SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN-THIERRY LAPRESTÉ

Charges, poids et mesures de Lévy dans les espaces vectoriels localement convexes

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 41-71

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__41_0>

CHARGES , POIDS ET MESURES DE LEVY
DANS LES
ESPACES VECTORIELS LOCALEMENT CONVEXES

par

Jean-Thierry LAPRESTE

Université de CLERMONT II
Département de Mathématiques Appliquées
Complexe Scientifique des Cézeaux
Boite Postale N° 45
63170 AUBIERE (France)

INTRODUCTION

On présente des notions de type ou cotype pour des espaces vectoriels localement convexes qui permettent de donner des conditions suffisantes (ou nécessaires) pour qu'une mesure F sur un tel espace soit de Lévy (ie. exposant d'une certaine loi de probabilité de Radon de type "Poisson généralisé").

Dans le premier paragraphe, on introduit la notion de charge sur l'ensemble des mesures boréliennes positives de $\overline{\mathbb{R}}^+$, notion proche de celle de poids due à L. Schwartz [6] et l'on développe quelques propriétés des charges et des poids qui serviront d'outils dans la seconde partie.

Dans cette seconde partie, après avoir défini en terme de charges et poids le type et le cotype d'un E.L.C.S., on rappelle les résultats les plus crucieux concernant les lois indéfiniment divisibles. En particulier on démontre une généralisation, intéressante en soi, d'un théorème de Yurinskii sur l'intégrabilité d'exponentielles de semi-normes pour des lois de "Poisson généralisées" dont l'exposant a un support borné. Enfin ce cadre est utilisé pour retrouver des résultats de Giné, de Aranjo, Dettweiler, De Acosta et Mandrekar obtenus pour le (co)type-p Rademacher, ou les espaces de Badrikian.

Je remercie S. Chevet pour les conversations et l'aide qu'elle m'a apportés dans la mise au point de cet article.

I - CHARGES ET POIDS

§ 1

1.1. Définition : on appellera $\mathcal{M}^+(\overline{\mathbb{R}}^+)$ l'ensemble des mesures boréliennes positives sur $\overline{\mathbb{R}}^+$, ensemble qu'on munira de l'ordre ordinaire sur les mesures : si μ et $\nu \in \mathcal{M}^+(\overline{\mathbb{R}}^+)$,

$$\mu \leqslant \nu \iff \forall A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^+) \quad \mu(A) \leqslant \nu(A)$$

1.2. Définition : on appellera charge sur $\mathcal{M}^+(\overline{\mathbb{R}}^+)$, toute application ϕ de $\mathcal{M}^+(\overline{\mathbb{R}}^+)$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ telle que :

a) ϕ est croissante pour l'ordre ordinaire

b) $\forall \mu \in \mathcal{M}^+(\overline{\mathbb{R}}^+)$, $\forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}}^+$, $\phi(\mu + \alpha\,\delta_0) = \phi(\mu)$

c) $\phi(\delta_0) = 0$

1.3. Exemples de charges

1) Soit φ une fonction croissante sur $\overline{\mathbb{R}}^+$ et nulle en 0 ; l'application

$$\mu \to M_\varphi(\mu) = \int_{\overline{\mathbb{R}}^+} \varphi(t)\, d\mu(t)$$

de $\mathcal{M}^+(\overline{\mathbb{R}}^+)$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ définit une charge,

De même, si φ est croissante, positive sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\mu \to M_\varphi^*(\mu) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \varphi(t)\, d\mu(t)$$

est une charge.

