

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHANTHA YOEURP

Solution explicite de l'équation $Z_t = 1 + \int_0^t |Z_{s-}| dX_s$

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 614-619

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__614_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION EXPLICITE DE L'EQUATION

$$Z_t = 1 + \int_0^t |Z_{s-}| dX_s$$

de

Ch. YOEURP

Introduction : L'objet de cet article est d'expliciter la solution de l'équation différentielle stochastique de C. Doléans-Dade suivante :

$$Z_t = 1 + \int_0^t |Z_{s-}| dX_s ,$$

où $X=(X_t)$ est une semi-martingale donnée.

On travaille sur un espace probabilisé complet (Ω, \mathcal{F}, P) muni d'une filtration croissante (\mathcal{F}_t) de sous tribus de \mathcal{F} , vérifiant les conditions habituelles.

On suppose connues la théorie générale des processus ((1)) et la théorie des intégrales stochastiques ((3)). Toutes les intégrales stochastiques considérées sont nulles

$$\text{en } 0 \text{ (i.e. } \int_0^t = \int_{]0,t]} \text{)}.$$

Soit $X=(X_t)$ une semi-martingale donnée¹.

d'après un théorème de C. Doléans-Dade ((2)), l'équation :

$$(1) \quad Z_t = 1 + \int_0^t |Z_{s-}| dX_s$$

admet, dans l'ensemble des semi-martingales, une solution et une seule, qui vaut 1 pour $t=0$. Le théorème suivant donne une expression explicite de cette solution.

Théorème : Soient T_1, \dots, T_n, \dots les instants de sauts successifs de X d'amplitude supérieure ou égale à 1 :

$$\bigcup_{n \geq 1} [T_n] = \{|\Delta X| \geq 1\}.$$

Définissons une suite de v.a. $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ par :

$$\varepsilon_n = 1 \text{ si } \Delta X_{T_n} \geq 1$$

$$= -1 \text{ si } \Delta X_{T_n} \leq -1$$

$$= 0 \text{ si } \Delta X_{T_n} = 0 \text{ (i.e. si } T_n = \infty)$$

on pose $T_0=0$, $\varepsilon_0=1$.

1. On ne restreint pas la généralité en supposant $X_0=0$. Nous le faisons dans toute la suite.

Alors, l'unique solution $Z = (Z_t)$ de (1) est donnée par :

$$Z_t = \sum_{n \geq 0} Z_t^n \mathbb{1}_{[[T_n, T_{n+1}[[}, \text{ où l'on note :}$$

$$Z_t^n = Z_{T_n} U^n(\varepsilon_n X)_t \text{ pour } t \in [[T_n, T_{n+1}[[.$$

$$U^n(Y)_t = \exp(Y_t - Y_{T_n} - \frac{1}{2} \langle Y^C, Y^C \rangle_t + \frac{1}{2} \langle Y^C, Y^C \rangle_{T_n}) \prod_{T_n < s \leq t} (1 + \Delta Y_s) e^{-\Delta Y_s},$$

$$t \in [[T_n, T_{n+1}[[$$

$$Z_{T_n} = (1 + \Delta X_{T_1})(1 + \varepsilon_1 \Delta X_{T_2}) \dots (1 + \varepsilon_{n-1} \Delta X_{T_n}) U^0(X)_{T_1^-} U^1(\varepsilon_1 X)_{T_2^-} \dots$$

$$U^{n-1}(\varepsilon_{n-1} X)_{T_n^-}$$

La démonstration du théorème s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme : Soit $x = (x_t)$ ^{nulle en 0} une semi-martingale/telle que
 $\Delta x_t \geq -1$ (resp. $\Delta x_t \leq 1$) pour tout t .

Alors, pour toute valeur initiale positive
 (resp. négative) z_0 , \mathcal{F}_0 mesurable, l'unique solution de
l'équation :

$$z_t = z_0 + \int_0^t |z_{s-}| dx_s$$

est donnée par :

$$z_t = z_0 \exp(x_t - \frac{1}{2} \langle x^C, x^C \rangle_t) \prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta x_s) e^{-\Delta x_s} \quad (*)$$

$$\text{(resp. } z_t = z_0 \exp(-x_t - \frac{1}{2} \langle x^C, x^C \rangle_t) \prod_{0 < s \leq t} (1 - \Delta x_s) e^{\Delta x_s} \text{ (**))}$$

Démonstration : L'expression de z_t donnée par (*) est solution de l'équation :

$$\begin{aligned} z_t &= z_0 + \int_0^t z_{s-} dx_s \\ &= z_0 + \int_0^t |z_{s-}| dx_s, \text{ car } z_t \text{ est positif} \end{aligned}$$

pour tout t .

