MICHEL ÉMERY

Une propriété des temps prévisibles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 316-317
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__316_0>

Séminaire de Probabilités

Volume XIV

UNE PROPRIETE DES TEMPS PREVISIBLES

par M. Emery

On est parfois amené à s'interesser aux processus définis sur un intervalle $[\![0,T[\![$, où T est un temps prévisible. Lors d'une séance du séminaire de Strasbourg, P.A. Meyer a remarqué que l'étude de ces processus doit pouvoir se ramener, par changement de temps, à la théorie générale, où les processus sont définis sur $\mathbb{R}_+$ tout entier. Cette courte note en apporte une démonstration.

Pour la simplicité, on supposera que $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0})$ vérifie les conditions habituelles (faute de quoi, il conviendrait de truffer l'énoncé suivant de p.s.).

THEOREME. Soit T un temps prévisible qui ne s'annule pas. Il existe un processus A continu, strictement croissant et adapté, tel que $A_0=0$ et $A_T=1$.

La démonstration, qui rappelle le théorème d'Urysohn, fait un usage répété du théorème d'annonçabilité des temps prévisibles par des temps prévisibles, très légèrement renforcé :

LEMME. Soit $\varepsilon>0$. Si S et S' sont deux temps prévisibles tels que $S<S'$, il existe une suite (R_n) de temps prévisibles telle que $R_0=S$, $0<R_{n+1}-R_n\leq\varepsilon$ et $\lim_n R_n = S'$.

Démonstration du lemme. Il existe une suite (T_n) de temps prévisibles qui annonce S' (voir Probabilités et Potentiel, 2° édition, chap. 4, th. 77) ; appelons S_n le temps prévisible $n\varepsilon$. L'ensemble

$$H = \bigcup_{n\geq 0}[\![T_n]\!] \cup \bigcup_{n\geq 0}[\![S_n]\!] \cup [\![S]\!]$$

est prévisible, ainsi que $K = H \cap [\![S,S'[\![$. Pour chaque ω, la coupe $K(\omega)$ est un ensemble infini de $[S(\omega),S'(\omega)[$ sans autre point d'accumulation que $S'(\omega)$, rencontrant tout intervalle de longueur $>\varepsilon$. Pour obtenir la suite

(R_n) , il suffit d'énumérer les points de K par ordre croissant ; $R_0 = S$ est prévisible, ainsi que, pour tout n, le début R_{n+1} de l'ensemble prévisible fermé à droite $K \cap]\!]R_n, S'[\![$. ▬

<u>Démonstration du théorème</u>. Soit ε_n une suite qui décroît vers zéro.

On applique le lemme à l'intervalle $[\![S,S'[\![= [\![0,T[\![$ avec $\varepsilon = \varepsilon_1$,et on obtient une suite (R_n) ; on définit alors le processus A sur

$$H_1 = \bigcup_n [\![R_n]\!] \cup [\![T]\!]$$

par $A_T = 1$, $A_{R_n} = 1-2^{-n}$.

Ensuite, on applique le lemme avec $\varepsilon = \varepsilon_2$ à chaque intervalle $[\![R_n, R_{n+1}[\![$; on obtient des suites $(R_{n,m})_{m \geqq 0}$ et on définit A sur

$$H_2 = \bigcup_{m,n} [\![R_{n,m}]\!] \cup [\![T]\!]$$

par $A_{R_{n,m}} = A_{R_n} + (1-2^{-m})(A_{R_{n+1}} - A_{R_n})$.

On recommence avec ε_3 sur les intervalles $[\![R_{n,m}, R_{n,m+1}[\![$, etc...
On définit ainsi A sur des ensembles prévisibles à coupes dénombrables H_p de plus en plus grands.

La limite $H = \bigcup_p H_p$ est partout dense dans $[\![0,T]\!]$ car H_p rencontre tout intervalle de longueur plus grande que ε_p. Le processus A est strictement croissant sur H car il l'est sur chaque H_p , continu sur H car il prend toutes les valeurs dyadiques de $[0,1]$. On peut donc prolonger A par continuité à $[\![0,T]\!]$, et le processus continu strictement croissant obtenu est optionnel car, pour tout x dyadique de $[0,1[$, l'ensemble $\{A \geqq x\}$ est de la forme $[\![R,T]\!]$ où R est un temps d'arrêt.

Il ne reste, si on le désire, qu'à prolonger A après T par $A_{T+t} = 1+t$. ▬