

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

BERNARD MAISONNEUVE

**Martingales de valeur absolue donnée, d'après Protter-Sharpe**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 13 (1979), p. 642-645

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1979\\_\\_13\\_\\_642\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__642_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MARTINGALES DE VALEUR ABSOLUE DONNEE,  
D'APRES PROTTER ET SHARPE.

par B. MAISONNEUVE

Gilat a montré dans [1] que, pour toute sous-martingale positive  $X$ , il existe une martingale  $M$  (définie sur un espace convenable) telle que les processus  $X$  et  $|M|$  aient même loi. Ce résultat vient d'être précisé par Protter et Sharpe ([3]) dans le cas où  $X$  et  $X_-$  sont strictement positifs. Nous allons reprendre leur méthode, en la simplifiant, et généraliser un peu leurs résultats.

$T$  désigne un ensemble totalement ordonné. Soit  $X = (X_t)_{t \in T}$  une sous-martingale positive, définie sur un espace  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et relative à une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ . Nous supposons que  $X$  peut s'écrire  $X = NA$ , où  $N$  est une martingale positive relative à  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  et  $A$  un processus croissant à valeurs réelles (finies) positives et adapté à  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ . Cette hypothèse est satisfaite si  $T = \mathbb{R}_+$ , si  $X$  est continue à droite et telle que  $X$  et  $X_-$  ne s'annulent pas, et si la filtration  $(\mathcal{F}_t)$  satisfait aux conditions habituelles ; on peut alors choisir  $A$  prévisible et tel que  $A_0 = 1$ , d'après un résultat de Meyer et Yoeurp ([2]).

Par ailleurs, soit  $(\Omega', \mathcal{F}', P')$  un espace probabilisé sur lequel se trouve définie une martingale continue à droite  $(Y_a)_{a \in \mathbb{R}_+}$  telle que  $|Y_a| = a$  p.s. pour tout  $a \in \mathbb{R}_+$  (par exemple, on peut prendre  $Y_a = B_{T_a}$ , où  $B$  est un mouvement brownien réel issu de 0 et où  $T_a = \inf\{s : |B_s| > a\}$ ). La martingale  $Y$  est symétrique ; en effet,  $|-Y_a| = a$  p.s. pour tout  $a \in \mathbb{R}_+$  et il résulte de la proposition 2 ci-dessous (appliquée à  $T = \mathbb{R}_+$ ,  $a(t) = t$ ) que les processus  $Y$  et  $-Y$  ont même loi.

Soit  $(W, \mathcal{G}, Q)$  le produit des espaces  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et  $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ .

PROPOSITION 1. - Dans les conditions énoncées ci-dessus le processus  $(M_t)_{t \in T}$  défini sur  $(W, \mathcal{G}, Q)$  par

$$M_t(w, w') = N_t(w) Y_{A_t(w)}(w') \quad t \in T, \quad w \in \Omega, \quad w' \in \Omega'$$

est une martingale symétrique (donc centrée) ; les processus  $X$  et  $|M|$  ont même loi.

Démonstration : Soit  $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq s \leq t$ , ces éléments étant tous dans  $T$ , et soit  $f$  une fonction borélienne positive sur  $\mathbb{R}^n$ . Pour établir que  $M$  est une martingale, il s'agit de montrer que

$$(1) \quad E_Q \left[ f(M_{s_1}, \dots, M_{s_n}) M_t \right] = E_Q \left[ f(M_{s_1}, \dots, M_{s_n}) M_s \right].$$

D'après le théorème de Fubini, le premier membre s'écrit

$$\int_{\Omega} dP(w) \int_{\Omega'} dP'(w') f \left( N_{s_1}(w) Y_{A_{s_1}(w)}(w'), \dots, N_{s_n}(w) Y_{A_{s_n}(w)}(w') \right) N_t(w) Y_{A_t(w)}(w'),$$

où l'on peut remplacer  $A_t(w)$  par  $A_s(w)$ , puisque  $Y$  est une martingale sur  $\Omega'$  et que  $A_s(w) \leq A_t(w)$ ; en intervertissant l'ordre des intégrations et en utilisant la propriété de martingale de  $N$  relativement à la famille  $(\mathcal{F}_t)$ , on peut ensuite remplacer  $N_t(w)$  par  $N_s(w)$ , d'où l'égalité (1). La symétrie de  $Y$  et le théorème de Fubini entraînent la symétrie de  $M$ .

