SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PHOTIS NOBELIS

Fonctions aléatoires lipschitziennes

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 38-43
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__38_0>

UNIVERSITE de STRASBOURG
Séminaire de Probabilités

Juin 1980

FONCTIONS ALEATOIRES LIPSCHITZIENNES

par

Ph. NOBELIS

Dans cette note, on donne une condition suffisante pour que presque toutes les trajectoires d'une fonction aléatoire, définie sur $[0,1]^N$, soient lipschitziennes. La méthode utilisée est celle des "mesures majorantes" ([1],[5]). Elle permet d'étendre la condition obtenue par I. IBRAGIMOV ([2]) à toutes les fonctions de Young.

Soit X une fonction aléatoire définie sur un espace d'épreuves $(\Omega,\mathcal{G},P)$, $\mathcal{G}$ étant P-complète, et sur $([0,1]^N,\mathcal{B},\lambda)$, N étant un entier supérieur à 1, $\mathcal{B}$ la tribu des boréliens et λ la mesure de Lebesgue. De plus, on suppose que X est séparable et $\mathcal{G}\otimes\mathcal{B}$ - mesurable. Pour tout $u \in [0,1]$ et toute fonction de Young Φ , on note

$$Q\ (u) = \inf \{\alpha > 0 : \iint_{\{\|s-t\|<u\}} E\Phi[\frac{1}{\alpha}\ |X(s)-X(t)|]\ ds\,dt < 1\}\ ,$$

où $\|s-t\| = \operatorname{Max}\{|s_i - t_i| : i = 1,\dots,N\}$. Quand $Q(u)$ est finie, c'est la Φ-norme de Luxemberg des accroissements de X , elle est positive, croissante et la quantité

$$\tilde{X}(u) = \iint_{\{\|s-t\|<u\}} \Phi[\frac{|X(s)-X(t)|}{Q(u)}]ds\ dt$$

est une variable aléatoire dont l'espérance est majorée par 1 .

Pour toute fonction φ définie sur R^+ , s'annulant en 0 et croissante, on dira que la trajectoire $X(\omega,.)$ est φ-lipschitzienne s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\epsilon > 0$ on ait :

$$\sup_{0<\|s-t\|<\varepsilon} \frac{|X(s)-X(t)|}{\varphi(c\|s-t\|)} < \infty .$$

Le résultat essentiel de cette note est le suivant :

THEOREME. Soit φ une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, s'annulant en 0 et croissante ; une condition suffisante pour que presque toutes les trajectoires de X soient φ-lipschitziennes est qu'il existe une fonction de Young Φ telle que :

$$\int_0 Q(u)\Phi^{-1}\left(\frac{1}{u^{2N}}\right)\frac{1}{u\varphi(u)}\, du < \infty$$

Dans ces conditions, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$E\left[\sup_{0<\|s-t\|<\varepsilon} \frac{|X(s)-X(t)|}{\varphi(12\|s-t\|)}\right] \le 6^{2N+3} \int_0^{\varepsilon} Q(u)\Phi^{-1}\left(\frac{1}{u^{2N}}\right)\frac{1}{u\varphi(u)}\, du .$$

Démonstration : Pour tout $t \in [0,1]^N$ et tout entier $n \geq 0$, on note $B_n(t)$ la boule ouverte de centre t et de rayon 2^{-n} et $\lambda_n(t)$ sa mesure ; on a $2^{-nN} \le \lambda_n(t) \le 2^{-(n-1)N}$. Si l'intégrale précédente converge, on en déduit

$$\int_0 Q(u)\Phi^{-1}\left(\frac{1}{u^{2N}}\right)\frac{du}{u} < \infty ;$$

on sait alors, par la méthode des mesures majorantes, que presque toutes les trajectoires de X sont continues, et, dans ces conditions, si

