Martin T. Barlow
Marc Yor

Sur la construction d'une martingale continue de valeur absolue donnée

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 62-75
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__62_0>

SUR LA CONSTRUCTION D'UNE MARTINGALE CONTINUE, DE VALEUR ABSOLUE DONNEE.

M.T. BARLOW et M. YOR.

Avertissement

Hormis l'introduction, le texte qui suit n'est pas un article écrit en commun, mais la juxtaposition de deux notes qui se complètent de façon naturelle.

La première, écrite par M. Yor, est une remarque simple rédigée en 1977 à la suite de la parution de l'article de D. Gilat [2] ; la seconde, de M.T. Barlow, plus récente et plus substantielle, est une approche constructive du théorème de Gilat, dans un cas particulièrement important.

Enfin, il nous a semblé qu'une rédaction bilingue, non seulement ne nuirait pas à la présentation, mais conserverait la couleur locale de chacun des textes !.

INTRODUCTION

$[\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P]$ désigne l'espace de probabilité filtré de référence ; il est supposé vérifier les conditions habituelles.

Soit $M = (M_t,\ t \geq 0)$ une martingale, et ϕ une fonction convexe positive telle que $E[\phi(M_t)] < \infty$ pour tout t ; d'après l'inégalité de Jensen, $(\phi(M_t),\ t \geq 0)$ est une sous-martingale.

Récemment, D. Gilat ([2], théorème 3) a obtenu la belle réciproque suivante de cette propriété, pour $\phi(x) = |x|$.

Théorème

Soit $(Y_t,\ t \geq 0)$ une sous-martingale positive, càdlàg, définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$. Alors, il existe une martingale $(Z_t,\ t \geq 0)$, càdlàg, définie sur un (autre) espace filtré $(\Omega', \mathcal{F}', \mathcal{F}'_t, P')$ telle que le processus $(|Z_t|\ ,\ t \geq 0)$ ait même loi que Y.

Y satisfaisant les hypothèses du théorème, on note $\mathcal{M}(Y)$ (resp. $\mathcal{M}^c(Y)$) l'ensemble des martingales càdlàg (resp : continues) Z, définies éventuellement sur d'autres espaces filtrés que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, et vérifiant la conclusion du théorème.

Le second auteur caractérise, dans la note I, les sous-martingales positives continues Y telles que $\mathcal{M}^c(Y)$ ne soit pas vide, et en II, le premier auteur construit, sur un espace de probabilité élargi, et pour une sous-martingale Y vérifiant la caractérisation en question, une martingale continue, dont la valeur absolue soit égale à Y.

Signalons encore, pour être complets, que Ph. Protter et M. Sharpe [4], ainsi que B. Maisonneuve [3] ont construit, sous l'hypothèse - tout à fait différente de la nôtre - que la sous-martingale Y vérifie : $Y\,Y_- > 0$ sur $]0,\infty[$, une martingale Z, toujours sur un espace filtré élargi, telle que $|Z| = Y$.

I - CARACTERISATION DES SOUS-MARTINGALES Y TELLES QUE $\mathcal{M}^c(Y) \neq \emptyset$.

Théorème 1

Soit Y une sous-martingale positive, càdlàg.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{M}(Y) = \mathcal{M}^c(Y)$ (ii) $\mathcal{M}^c(Y) \neq \emptyset$

(iii) Y est continue, et si A désigne le processus croissant continu tel que Y-A soit une martingale, alors $dP(\omega)$ p.s, la mesure $dA_s(\omega)$ est portée par $\{s \mid Y_s(\omega) = 0\}$.

Remarques :

1) Si Y vérifie les assertions du théorème 1, et N=Y-A désigne la partie martingale continue de Y, alors, d'après [1], A est donné par la formule :

$$A = \sup_{s \leq .} (N_s^-), \text{ où } x^- = \sup(-x;0).$$

2) Si Y est une sous-martingale continue vérifiant les assertions du théorème 1, et : $Y > 0$ sur $]0,\infty[$, alors Y est une martingale continue positive. Autrement dit, l'intersection des cadres d'étude de ce travail et de celui de Protter-Sharpe [4] est réduit aux martingales positives continues, cas où le théorème de Gilat n'apporte bien sûr rien !!