#### Remarques.

1) Gilat considère le cas des sous-martingales généralisées positives, du moins lorsque  $T = \mathbb{N}$ . Ici il n'y a aucune difficulté à étendre la proposition 1 à de tels processus et pour  $T$  quelconque : on remplace partout dans l'énoncé le mot martingale par le mot martingale généralisée. Rappelons que, d'une manière générale, un processus réel  $(X_t)_{t \in T}$  défini sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est une (sous-)martingale généralisée relativement à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  si pour  $s, t \in T$ ,  $s \leq t$

$$a) \quad A \in \mathcal{F}_s, \quad \int_A |X_t| dP < \infty \Rightarrow E[X_t I_A | \mathcal{F}_s] (\geq) = X_s I_A,$$

b) la mesure  $|X_t| \cdot P$  est  $\sigma$ -finie sur  $\mathcal{F}_s$ .

2) Soit  $M$  une martingale telle que  $X$  et  $|M|$  aient même loi. La loi de  $M$  n'est en général pas uniquement déterminée par cette condition. Toutefois, si  $X$  est déterministe, c'est-à-dire si  $X_t = a(t)$  où  $a$  est une application croissante de  $T$  dans  $\mathbb{R}_+$ , et si on exige que  $M$  soit centrée, la loi de  $M$  est uniquement déterminée, comme le montre la proposition suivante :

**PROPOSITION 2.** - Soit  $a$  une application croissante de  $T$  dans  $\mathbb{R}_+$  et soit  $T^* = \{t \in T : a(t) > 0\}$ . Si  $(M_t)_{t \in T}$  est une martingale centrée, définie sur un espace  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et telle que  $|M_t| = a(t)$  p.s. pour tout  $t \in T$ , le processus  $(S_t = \frac{M_t}{a(t)})_{t \in T^*}$  est un processus de Markov à valeurs dans  $E = \{-1, +1\}$ , de fonction de transition  $(P_s^t)_{s \leq t}$  donnée par

$$P_s^t(\varepsilon, \{\varepsilon'\}) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{a(s)}{a(t)} \varepsilon \varepsilon' \right) \quad s, t \in T^*, \quad s \leq t, \quad \varepsilon, \varepsilon' \in E$$

et on a  $P\{S_t = 1\} = \frac{1}{2} \quad \forall t \in T^*$ . Il en résulte que la loi de  $M$  est uniquement déterminée.

Démonstration : On vérifie immédiatement que les noyaux  $P_s^t$  sont markoviens et vérifient la relation de Chapman-Kolmogorov. Soit  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  la famille naturelle de  $M$ . La propriété de martingale de  $M$  entraîne que, si  $s, t \in T^*$ ,  $s \leq t$ ,

$$E[1 + S_t | \mathcal{F}_s] = 1 + \frac{a(s)}{a(t)} S_s.$$

Comme  $|S_t| = 1$  p.s., le premier membre vaut  $2P\{S_t = 1 | \mathcal{F}_s\}$  et par suite, pour  $\varepsilon = \pm 1$

$$P\{S_t = \varepsilon | \mathcal{F}_s\} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{a(s)}{a(t)} S_s \varepsilon \right) = P_s^t(S_s, \{\varepsilon\}),$$

d'où la propriété de Markov indiquée. En prenant  $s = t$ , on obtient  $P\{S_t = \varepsilon\} = \frac{1}{2} (1 + \varepsilon E(S_t)) = \frac{1}{2}$  puisque  $E(M_t) = 0$ . La loi du processus  $(\frac{M_t}{a(t)})_{t \in T^*}$  est donc déterminée, et comme  $M_t = 0$  p.s. si  $a(t) = 0$ , la loi de  $M$  est également déterminée.

REFERENCES

- [1] D. GILAT (1977) - "Every non-negative submartingale is the absolute value of a martingale". Annals of Probability 5, 475-481.
- [2] Ch. YOEURP et P.A. MEYER (1976) - "Sur la décomposition multiplicative des sous-martingales positives". Séminaire de Probabilités X. Lecture Notes in Mathematics, vol. 511, 501-504, Springer.
- [3] P. PROTTER and M.J. SHARPE - "Martingales with given absolute value". To appear in Ann. of Prob.

RESUME.

We improve and extend the method of Protter and Sharpe of showing Gilat's result that "every non-negative submartingale is the absolute value of a martingale", in the case where the submartingale admits a multiplicative decomposition.

-:-:-:-