J. Elliott. Stochastic integrals for martingales of a jump process with partially accessible jump times. Z. für Wahr., 36, 213-226, 1976.
- [8]. J. Jacod : Multivariate point processes : predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales. Z. für Wahr, 31, 235-253, 1975.
- [9]. J. Jacod : Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lect. Notes in Math. 714. Springer Verlag 1979.
- [10]. J. Jacod, M. Yor : Etude des solutions extrémales et représentation intégrale des solutions pour certains problèmes de martingales. Z. für Wahr, 38, 83-125, 1977.
- [11]. N. Kazamaki : Change of time, stochastic integrals and weak martingales. Z. für Wahr., 22, 25-32, 1972.
- [12]. D. Stroock, M. Yor : On extremal solutions of martingale problems. Ann. ENS, 4^{ième} Série, t. 13, 95-164, 1980
- [13]. S. Watanabe : On discontinuous additive functionals and Lévy measures of a Markov process. Japan J. Math., 34, 53-79, 1964.
- [14]. M. Yor : Sur l'étude des martingales continues extrémales. Stochastics, 2, 191-196, 1979.