Démonstration du théorème 1 :

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : d'après le théorème de D. Gilat, $\mathcal{M}(Y) \neq \emptyset$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : soit Z une martingale continue, appartenant à $\mathcal{M}^c(Y)$.

Y, ayant même loi que $|Z|$, est continue. D'autre part, d'après la formule de Tanaka, $\int_0^{\cdot} 1_{(|Z_s|\neq 0)}\, d|Z_s| = \int_0^{\cdot} 1_{(|Z_s| \neq 0)}\, \mathrm{sgn}(Z_s)dZ_s$ est une martingale locale. Y et $|Z|$ ayant même loi, $\int_0^{\cdot} 1_{(Y_s\neq 0)}dY_s$ est une $(\mathcal{Y}_t)$-martingale locale, si $(\mathcal{Y}_t)$ désigne la filtration naturelle de Y. On en déduit aisément par localisation, que $E(\int_0^{\infty} 1_{(Y_s=0)}dA_s) = 0$, d'où (iii).

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : soit $Z\in\mathcal{M}(Y)$; on note toujours $(\Omega',\mathcal{F}',\mathcal{F}'_t,P')$ l'espace filtré sur lequel Z est définie. Y, et donc $|Z|$, étant continus, on peut, par localisation respective, les supposer bornés. La continuité de $|Z|$ permet de simplifier la formule de Tanaka appliquée à $|Z|$ comme suit :

$$(1) \qquad |Z_t|=|Z_0| + \int_0^t \mathrm{sgn}(Z_{s-})dZ_s - \sum_{0<s\leq t} \mathrm{sgn}(Z_{s-})\Delta Z_s + \Lambda_t^0,$$

où Λ^0 désigne le temps local de Z en 0.

La continuité de $|Z|$ entraîne encore l'égalité :

$$(2) \qquad \mathrm{sgn}(Z_{s-})\Delta Z_s = -2|Z_s|\, 1_{(\Delta Z_s\neq 0)}.$$

L'hypothèse (iii) entraîne alors l'égalité, pour tout $t \geq 0$:

$$0=E\left[\int_0^t 1_{(Y_s\neq 0)}dY_s\right] = E'\left[\int_0^t 1_{(|Z_s|\neq 0)}\, d|Z_s|\right] = 2E'\left[\sum_{(0<s\leq t} |Z_s|1_{\Delta Z_s\neq 0}\right]$$

En conséquence, pour tout temps d'arrêt T, on a :

$(\Delta Z_T\neq 0) \subseteq (|Z_T| = 0)$, et le théorème de section optionnel entraîne : $(\Delta Z\neq 0) \subseteq (|Z|=0) \subseteq (\Delta Z=0)$, d'après la continuité de $|Z|$. Ceci n'est possible que si $(\Delta Z\neq 0) = \emptyset$, à un ensemble P'-évanescent près, i.e : si Z est continue.

Y vérifiant les assertions du théorème 1, le temps local de Y en 0, soit $(L_t^0)_{t \geq 0}$, est égal, d'après ([5], théorème 2, iv, c)) à $2A$. Ainsi, d'après le corollaire 2 de [5] , on a, pour tout t :

$$A_t = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(Y_s \leq \varepsilon)} \, d\langle Y,Y\rangle_s \ , \quad P \text{ p.s.}$$

En particulier, le processus croissant A est mesurable par rapport à la filtration naturelle $\mathcal{Y}$ de Y. Le même corollaire 2 de [5] implique que, si $Z \in \mathcal{M}(Y)$, le temps local Λ^0 de Z en 0 est donné par :

$$\Lambda_t^0 = \lim_{(\varepsilon \to 0)} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(|Z_s| \leq \varepsilon)} \, d\langle Z,Z\rangle_s \ , \quad P \text{ p.s.}$$

De là, on déduit aisément la :

<u>Proposition 2</u>

<u>Si</u> Y <u>vérifie les assertions du théorème 1, et</u> $Z \in \mathcal{M}(Y)$, <u>les deux triplets de processus</u> :

$$(Y-A) \ ; \ A \ ; \ \langle Y,Y\rangle ') \quad \text{et} \quad \left(\int_0^{\cdot} \operatorname{sgn}(Z_s)dZ_s \ , \ \Lambda^0, \ \langle Z,Z\rangle \right)$$

<u>ont même loi</u>.