Des cas particuliers intéressants sont donnés par

$$M_p(\mu) = M_p^*(\mu) = \int_{\overline{\mathbb{R}}_+} t^p\, d\mu(t) \qquad 0 < p < +\infty$$

$$M_0(\mu) = M_0^*(\mu) = \int_{\overline{\mathbb{R}}_+} \min(1,t)\, d\mu(t)$$

2) $M_\infty(\mu) = \max(\operatorname{supp} \mu)$

3) $\lambda_p(\mu) = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}_+} t^p\, \mu(]t, +\infty])$ $\qquad 0 < p < +\infty$

4) $N_a(\mu) = \mu(]a, +\infty])$ $\qquad 0 \leqslant a \leqslant +\infty$

5) $J_\alpha(\mu) = \operatorname{Min}\{a \in \overline{\mathbb{R}}_+ \;;\; \mu(]a + \infty]) \leqslant \alpha\}$

6) $\sup\limits_{0<\alpha<1} \varphi(\alpha)\, J_\alpha$ $\qquad \varphi$ fonction positive sur $]0, 1[$

7) $N_C(\mu) = \mu(C)$ $\qquad$ où C est un borélien ne contenant pas l'origine

8) la somme, le sup, l'inf, l'intégrale de toute famille de charges est une charge.

Tous les exemples de (2) à (6) donnés ici et l'exemple (1), si l'on suppose de plus que φ est continue à gauche, jouissent d'une propriété supplémentaire : leurs restrictions à l'ensemble P ($\overline{\mathbb{R}}^+$), des probabilités de Radon sur $\overline{\mathbb{R}}^+$, sont des poids au sens de L. Schwartz [6] .

Rappelons les <u>notions relatives aux poids</u> (on renvoie également à [6])
L'ensemble P ($\overline{\mathbb{R}}^+$) des probabilités de Radon sur $\overline{\mathbb{R}}^+$ (et même $\mathcal{M}^+$ ($\overline{\mathbb{R}}^+$) peut être ordonné par la relation suivante : on dit que $\mu \ll \nu$ si les masses de μ sont plus rapprochées de l'origine que celles de ν, ie. si :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}_+ ,\ \mu\, (]a + \infty]) \leqslant \nu\ (]a + \infty]\,).$$

2.1. Définition : on appelle <u>poids</u> sur P ($\overline{\mathbb{R}}^+$) une application ϕ de P ($\overline{\mathbb{R}}^+$) dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ telle que :

a) ϕ est semi continue inférieurement pour la topologie étroite,

b) ϕ est croissante pour l'ordre $\ll$ (ceci constitue la définition donnée en [6] et à laquelle on rajoutera par commodité)

c) $\phi\, (\delta_0) = 0$.

<u>Propriétés relatives aux charges et aux poids</u>

3.1. Charges sous-additives, homogènes, scalairement continues.

1) On dira qu'une charge est sous-additive si :

$$\forall\, \mu , \nu \in \mathcal{M}^+ (\overline{\mathbb{R}}^+) , \quad \phi\, (\mu + \nu) \leqslant \phi\, (\mu) + \phi\, (\nu)\ ;$$

(additive si on a égalité !)

Remarquons qu'une application sous-additive de $\mathcal{M}^+$ ($\overline{\mathbb{R}}^+$) dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ vérifiant les propriétés (a) et (c) de la définition 1.2 vérifie automatiquement (b) et est donc une charge.

2) On dira qu'une charge est (positivement) <u>homogène</u> si :

$$\forall\, \mu \in \mathcal{M}^+ (\overline{\mathbb{R}}^+) ,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}^+ ,\ \phi\, (\alpha\mu) = \alpha\, \phi\, (\mu).$$

Attention : $\alpha\mu$ est ici la mesure borélienne usuelle sur $\overline{\mathbb{R}}^+$ définie par $(\alpha\mu)\,(B) = \alpha.\mu(B)$, B borélien et l'homogénéité introduite ici n'a aucun rapport avec celle introduite en [6] pour les poids et dont nous ne nous servirons pas dans cet article.

Les charges (1), (3), (4) et (7) présentées dans l'exemple I.2.3 sont toutes positivement homogènes.

