Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Paul-André Meyer

Construction de quasimartingales s'annulant sur un ensemble donné

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 488-489

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__488_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

CONSTRUCTION DE QUASIMARTINGALES S'ANNULANT SUR UN ENSEMBLE DONNE

par P.A. Meyer

Dans l'article de Yor " sur le balayage des semi-martingales continues", Yor travaille sur un ensemble aléatoire M de la forme $\{X=0\}$, où X est une semi-martingale continue. Il est naturel de se demander quels sont les ensembles aléatoires fermés qui peuvent se représenter ainsi. On voudrait ici faire quelques remarques évidentes sur cette question, sans prétendre résoudre le problème en toute généralité (et sans prétendre, surtout, aborder le problème plus difficile qui consiste à caractériser les ensembles de zéros des martingales, continues ou non).

Nous nous plaçons sur un espace $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t))$ habituel, désignons par M un ensemble aléatoire progressif fermé à droite. On pose comme d'habitude $D_t(\omega)=\inf\{s>t : (s,\omega)\in M\}$, $\ell_t(\omega)=\sup\{s\leqq t : (s,\omega)\in M\}$, et $A_t=t-\ell_t$ (A_t est l'<u>âge</u> en théorie du renouvellement).

Notre première remarque est que le processus A est adapté, continu à droite, et que sa variation totale sur $[0,t]$ est au plus 2t. D'autre part, l'ensemble des zéros de A est $\overline{M}\cup\{0\}$. Si M ne contient pas 0, il faut donc modifier légèrement le processus pour avoir une semimartingale dont l'ensemble des zéros est exactement $\overline{M}$, mais cela ne présente aucune difficulté. <u>Sans la continuité</u>, <u>le problème est donc trivial</u>.

Pour essayer de construire une semimartingale " aussi continue que possible" dont l'ensemble des zéros soit $\overline{M}$, nous modifions alors A de la manière suivante, en un processus à variation finie continu (non adapté). Sur tout intervalle contigu $]a,b[$, nous suivons le graphe de (A_t) jusqu'à l'instant $a+1\wedge\frac{b-a}{2}$, puis nous joignons au point $(b,0)$ par un segment de droite (horizontal si $b=+\infty$). Le processus (B_t) ainsi construit admet $\overline{M}\cup\{0\}$ comme ensemble d'annulation - désormais nous laissons de côté la petite difficulté en 0 - <u>il est continu</u>, $\geqq 0$, et sa variation totale sur $[0,t]$ est au plus 2t.

Nous désignons maintenant par X la <u>projection optionnelle</u> de B, qui est un processus càdlàg. régulier, positif. D'après une remarque de Stricker, on a pour tout t $\mathrm{Var}_{[0,t]}(X)\leqq 2t$, où Var désigne la variation moyenne par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$: donc X est une quasimartingale sur tout intervalle $[0,t]$, et en particulier une semimartingale.

Comme B est nul sur l'ensemble optionnel $\overline{M}$, il en est de même de X. Vérifions que X ne s'annule pas hors de $\overline{M}$. D'après le théorème de section, il suffit de montrer que pour tout temps d'arrêt T dont le graphe est disjoint de $\overline{M}$, on a p.s. $X_T>0$ sur $\{T<\infty\}$. Or l'ensemble $H=\{X_T=0, T<\infty\}$ appartient à $\underline{\underline{F}}_T$, donc $\int_H B_T P = \int_H X_T P = 0$. Comme le graphe de T est disjoint de $\overline{M}$, B_T est strictement positif sur $\{T<\infty\}$, et cette condition entraîne que H est négligeable. On peut montrer de même que X_- ne s'annule pas hors de $\overline{M}$.

Reste à étudier la continuité de X. Tout d'abord, les discontinuités d'un processus régulier sont portées par des graphes de temps prévisibles T tels que $\underline{\underline{F}}_T \neq \underline{\underline{F}}_{T-}$, et de temps totalement inaccessibles. Dans le cas d'une famille de tribus comme celle du mouvement brownien, ni les uns ni les autres n'existent, <u>et donc</u> X <u>est continu</u> . Ainsi, pour la famille naturelle du mouvement brownien, tout ensemble aléatoire fermé est l'ensemble des zéros d'une semimartingale continue.

Dans le cas général, on ne peut espérer la continuité de X dans les intervalles contigus à M : ce qu'on peut espérer raisonnablement, c'est que X soit continu <u>aux points de $\overline{M}$</u> , c'est à dire que X_- soit nul sur $\overline{M}$. C'est bien clair aux points de $\overline{M}$ non isolés à gauche, et la seule difficulté tient aux extrémités droites d'intervalles contigus, i.e. aux temps d'arrêt D_t .

Mais on peut faire une remarque évidente : si X_- s'annule aux D_t, alors on a $\overline{M}=\{X_-=0\}$, <u>donc</u> $\overline{M}$ <u>est prévisible</u>. Inversement, si $\overline{M}$ est prévisible , les temps d'arrêt $D_t^- = \inf\{s \geqq t : s \in M\}$ sont des temps prévisibles dont le graphe passe dans M. Or en un tel temps T on a $X_{T-}=E[X_T | \underline{\underline{F}}_{T-}]=0$, et X y est bien continu.

Ainsi nous avons montré : tout fermé aléatoire optionnel est l'ensemble des zéros d'une semimartingale positive régulière (qui est même une quasimartingale sur tout intervalle fini). Celle-ci est continue aux points de l'ensemble si et seulement si l'ensemble est prévisible.

Si les débuts D_t sont totalement inaccessibles, le processus A est lui même régulier, et la construction n'a amené aucun progrès.