<u>Corollaire 2·1</u>

<u>Soit</u> $B = (B^1,\dots,B^n)$ <u>un</u> $(\mathcal{F}_t)$ <u>mouvement brownien à valeurs dans</u> $\mathbb{R}^n$ <u>et</u> $|B|^2 = \sum_{i=1}^n (B^i)^2$.

<u>Alors</u>,

a) <u>si</u> $n > 1$, <u>pour tout</u> $\varepsilon \geq 0$, $\mathcal{M}^c(|B|^{1+\varepsilon}) = \emptyset$.

b) <u>si</u> $n=1$, - <u>pour</u> $\varepsilon > 0$, $\mathcal{M}^c(|B|^{1+\varepsilon}) = \emptyset$.

- <u>si</u> $Z \in \mathcal{M}(|B|)$, Z <u>est un mouvement brownien réel</u>.

La dernière assertion du corollaire découle de la caractérisation du mouvement brownien réel comme martingale continue, de processus croissant égal à t.

Il est naturel de se demander si, dans l'énoncé du théorème de Gilat, on peut remplacer la fonction convexe $\phi(x) = |x|$, par $\phi(x) = |x|^p$ $(p > 1)$, par exemple. Le théorème 3 ci-dessous montre en particulier que cela n'est pas possible.

Théorème 3

Soit $(M_t, t \geq 0)$ une martingale locale continue, nulle en 0, mais non identiquement nulle, définie sur l'espace filtré $(\Omega, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathcal{F}}_t, P)$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) f est la différence de deux fonctions convexes

(ii) $f(0) = 0$, et 0 est le seul zéro de f.

(iii) f est dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.

Alors, il n'existe pas de semi-martingale réelle X, définie sur un (autre) espace filtré $(\Omega', \widehat{\mathcal{F}}', \widehat{\mathcal{F}}'_t, P')$ telle que $f(X)$ et $|M|$ aient même loi.

Remarque : D'après le théorème 1, on peut remplacer dans l'énoncé ci-dessus le processus $|M|$ par Y, sous-martingale nulle en 0, vérifiant les assertions du théorème 1.

Démonstration :

1) D'après les hypothèses faites sur f, si X est une semi-martingale telle que $f(X)$ soit continue, on a, d'après la formule d'Ito généralisée :

$$\int_0^t 1_{(f(X_s)=0)} \, df(X_s) = 0.$$

2) Ainsi, s'il existait X, semi-martingale telle que $f(X)$ et $|M|$ aient même loi, on aurait : $L_t^o = \int_o^t 1_{(|M_s| = 0)} \, d|M_s| = 0$, si L^o désigne le temps local de M en 0. $|M|$ serait donc une surmartingale positive nulle en 0, donc identiquement nulle, ce qui n'est pas.

Le corollaire suivant généralise le théorème de [6]

Corollaire 3.1

Soit $M = (M_t, t \geq 0)$ une martingale locale continue, nulle en 0, mais non identiquement nulle, et f une fonction convexe positive, vérifiant les hypothèses (ii) et (iii) du théorème 3.

Alors, si l'on note g^{-1} l'inverse de $g = f|_{[0,\infty[}$, $g^{-1}(|M|)$ n'est pas une semi-martingale.

- II -

CONSTRUCTION OF A CONTINUOUS MARTINGALE, WITH GIVEN ABSOLUTE VALUE.

Let Y be a cadlag positive submartingale defined on a filtered probability space $(\Omega', \mathcal{F}', \mathcal{F}'_t, P')$, let A denote the unique increasing previsible process such that $Y-A$ is a martingale, and suppose that Y satisfies the condition

$$dA_s(\omega) \text{ is carried on } \{s : Y_{s-}(\omega) = 0\}. \qquad (*)$$

In this part of the paper we show how, after suitably enlarging the space $(\Omega', \mathcal{F}', P')$, we may construct a martingale M such that $|M| = Y$. It is known that a Brownian Motion may be obtained by flipping the excursions from 0 of a reflecting Brownian Motion up or down independtly with probability 1/2. We will apply this procedure to Y, and prove that the process M we obtain is a martingale.