Les charges M_∞ et J_α ne le sont manifestement pas mais vérifient la propriété plus faible suivante :

3) On dira qu'une charge ϕ est <u>scalairement continue à gauche</u> si, pour toute mesure μ de $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^+)$ et toute suite $(\alpha_n)_n$ de réels positifs croissant vers 1, on a :

$$\lim_n \phi(\alpha_n \mu) = \phi(\mu).$$

Plus généralement :

4) On dira qu'une charge ϕ croit σ-continuement (ou vérifie la condition (σ-c.c)) si, pour toute suite croissante (μ_n) de mesures dans $\mathcal{M}^+(\overline{\mathbb{R}}^+)$, on a :

$$\phi(\sup_n \mu_n) = \sup_n \phi(\mu_n).$$

5) On dira qu'une charge ϕ croit τ-continuement (ou vérifie la condition (τ-c.c.)) si, pour toute famille $(\mu_i)_{i\in I}$ filtrante croissante de mesures dans $\mathcal{M}^+(\overline{\mathbb{R}}^+)$, on a :

$$\phi(\sup_{i\in I} \mu_i) = \sup_{i\in I} \phi(\mu_i)$$

Les poids M_φ, N_a et J_α vérifient la condition (τ-c.c). Les sommes et les sup. de charges vérifiant (τ-c.c) (resp. (σ-c.c)) vérifient aussi (τ-c.c) (resp (σ-c.c)). L'intégrale de charges vérifiant (σ-c.c) vérifie (σ-c.c).

3.2. Famille de poids plus forte ou plus faible que L°

1) On dira qu'une famille de poids $(\phi_i)_{i\in I}$ est <u>plus forte que L°</u>, si pour tout filtre (μ_α) de Probabilités sur $\overline{\mathbb{R}}_+$, la convergence pour tout indice $i \in I$ de $\phi_i(\mu_\alpha)$ vers 0 suivant le filtre entraîne la convergence étroite des μ_α vers δ_o.

2) $(\phi_i)_{i\in I}$ est dit <u>plus faible que L°</u> si la convergence étroite de μ_α vers δ_o entraîne la convergence de chaque $\phi_i(\mu_\alpha)$ vers 0.

3) Une famille de poids est dite équivalente à L° si elle est à la fois plus forte et plus faible que L°.

Chaque poids J_α par exemple est plus faible que L_0 et la famille $(J_\alpha)_{\alpha \leqslant 1}$ est équivalente à L_0.

3.3. Famille compacte de poids

Une famille $(\phi_i)_{i \in I}$ de poids est dite <u>compacte</u> si, pour tout $(A_i)_{i \in I}$ $A_i \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble

$$M_{(A_i)_I} = \{\mu \in P(\overline{\mathbb{R}}^+) \mid \forall i \quad \phi_i(\mu) \leqslant A_i\}$$

est compact dans $P(\mathbb{R}_+)$ (et non dans $P(\overline{\mathbb{R}}^+)$!), c'est-à-dire, d'après Prokhorov si et seulement si, pour tout $(A_i)_{i \in I}$ et $\varepsilon > 0$, il existe un réel > 0 $R_{\varepsilon,(A_i)_I}$ tel que :

$$(\forall i,\ \phi_i(\mu) \leqslant A_i) \Longrightarrow \mu\,(]\,R_{\varepsilon,(A_i)_I}, +\infty]) \leqslant \varepsilon \ .$$

Une famille plus faible que L° n'est jamais compacte. Les familles compactes usuelles sont plus fortes que L°. Le poids M_φ par exemple est compact si et seulement si $\varphi(+\infty) = +\infty$.

Les alinéas 3.2 et 3.3 généralisent légèrement les définitions données en [6]. En particulier, si l'ensemble d'indice I est réduit à un élément, on dira que le poids considéré est compact.

§ 4. <u>Familles compactes de fonctions</u>

4.1. Une famille $(\theta_i)_{i \in I}$ de fonctions sur un espace topologique X est dite compacte si les θ_i sont $\geqslant 0$ et si, pour toute famille $(M_i)_{i \in I}$ de réels positifs, l'ensemble $\bigcap_i \{\theta_i \leqslant M_i\}$ est compact.

Si l'ensemble d'indices est réduit à un élément, on dira que la fonction considérée est compacte [6] . Remarquons qu'une fonction compacte est semi-continue inférieurement et qu'une famille compacte de poids est une famille compacte de fonctions sur $P(\overline{\mathbb{R}}^+)$. Dans ce qui suit, les fonctions seront toujours supposées à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^+$.

