

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHING SUNG CHOU

Une caractérisation des semimartingales spéciales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 116-117

[<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__116_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__116_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE CARACTERISATION DES SEMIMARTINGALES
SPECIALES

par CHOU Ching-Sung

Soit X une semimartingale, et soit A un processus croissant (pas forcément nul en 0). Nous dirons d'après Métivier et Pellaumail que X est contrôlée par A si l'on a, pour tout processus H prévisible borné et tout temps d'arrêt T

$$(1) \quad E \left[\sup_{t \leq T} \left(\int_0^t H_s dX_s \right)^2 \right] \leq E \left[A_{T-} \int_0^{T-} H_s^2 dA_s \right] \quad (A_0 = 0)$$

Les travaux importants de Métivier et Pellaumail sur cette notion ont été exposés au séminaire de Strasbourg par M. Emery (ce volume, p. 118), qui a montré, d'après Métivier et Pellaumail que:

THEOREME . Toute semimartingale X est contrôlée par un processus croissant.

PRINCIPE DE LA DEMONSTRATION : On écrit $X=M+V$, où M est une martingale locale à sauts bornés, nulle en 0, et V est un processus à variation finie. On montre alors que M est contrôlée par $4(\langle M, M \rangle + [M, M] + 1) = A'$, V par $\int_0^t |dV_s| = A''$, et $X=M+V$ est contrôlé par $2(A' + A'') = A$.

Nous voudrions faire la remarque suivante :

THEOREME. Une semimartingale X peut être contrôlée par un processus croissant A localement intégrable si et seulement si X est spéciale.

DEMONSTRATION. Si X est spéciale, on reprend la démonstration précédente : $\langle M, M \rangle$ est localement intégrable puisqu'il est prévisible, $[M, M]$ aussi puisque M est à sauts bornés . D'autre part, X étant spéciale, V est localement intégrable, donc A est localement intégrable.

Inversement, supposons que dans (1) le processus A soit localement intégrable. Ecrivons la formule (1) avec $H=1$

$$E[(X_{T-}^*)^2] \leq E[A_{T-}^2]$$

Lenglart énonce cela en disant que le processus (X_{t-}^{*2}) est dominé par le processus croissant (A_t^2) . Il démontre alors (voir par exemple Dellacherie et Meyer, chapitre VI, n°111 remarque b)) que l'on a pour toute fonction concave positive F , nulle en 0

$$E[F(X_{T-}^{*2})] \leq cE[F(A_{T-}^2)]$$

Prenons $F(x) = \sqrt{x}$, nous obtenons

$$E[X_{T-}^*] \leq cE[A_{T-}] \quad \text{puis} \quad E[X_T^*] \leq cE[A_T]$$

Pour cette dernière inégalité, on passe à la limite dans l'inégalité $E[X_{T_n}^*] \leq cE[A_{T_n}]$, en prenant $T_n = (T + \frac{1}{n}) \wedge \inf\{t > T : A_t - A_T \geq \frac{1}{n}\}$.

Ce résultat étant obtenu, on voit que si A est localement intégrable, il en est de même du processus croissant (X_t^*) , et cela entraîne que X est spéciale. Choisissons en effet des temps d'arrêt $U_n \uparrow +\infty$ tels que

$E[X_{U_n}^* I_{\{U_n > 0\}}] < \infty$, et posons $S_t = (\sum_{s \leq t} \Delta X_s^2)^{1/2}$, $V_n = \inf\{t : S_t \geq n\}$, $T_n = U_n \wedge V_n$. Nous avons sur $\{T_n > 0\}$

$$S_{T_n} = S_{T_n-} + \Delta S_{T_n} \leq n + 2X_{U_n}^*$$

Donc $E[S_{T_n} I_{\{T_n > 0\}}] < \infty$, et X est spéciale d'après le théorème 32 du cours sur les intégrales stochastiques de P.A. Meyer, sémin. X p. 310.

Mathematics Department
National Central University
Chung-Li (Taiwan)