Although the basic idea is intuitively clear this type of construction is perhaps sufficiently unfamiliar to merit being set out in some detail. Let $(\Omega'', \mathcal{F}'', P'')$ be another probability space, carrying a sequence ϕ_n of independent random variables, with $\phi_n \in \{-1,1\}$, and $E''\phi_n = 0$. Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be the product of the spaces $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ and $(\Omega'', \mathcal{F}'', P'')$, and $\overline{\mathcal{F}}$ be the P-completion of $\mathcal{F}' \otimes \mathcal{F}''$. Set $\mathcal{F}_t$ to be the $(P, \overline{\mathcal{F}})$-augmentation of $\mathcal{F}'_t \otimes \{\Omega'', \emptyset\}$: the filtration $\mathcal{F}_t$ is then right-continuous. We extend Y and ϕ_n to $(\Omega, \overline{\mathcal{F}})$ in the natural fashion by setting $Y(\omega', \omega'') = Y(\omega')$, $\phi_n(\omega', \omega'') = \phi_n(\omega'')$.

The process Y_{s-} makes only countably many excursions from 0 : let

ε_{nm} denote the m th excursion the duration of which lies in the interval $[1/n+1\ ,\ 1/n[$, if $n \geq 2$, or $[1/2,\infty]$ if $n=1$. To avoid too many subscripts we shall renumber the ε_{nm} to be indexed by a single integer n. Let α_n, β_n denote the left and right endpoints of ε_n, and note that for each n β_n is a stopping time $/(\mathcal{F}_t)$. (This might not be true if we had chosen a different way of numbering these excursions).

Set

$$C_t = \sum_n \phi_n 1_{[\alpha_n, \beta_n]}(t),$$

$$\gamma^n_t = 1_{[\beta_n, \infty[}(t),$$

$$M_t = C_t Y_t,$$

$$\mathcal{M}_t = \bigcap_{s > t} \sigma(\hat{\mathcal{F}}_s, C_u, 0 \leq u \leq s).$$

Thus $(\mathcal{M}_t)$ is the right-continuous filtration generated by C and $(\mathcal{F}_t)$. Note also that $|C_t|$ is $\hat{\mathcal{F}}_t$-adapted.

We require two lemmas on conditional independence.

Lemma 4

For each $t \geq 0$ $\mathcal{M}_t$ and $\hat{\mathcal{F}}_\infty$ are conditionally independent given $\hat{\mathcal{F}}_t$.

Remark : This implies that every $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-martingale is an $(\mathcal{M}_t)$-martingale. In particular, therefore, Y-A is an $(\mathcal{M}_t)$-martingale, and Y is an $(\mathcal{M}_t)$-submartingale.

Proof : Let $\mathcal{C}_t$ denote the filtration generated by C. It is enough to show that $\mathcal{C}_t$ and $\hat{\mathcal{F}}_\infty$ are conditionally independent given $\hat{\mathcal{F}}_t$ (we abbreviate this to $\mathcal{C}_t$ and $\hat{\mathcal{F}}_\infty$ are c.i $/\hat{\mathcal{F}}_t$), since then $\mathcal{C}_t \vee \hat{\mathcal{F}}_t$ and $\hat{\mathcal{F}}_\infty$ are c.i. $/\hat{\mathcal{F}}_t$. As $\mathcal{M}_t = \bigcap_{s > t} (\hat{\mathcal{F}}_s \vee \mathcal{C}_s)$ it follows that $\mathcal{M}_t$ and $\hat{\mathcal{F}}_\infty$ are c.i $/\hat{\mathcal{F}}_s$ for any $s > t$, and hence that $\mathcal{M}_t$ and $\hat{\mathcal{F}}_\infty$ are c.i $/\hat{\mathcal{F}}_t$.

It is therefore sufficient to show that for $f \in b\mathscr{C}_t$ of the form $f = \prod_{i=1}^{n} 1_{(C_{t_i}=a_i)}$, where $0 \le t_1 \le \dots \le t_n \le t$ and $a_i = +1,-1$, or 0, we have $E(f|\mathscr{F}_\infty) \in \mathscr{F}_t$.

Note also that if $a_i=0$ then $1_{(C_{t_i}=a_i)} = 1_{(|C_{t_i}|=0)} \in \mathscr{F}_t$: so we may take the a_i to be equal to ± 1.