4.2. <u>Proposition</u> : Soit X un espace topologique séparé, $(\phi_i)_i$ une famille compacte de poids, θ une fonction compacte sur X.

L'ensemble des probabilités de Radon λ sur X vérifiant :

$$\forall\ i\ ,\quad \phi_i\ (\theta\ (\lambda)) \leqslant A_i$$

est un compact équitendu de P(X) et cela pour toute famille (A_i) de réels positifs.

Preuve. Cet ensemble, d'abord, est relativement compact. En effet $(\phi_i)_i$ est compacte et donc, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un réel $R > 0$ tel que, si $\mu \in P(\overline{\mathbb{R}}^+)$

$$(\forall i,\ \phi_i(\mu) \leqslant A_i) \Longrightarrow \mu\,(\,]R + \infty]\,) \leqslant \varepsilon\ .$$

θ étant une fonction compacte, l'ensemble $\{\theta \leqslant R\}$ est un compact K de X. Si alors $\forall i\ \ \phi_i\ (\theta(\lambda)) \leqslant A_i$, on a :

$$\begin{aligned}\lambda\ (K^c) &= \lambda\ \ \{\theta > R\}\\ &= \theta(\lambda)\ (\,]R + \infty]\,) \leqslant \varepsilon\ ,\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble $\bigcap_i \{\lambda \in P(X)\ \mid\ \phi_i\ (\theta(\lambda)) \leqslant A_i\}$ est équitendu et donc, d'après Prokhorov, relativement compact dans P(X).

Reste à voir que l'ensemble est fermé. Cela résulte immédiatement de la Proposition (1,2 bis) de [6'] (ou (IV.6.1) de [6]) :

4.3. Si θ est une fonction $\geqslant 0$ s.c.i. sur un espace topologique séparé X et si ϕ est un poids, l'application $\lambda \to \phi\ (\theta(\lambda))$ est s.c.i. sur P(X).

Une autre proposition du même genre et de démonstration analogue nous servira également par la suite :

4.4. <u>Proposition</u> : Soit X un espace topologique séparé, $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille <u>dénombrable</u> de poids telle que chaque ϕ_i soit compact, $(\theta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille <u>dénombrable</u> compacte de fonctions s.c.i. sur X.

L'ensemble des probabilités de Radon λ sur X vérifiant

$$\forall\ i\ \in \mathbb{N}\ ,\ \phi_i\ (\theta_i(\lambda)) \leqslant A_i$$

est un compact équitendu de P(X) et cela, pour toute famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de réels positifs.

Preuve : De même que pour (4.2), la fermeture résulte de 4.3. Montrons la relative compacité :

Pour ε donné, chaque ϕ_i étant compacte, pour tout i, il existe R_i tel que, si λ est une probabilité de Radon sur X,

$$\phi_i\,(\theta_i(\lambda)) \leqslant A_i \Longrightarrow \theta_i(\lambda)\,(\,]R_i + \infty\,]) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Si alors :

$$\forall\, i \in \mathbb{N}\,,\quad \phi_i\,(\theta_i(\lambda)) \leqslant A_i$$

$(\theta_i)_{i\,\in\,\mathbb{N}}$ étant une famille compacte, l'ensemble $\bigcap\limits_{i\,\in\,\mathbb{N}} \{\theta_i \leqslant R_i\}$ est un compact K de X et $\lambda\,(K^c) \leqslant \sum\limits_{i\,\in\,\mathbb{N}} \lambda\,(\,\{\theta_i \leqslant R_i\}) \leqslant \varepsilon$ Q.E.D.

