RENÉ CARMONA

Opérateur de Schrödinger à résolvante compacte

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 570-573
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__570_0>

OPERATEUR DE SCHRÖDINGER A RESOLVANTE COMPACTE

par René CARMONA

Abstract:

Using standard properties of Brownian paths, we give a sufficient condition for the compactness of the resolvent of Schrödinger operator $-\frac{1}{2}\Delta+V$.

I. INTRODUCTION:

Il est bien connu que le spectre de l'opérateur de Schrödinger est discret chaque fois que la fonction potentiel V tend vers l'infini; de façon précise, si $V\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est bornée inférieurement et si $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty$, alors l'opérateur $H = -\frac{1}{2}\Delta+V$ défini comme somme de formes quadratiques, possède une résolvante compacte et par conséquent, son spectre est discret (voir [3.TheoremXII.67] par exemple). Une démonstration probabiliste de ce résultat existe, elle est due à D.RAY (voir [2.Proposition 3.4]). Récemment cette propriété a été généralisée aux fonctions V de la forme $V = V_1+V_2$ avec $V_2\in L^{n/2}(\mathbb{R}^n)$ pour $n\geq 2$, inf ess $V_1(x)>-k$ pour un réel k, et:

$$\lim_{|x|\to\infty} k+\int_{S_1(x)} \left(V_1(y)+k\right)^{-1}dy = 0$$

où $S_a(x)$ désigne la boule de centre x et de rayon $a>0$.(voir [1]). La démonstration utilise des résultats fins sur la compacité des plongements d'espaces de Sobolev. Le but de cette note est de montrer qu'il est possible de modifier légèrement la démonstration probabiliste déja mentionnée pour obtenir un résultat encore plus général.

II. HYPOTHESES. NOTATIONS:

Nous utiliserons la représentation suivante du processus du mouvement brownien: Ω est l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^n$, pour tout $t\geq 0$, X_t est la fonction t-ième coordonnée ($X_t(\omega) = \omega(t)$ si $\omega\in\Omega$), et $\mathcal{F}$ est la tribu engendrée par les applications X_t pour $t\geq 0$; W_x est la mesure de Wiener du mouvement brownien issu de $x\in\mathbb{R}^n$ à l'instant t=0, et l'espérance relativement à W_x est notée E_x.

Une fonction réelle mesurable V définie sur $\mathbb{R}^n$ est dite de classe $\mathcal{V}$ si elle admet une décomposition $V = V_1+V_2$ avec V_1 mesurable et borné inférieurement, et $V_2 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour un réel $p > \max\{1,n/2\}$ (+). Si $q \in [1,\infty]$, si $t \geq 0$, si $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ posons:

$$[T_t f](x) = E_x\{f(X_t)\exp[-\int_0^t V(X_s)ds]\} \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ainsi défini, $\{T_t; t \geq 0\}$ est un semi groupe exponentiellement borné d'opérateurs sur $L^q(\mathbb{R}^n)$. De plus, si V_1 est localement intégrable et si q est fini, ce semi groupe est fortement continu (voir [2.Section III]).

Soit maintenant $H = -\frac{1}{2}\Delta + V$ l'opérateur de Schrodinger défini comme somme de formes quadratiques sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. H est un opérateur auto-adjoint borné inférieurement, et il se trouve que e^{-tH} coincide avec T_t (voir [2.Section IV.2]). Dans le paragraphe suivant nous montrerons que, sous certaines conditions, les opérateurs T_t sont compacts; les résultats cherchés sur la résolvante de H s'en déduisent par la transformation de Laplace.

III. RESULTAT:

Rappelons tout d'abord le résultat de D.Ray:

Proposition ([2.Prop.3.4])

Si $V = V_1 - V_2$ *est un potentiel de classe* $\mathcal{V}$ *qui satisfait:*

$$\forall t > 0,\ \forall \gamma > 0, \quad \lim_{a\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} E_x\{\exp[-\gamma\int_0^t V_1(X_s)ds\ ;\ |X_t| > a\} = 0 \qquad (3.1)$$

alors, pour tout $t>0$ *et tout* $q \in [1,\infty]$, T_t *est un opérateur compact sur* $L^q(\mathbb{R}^r)$.

Et remarquons que:

Lemme:

L'énoncé (3.1) *est vrai si* V_1 *est une fonction réelle mesurable définie sur* $\mathbb{R}^n$ *qui satisfait:*

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_{S_\alpha(x)} e^{-\beta V_1(y)}\, dy = 0 \qquad (3.2)$$

pour un (et donc pour tout) réel $\alpha > 0$, *et pour tout réel* $\beta > 0$.