Then $E(f|\mathscr{F}_\infty)$

$$= \prod_{i=1}^{n} 1_{(|C_{t_i}|=1)} E(\prod_{i=1}^{n} 1_{(C_{t_i}=a_i)} |\mathscr{F}_\infty)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} 1_{(|C_{t_i}|=1)} E(\sum_{m_1,\dots,m_n} 1_{(t_i \in [\alpha_{m_i},\beta_{m_i}],1\le i\le n)} \prod_{i=1}^{n} 1_{(\phi_{m_i}=a_i)}|\mathscr{F}_\infty)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} 1_{(|C_{t_i}|=1)} \cdot 2^{-n} \in \mathscr{F}_t.$$

Let T be any $(\mathscr{F}_t)$-stopping time. Set $\mathscr{A}(T) = \sigma(\gamma_T^n\, \phi_n,\ n \ge 1)$: thus $\mathscr{A}(T)$ is the σ-field generated by the signs of the excursions ending before T.

<u>Lemma 5</u>

$$E(\phi_n(1-\gamma_T^n)|\mathscr{F}_\infty \vee \mathscr{A}(T)) = 0.$$

<u>Proof</u> : Let $f \in b\,\mathscr{F}_\infty$, $h = \prod_{i=1}^{n} 1_{(\gamma_T^{n_i}\ \phi_{n_i} = e_i)}$, where $e_i = \pm 1$. It is sufficient to show that $Efh\ \phi_n(1-\gamma_T^n) = 0$. However this may be written as

$$E\left[f.\prod_{i=1}^{n} 1_{(\gamma_T^{n_i}=1)} (1-\gamma_T^n)\ E(\phi_n \prod_{i=1}^{n} 1_{(\phi_{n_i}=e_i)}|\mathscr{F}_\infty\right].$$

If one of the n_i equals n then the term outside the conditional expectation is zero, otherwise, by the independence of the ϕ_{n_i} and ϕ_n, the conditional expectation is zero.

Theorem 6

M is a cadlag martingale $/(\mathcal{M}_t)$.

Proof : By the construction of C, C_{t-} exists whenever $Y_{t-} \neq 0$, thus M has left limits, $M_{t-} = C_t Y_{t-}$, and $\Delta M_t = C_t \Delta Y_t$. Similarly C_{t+} exists whenever $Y_t \neq 0$, so that M is right-continuous.

To prove that M is a martingale, it is enough that :

(**) $\quad E[M_t | \mathcal{M}_{s-}] = E|M_s | \mathcal{M}_{s-}]$ for $s < t$.

Indeed, suppose (**) is true ; if (s_n) decreases to s, and $s_n < t$ for all n, then, as $\mathcal{M}_s = \bigcap_n \mathcal{M}_{s_n^-}$, $E(M_t | \mathcal{M}_{s_n^-})$ converges a.e and in L^1 to $E[M_t | \mathcal{M}_s]$. On the other hand,

$$E\left[|E(M_{s_n} | \mathcal{M}_{s_n^-}) - M_s|\right] \leq E(|M_{s_n} - M_s|).$$

This last expression converges to 0 as $n \to \infty$, as M is right-continuous, $|M_{s_n} - M_s| \leq E(Y_t | \mathcal{F}_{s_n}) + Y_s$, and $(E(Y_t | \mathcal{F}_{s_n}), n \geq 0)$ is uniformly integrable.

Finally, under (**), M is a martingale.

So let s and t be fixed with $s \leq t$. Set $T = \inf\{u > s : Y_{u-} = 0\}$, and $R = T_{\{Y_{T-}=0\} \cap \{T > s\}}$. Then the graph of R is the previsible set $(\{Y_- = 0\} \cap]s,\infty[) \setminus (]T,\infty])$, and so R is previsible.

Now as dA_s is carried by $\{Y_{s-}=0\}$, for any stopping time V $\Delta A_V\, 1_{(Y_{V-}\neq 0)} = 0$. Thus $1_{(T\neq R)}\, \Delta A_T = 1_{(Y_{T-}\neq 0)}\, \Delta A_T = 0$, and we have $A^{R-}_{t\wedge T} = A_s$. The construction of C ensures that $C^{R-}_{t\wedge T} = C_s$.

Therefore

$$E(M^{R-}_{t\wedge T}|\mathcal{M}_s) = E(C^{R-}_{t\wedge T}\, Y^{R-}_{t\wedge T}|\mathcal{M}_s)$$

$$= C_s\, E(Y^{R-}_{t\wedge T} - A^{R-}_{t\wedge T}|\mathcal{M}_s) + C_s\, A_s$$

$$= M_s,$$

using the fact that Y-A is a martingale $/\mathcal{M}_t$.