D'où le résultat désiré, d'après l'unicité de ^{la} solution. De même, z_t donné par (**) est solution de l'équation :

$$\begin{aligned} z_t &= z_0 - \int_0^t z_{s-} dx_s \\ &= z_0 + \int_0^t |z_{s-}| dx_s, \text{ car } z_t \text{ est négatif,} \end{aligned}$$

pour tout t .

D'où la conclusion ■

Revenons à la démonstration du théorème. Il suffit de résoudre l'équation (1) dans chaque intervalle $[[T_n, T_{n+1}[$, en déplaçant l'origine en T_n , et en arrêtant les processus considérés en $T_{n+1}-$.

De l'équation (1), on déduit :

$$(1') \quad Z_{T_n+t} = Z_{T_n} + \int_{T_n}^{T_n+t} |Z_{s-}| dX_s$$

Pour étudier le signe de Z_{T_n} , on prend les sauts en T_n des deux membres de (1) :

$$Z_{T_n} - Z_{T_n-} = |Z_{T_n-}| \Delta X_{T_n}$$

$$(2) \quad Z_{T_n} = Z_{T_n^-} + |Z_{T_n^-}| \Delta X_{T_n} = |Z_{T_n^-}| (\text{sig}(Z_{T_n^-}) + \Delta X_{T_n})$$

Par conséquent, sur $\{Z_{T_n} \neq 0\} \cap \{T_n < \infty\}$, on a $\text{sig}(Z_{T_n}) = \text{sig}(\varepsilon_n)$.

La solution de (1') sur $\llbracket T_n, T_{n+1} \llbracket$ est donnée par le lemme précédent, compte tenu du caractère local des intégrales stochastiques :

$$\text{Sur } \{Z_{T_n} > 0\} \cap \{T_n < \infty\}, Z_t = Z_{T_n} \exp(X_t - X_{T_n} - \frac{1}{2} \langle X^C, X^C \rangle_t + \frac{1}{2} \langle X^C, X^C \rangle_{T_n}) \prod_{T_n < s \leq t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}$$

$$\text{Sur } \{Z_{T_n} < 0\} \cap \{T_n < \infty\}, Z_t = Z_{T_n} \exp(-X_t + X_{T_n} - \frac{1}{2} \langle X^C, X^C \rangle_t + \frac{1}{2} \langle X^C, X^C \rangle_{T_n}) \prod_{T_n < s \leq t} (1 - \Delta X_s) e^{\Delta X_s}$$

$$\text{Sur } \{Z_{T_n} = 0\}, Z_t = 0$$

on a donc, d'une façon condensée :

$$(3) \quad Z_t = Z_{T_n} U^n(\varepsilon_n X)_t \text{ sur } \llbracket T_n, T_{n+1} \llbracket .$$

Pour terminer, il nous reste à calculer Z_{T_n} ; La relation (2) permet d'écrire :

$$Z_{T_n} = Z_{T_n^-} (1 + \text{Sig}(Z_{T_n^-}) \Delta X_{T_n})$$

D'autre part, la relation (3) écrite pour $(n-1)$ donne :

$$Z_{T_{n^-}} = Z_{T_{n-1}} U^{n-1} (\varepsilon_{n-1} X)_{T_{n^-}} , \quad \text{sig}(Z_{T_{n^-}}) = \text{sig}(Z_{T_{n-1}}) = \text{sig}(\varepsilon_{n-1})$$

De proche en proche, on obtient ainsi l'expression de Z_{T_n} écrite dans l'énoncé du théorème. ■

- (1) C. DELLACHERIE : "Capacités et processus stochastiques".
Springer-Verlag, Berlin 1972.
- (2) C. DOLEANS-DADE : "On the existence and unicity of solutions of stochastic differential equations".
Z. für. Wahr. 36, 93-101, 1976.
- (3) P.A. MEYER : "Un cours sur les intégrales stochastiques".
Sém. Proba. de Strasbourg X , Lectures Notes in Math. 511, Berlin, Springer (1976).