Démonstration:

(+) Il est bon de noter que, dans la définition de la classe $\mathcal{V}$, les hypothèses sur V_2 ne sont pas minimales. En effet il suffit de supposer que V_2 est somme de fonctions U_i qui ne dépendent que de $n_i \leq n$ variables, et qui sont uniformément localement dans L^{p_i} pour un $p_i > \max\{1,n_i/2\}$ (voir[3.page 302]pour une définition)

Soient t, γ, et ε des nombres réels strictement positifs fixés. Les trajectoires du processus de mouvement brownien sont telles qu'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que:

$$\exp[\gamma t\,|\text{inf ess } V_1|] \quad W_o\{\sup_{0 \leq u \leq t} |X_u| > \alpha\} < \varepsilon/2 \tag{3.3}$$

et telles que pour tout $p \in [1,\infty]$ il existe une constante $c(p) > 0$ pour laquelle l'on ait pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$E_x\{|f(X_s)|\} \leq c(p)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p\, dy\right)^{1/p} s^{-n/2p},$$

pour tout réel $s > 0$, et pour toute fonction mesurable f sur $\mathbb{R}^n$. Si maintenant nous fixons $p > \max\{1, n/2\}$, et si nous utilisons l'hypothèse (3.2) avec $\beta = t\gamma p$, nous obtenons l'existence d'un nombre $a > 0$ tel que:

$$|x| > a-\alpha \Rightarrow (1-n/2p)c(p)\left(\int_{S_\alpha(x)} \exp[-t\gamma p V_1(y)]\, dy\right)^{1/p} t^{-n/2p} < \varepsilon/2 \tag{3.4}$$

Par conséquent, si $x \in \mathbb{R}^n$ est tel que $|x| \leq a-\alpha$, (3.3) implique:

$$E_x\{\exp[-\gamma \int_0^t V_1(X_s)\, ds\ ;\ |X_t| > a\} \leq \varepsilon/2,$$

et s'il est tel que $|x| > a-\alpha$, nous avons:

$$E_x\{\exp[-\gamma \int_0^t V_1(X_s)\, ds\ ;\ |X_t| > a\} \leq (i) + (ii)$$

où:

$$\begin{aligned}
(i) &\equiv E_x\{\exp[-\gamma \int_0^t V_1(X_s)\, ds];\ \sup_{0 \leq u \leq t} |x-X_u| > \alpha\} \\
&\leq \exp[\gamma t\,|\text{inf ess } V_1|]\ W_o\{\sup_{0 \leq u \leq t} |X_u| > \alpha\} \\
&< \varepsilon/2
\end{aligned}$$

toujours à cause de (3.3), et:

$$\begin{aligned}
(ii) &\equiv E_x\{\exp[-\gamma \int_0^t V_1(X_s)\, ds];\ \sup_{0 \leq u \leq t} |x-X_u| \leq \alpha\} \\
&\leq \frac{1}{t}\int_0^t E_x\{\exp[-t\gamma V_1(X_s)];\ \sup_{0 \leq u \leq t} |x-X_u| \leq \alpha\}\, ds \\
&\leq \frac{1}{t}\int_0^t E_x\{\exp[-t\gamma V_1(X_s)];\ X_s \in S_\alpha(x)\}\, ds \\
&\leq (1-n/2p)\ c(p)\left(\int_{S_\alpha(x)} \exp[-t\gamma p V_1(y)]\, dy\right)^{1/p} t^{-n/2p} \\
&< \varepsilon/2,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Jensen et la relation (3.4) ∎

En réunissant les contenus du lemme et de la proposition ci-dessus nous obtenons la généralisation cherchée de [1.Theorem 2.2] :

Théorème:

Soit $V = V_1 - V_2$ *un potentiel de classe* $\mathcal{V}$ *tel que la relation* (3.2) *soit satisfaite pour un (et donc pour tout) réel* $\alpha > 0$, *et pour tout réel* $\beta > 0$. *Alors, pour tout* $q \in [1, \infty]$, *et pour tout* $t > 0$, T_t *est un opérateur compact sur* $L^q(\mathbb{R}^n)$.

Remarque:

Il est important de noter que notre hypothèse (3.2) n'est pas plus faible, mais équivalente à l'hypothèse faite en [1] sur la fonction V_1. Nous parlons de généralisation uniquement parce que, d'une part la classe $\mathcal{V}$ est plus large que la classe étudiée en [1], et d'autre part la propriété de compacité est prouvée pour le semi groupe engendré par l'opérateur de Schrödinger sur tous les espaces $L^q(\mathbb{R}^n)$ et non pas seulement sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

REFERENCES

[1] V.BENCI and D.FORTUNATO: On a Discretness Condition of the Spectrum of Schrödinger Operators with Unbounded Potential from Below. Proc. Amer. Math. Soc. 70 (1978) 163-166

[2] R.CARMONA: Regularity Properties of Shrödinger and Dirichlet Semigroups. J. Functional Analysis (à paraitre)

[3] M.REED and B.SIMON: Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators. Academic Press (1978)

René CARMONA

Département de Mathématiques
Université de Saint-Etienne
23 rue du Docteur P.Michelon
42100 SAINT-ETIENNE