Since $Y^{R-}_{t\wedge T} = 1_{(t<T)}\, Y_t + 1_{(t\geq T)}\, 1_{(T=R)}\, Y_{R-} + 1_{(t\geq T)}\, 1_{(T\neq R)}\, Y_T$, and $1_{(T=R)}\, Y_{R-} = 1_{(T\neq R)}\, Y_T = 0$, we have $Y^{R-}_{t\wedge T} = 1_{(t<T)}\, Y_t$.

Thus $M_t = M^{R-}_{t\wedge T} + 1_{(t\geq T)}\, M_t$, and to complete the proof all that remains to show is that $E(M_t\, 1_{(t\geq T)}|\mathcal{M}_{s-}) = 0$.

Now $1_{[\alpha_n,\beta_n]}(t)\, 1_{(t\geq T)} = 1_{(T\leq\alpha_n\leq t\leq\beta_n)} = (1-\gamma^n_T)\, 1_{[\alpha_n,\beta_n]}(t)$, as $\alpha_n < \beta_n$. So, as $T\geq s$, we have, for $0\leq u<s$, $C_u = \sum_n \gamma^n_T\, \phi_n\, 1_{[\alpha_n,\beta_n]}(u)$, and it follows that

$\mathcal{C}_{s-} \subseteq \mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{A}(T)$. Since $\mathcal{M}_{s-} = \mathcal{C}_{s-} \vee \mathcal{F}_{s-}$, we have $\mathcal{M}_{s-} \subseteq \mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{A}(T)$.

Consequently

$$E(M_t\, 1_{(t \geq T)} | \mathcal{M}_{s-})$$

$$= E(Y_t \sum_n \phi_n\, 1_{[\alpha_n,\beta_n]}(t)\, 1_{(t \geq T)} | \mathcal{M}_{s-})$$

$$= E(Y_t \sum_n \phi_n\, (1-\gamma_T^n)\, 1_{[\alpha_n,\beta_n]}(t) | \mathcal{M}_{s-})$$

$$= E(Y_t \sum_n 1_{[\alpha_n,\beta_n]}(t)\, E(\phi_n(1-\gamma_T^n) | \widehat{\mathcal{F}}_\infty \vee \mathcal{A}(T)) | \mathcal{M}_{s-})$$

$= 0$ by Lemma 5, completing the proof of the Theorem.

Remarks :

1. If Y is continuous then Y satisfies the conditions of Theorem 1 of the first section. Since $\Delta M_t = C_t\, \Delta Y_t$ M is continuous.

2. We have $(\Delta M_t)^2 = (\Delta Y_t)^2$, and therefore $[M,M] = [Y,Y]$. So in particular, if Y is a reflecting Brownian motion, then M is a continuous martingale with $[M,M] = t$, and so M is a Brownian motion.

Note ajoutée au texte initial (Juillet 1979) :

M. Barlow sait maintenant se passer de l'hypothèse (*) pour associer, à toute sous-martingale positive càdlàg Y, une martingale càdlàg M, sur un espace convenablement élargi, telle que $|M| = Y$.

L'article correspondant paraîtra aux Annals of Probability.

REFERENCES

[1] M. CHALEYAT-MAUREL, N. El KAROUI : Un problème de réflexion et ses applications au temps local et aux équations différentielles stochastiques sur $\mathbb{R}$. Cas continu.
In : Temps locaux - Astérique n° 52-53 (1978).

[2] D. GILAT : Every non-negative submartingale is the absolute value of a martingale.
Annals of Proba., 5, p. 475-481, 1977.

[3] B. MAISONNEUVE : Martingales de valeur absolue donnée,d'après Protter et Sharpe.
Séminaire Proba. XIII. Lecture Notes in Maths. Springer (1979).

[4] Ph. PROTTER and M. SHARPE : Martingales with given absolute value.
A paraître.

[5] M. YOR : Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semi-martingales.
In : Temps locaux. Astérique n° 52-53 (1978).

[6] M. YOR : Un exemple de processus qui n'est pas une semi-martingale.
In : Temps locaux. Astérique n° 52-53 (1978).