$$X_n(t) = \frac{1}{\lambda_n(t)} \int_{B_n(t)} X(u)\, du ,$$

il existe une partie Ω_0 de Ω, avec $P(\Omega_0) = 1$, telle que pour tout $\omega \in \Omega_0$, $\lim_{n\to\infty} X_n(t) = X(t)$, pour tout $t \in [0,1]^N$. Soient $\omega \in \Omega_0$, q un entier positif et $c > 0$ une constante fixés ; alors pour tous s,t tels que $2^{-(q+1)} \le \|s-t\| < 2^{-q}$, on a :

$$|X(s)-X(t)| \le \sum_{n\geq q} |X_{n+1}(s)-X_n(s)| + |X_q(s)-X_q(t)| + \sum_{n\geq q} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| .$$

Pour tout entier $n \geq q$, on a :

$$|X_{n+1}(s)-X_n(s)| \leq \frac{1}{\lambda_n(s)\lambda_{n+1}(s)} \iint_{B_n(s)\times B_{n+1}(s)} |X(u)-X(v)|dudv ,$$

$$\leq \frac{Q(3.2^{-(n+1)})}{\lambda_n(s)\lambda_{n+1}(s)} \iint_{B_n(s)\times B_{n+1}(s)} \Phi^{-1}\circ\Phi\left(\frac{|X(u)-X(v)|}{Q(3.2^{-(n+1)})}\right)dudv ,$$

$$\leq Q(3.2^{-(n+1)})\ \Phi^{-1}\left[\ 2^{(2n+1)N}\,\tilde{X}(3.2^{-(n+1)})\ \right] ,$$

où l'on a utilisé successivement le fait que Φ^{-1} est concave, que $B_n(s)\times B_{n+1}(s) \subset \{\|u-v\| \leq 3.2^{-(n+1)}\}$ et la définition de $\tilde{X}(u)$ et de $\lambda_n(s)$. Le majorant ne dépend pas de s ; le même calcul nous montre qu'il majore également $|X_n(t)-X_{n+1}(t)|$. L'ensemble $B_q(s)\times B_q(t)$ étant inclus dans $\{\|u-v\| \leq 3.2^{-q}\}$, un raisonnement identique nous permet de majorer $|X_q(s)-X_q(t)|$. D'où, pour s,t tels que $2^{-(q+1)} \leq \|s-t\| < 2^{-q}$, on en déduit

$$|X(s)-X(t)| \leq 2 \sum_{n\geq q} Q(3.2^{-n})\Phi^{-1}(2^{2nN}\,\tilde{X}(3.2^{-n})) .$$

De la croissance de φ nous obtenons :

$$\sup_{2^{-(q+1)}\leq\|s-t\|<2^{-q}} \frac{|X(s)-X(t)|}{\varphi(c\|s-t\|)} \leq 2 \sum_{n\geq q} \frac{Q(3.2^{n})}{\varphi(c2^{-(n+1)})}\,\Phi^{-1}(2^{2nN}\,\tilde{X}(3.2^{-n})) .$$

Pour $\epsilon > 0$ donné, considérons l'entier q_o tel que $2^{-(q_o+1)} \leq \epsilon < 2^{-q_o}$. En prenant l'espérance, la concavité de Φ^{-1} et les propriétés de $\tilde{X}$ nous donnent :

$$E\left(\sup_{o<\|s-t\|<\epsilon} \frac{|X(s)-X(t)|}{\varphi(c\|s-t\|)}\right) \leq E\left(\sup_{q\geq q_o}\ \sup_{2^{-(q+1)}\leq\|s-t\|<2^{-q}} \frac{|X(s)-X(t)|}{\varphi(c\|s-t\|)}\right),$$

$$\leq 2 \sum_{n\geq q_o} \frac{Q(3.2^{-n})}{\varphi(c2^{-(n+1)})}\,\Phi^{-1}(2^{2nN}) .$$

Un calcul simple nous permet d'écrire la somme sous forme d'intégrale :

$$E\left(\sup_{o<\|s-t\|<\varepsilon} \frac{|X(s)-X(t)|}{\varphi(c\|s-t\|)}\right) \leq 4\int_o^{2^{-q_o+1}} Q(3u)\Phi^{-1}\left(\frac{2^{2N}}{4^{2N}}\right) \frac{1}{u\varphi(\frac{cu}{4})}\, du \,.$$

En prenant $c = 12$, le fait que $2^{-(q_o+1)} \leq \varepsilon < 2^{-q_o}$ et la sous-additivité de Φ^{-1} nous donnent le résultat annoncé .

Dans la suite, nous appliquons le théorème à une famille particulière de fonctions de Young, les fonctions puissances.

COROLLAIRE 1. <u>Une condition suffisante pour que presque toutes les trajectoires d'une fonction aléatoire soient</u> φ-<u>lipschitziennes, est qu'il existe un nombre réel</u> $p > 1$, <u>tel que</u> :

$$\int_o \left[\iint_{\{\|s-t\|<u\}} E|X(s)-X(t)|^p \, ds\, dt\right]^{1/p} \frac{1}{u^{1+\frac{2N}{p}}\varphi(u)}\, du < \infty$$

Il suffit de calculer $Q(u)$ pour $\Phi(x) = |x|^p$. Quand $\varphi \equiv 1$ nous retrouvons la condition suffisante de continuité de N. KÔNO ([4]) .

COROLLAIRE 2. <u>Si</u> f <u>est une fonction définie sur</u> R^+ <u>croissante, telle que pour tous</u> $s,t \in [0,1]^N$:

$$E|X(s)-X(t)|^p \leq f^p(\|s-t\|) \,,$$

<u>une condition suffisante pour que presque toutes les trajectoires de</u> X <u>soient</u> φ-<u>lipschitziennes est que</u>

$$\int_o \frac{f(u)}{\varphi(u)u^{1+\frac{u}{p}}}\, du < \infty \,.$$

En effet, un simple calcul donne $Q(u) \leq (2u)^N f(u)$. Le cas particulier $\varphi(u) = u^\alpha$ est le résultat de I. IBRAGIMOV ([2]) ; on remarquera que I. IBRAGIMOV a montré de plus, que si l'intégrale diverge, il existe alors une fonction aléatoire X vérifiant les hypothèses, telle que :

$$P\left(\sup_{s \neq t} \frac{|X(s)-X(t)|}{\|s-t\|^\alpha} = \infty \right) = 1 .$$

La méthode présentée ici ne peut se généraliser directement dans un espace quelconque ; on a utilisé, en effet, explicitement le fait que la mesure des boules ne dépend que du rayon de celles-ci. Notons que N. KÔNO ([3]) et G. PISIER ([6]) ont obtenu, pour des fonctions aléatoires définies sur $[0,1]^N$ et sur un espace compact métrisable, respectivement, et associées entre autres, à des fonctions de Young de type puissance, des conditions de régularité à partir de l'entropie.

REFERENCES

[1] FERNIQUE X. : Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. Lect. Notes Math., 480 (1975), pp. 1-96 .

[2] IBRAGIMOV I. : Sur la régularité des trajectoires des fonctions aléatoires. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A; 289 (1979), pp. 545-547 .

[3] KÔNO N. : Sample path properties of stochastic processes. J. Math. Kyoto Univ., 20-2 (1980), pp.295-313 .

[4] KÔNO N. : A Remark on Garsia's intégral test about Sample continuity of L_p- processes. A paraître dans J. Math. Kyoto Univ. (1980) .

[5] NANOPOULOS C. et Ph. NOBELIS: Régularité et propriétés limites des fonctions aléatoires. Sem. de Prob. XII , Lect. Notes Math. , 649 (1976/77) , pp. 567-690 .

[6] PISIER G. : Conditions d'entropie assurant la continuité de certains processus et applications à l'Analyse Harmonique. Sém. d'Anal. Fonct., Ecole Polyt., 1980 exposés XIII - XIV .