§ 5. Ordre d'une mesure

5.1. Si ϕ est un poids, θ une fonction $\geqslant 0$ s.c.i. sur un espace topologique X et μ une mesure de probabilité de Radon sur X, il n'y a pas de difficultés à définir l'expression $\phi\,(\mu,\,\theta)$ comme $\phi\,(\theta(\mu))$, où $\theta(\mu)$ est la mesure image de μ, par θ, sur $\overline{\mathbb{R}}^+$ et on ne s'en est pas privé dans le paragraphe précédent. On donnera donc la définition suivante un peu différente de celle de [6] :

5.2. Définition : Soit $(\phi_i)_{i\,\in\,I}$ une famille de poids, $(\theta_i)_{i\,\in\,I}$ une famille de fonctions $\geqslant 0$ s.c.i. sur X, on dira qu'une mesure de Probabilité de Radon sur X est d'ordre $(\phi_i,\,\theta_i)_{i\,\in\,I}$ si :

$$\forall\, i \in I,\quad \phi_i\,(\mu,\,\theta_i) < +\infty\,.$$

5.3. Dans le cas où ϕ est une charge et μ une mesure borélienne sur X , on donne la définition suivante tout à fait analogue.

5.4. Définition : Soit $(\phi_i)_{i\,\in\,I}$ une famille de charges et $(\theta_i)_{i\,\in\,I}$ une famille de fonctions $\geqslant 0$ s.c.i. sur X, on dira qu'une mesure μ sur X est d'ordre $(\phi_i,\,\theta_i)_{i\,\in\,I}$ si et seulement si

$$\forall\, i \in I,\quad \phi_i\,(\mu,\,\theta_i) < +\infty\,.$$

II - TYPE, COTYPE ET MESURES DE LEVY

§ 1. Type et cotype

Dans tout ce paragraphe, les $(\theta_i)_{i \in I}$, η sont des fonctions $\geqslant 0$ semi-continues inférieurement sur un e.l.c.s. E.

1.1. Définition : Soit $(\phi_i)_{i \in I}$ une famille de charges et ψ un poids. On dira que l'espace L.C.S. E est de type $((\phi_i, \theta_i)_{i \in I}, (\psi, \eta))$ si et seulement si, pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de réels positifs, il existe un réel positif B tel que, pour toute famille finie (X_k) de variables aléatoires(*) indépendantes symétriques (v.a.i.s.) à valeurs dans E, on ait :

$$(\forall\, i \in I,\ \phi_n\, (\sum_k \mathcal{L}(X_k),\ \theta_i) \leqslant A_i)$$
$$\Longrightarrow\ \psi\, (\mathcal{L}\, (\sum_k X_k),\ \eta) \leqslant B.$$

Il est immédiat qu'un e.l.c.s. E est de type $((M_1, \theta), (M_1, \theta))$, avec θ semi-norme s.c.i. sur E ; et qu'un espace nucléaire est de type $((M_2, \theta), (M_2, \theta))$ avec θ semi-norme continue sur E.

1.2. Définition : soit $(\phi_i)_{i \in I}$ une famille de points et ψ une charge. On dira qu'un e.l.c.s. E est de cotype $((\phi_i, \theta_i)_{i \in I}, (\psi, \eta))$ si et seulement si, pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de réels positifs, il existe un réel positif B tel que, pour toute famille finie (X_k) de variables aléatoires indépendantes symétriques à valeurs dans E, on ait :

$$\forall\, i \qquad \phi_i\, (\mathcal{L}\,(\sum_k X_k)\ ,\ \theta_i) \leqslant A_i$$
$$\Longrightarrow\ \psi\ (\sum_k \mathcal{L}(X_k),\ \eta) \quad \leqslant B$$

(*) Les variables aléatoires considérées dans cet article seront toujours supposées Lusin-mesurables.

1.3. Le cas particulier le plus simple est celui où E est un espace de Banach, l'ensemble des indices I est réduit à un seul élément, θ et η coïncident avec la norme sur E et ϕ et ψ avec M_p (charge ou poids !).

On retrouve alors des définitions respectives équivalentes au type (cotype) p-Rademacher [4].

par exemple, dans ce cas, le type s'écrit

$$\sum_k E\,||X_k||^p \leqslant 1 \implies E\,||\sum_k X_k||^p \leqslant B$$

ou encore, par homogénéité,

$$E\,||\sum_k X_k||^p \leqslant B \sum_k E\,||X_k||^p .$$

1.4. Pour donner une idée de ce que peut représenter la notion de cotype, considérons le cas particulier suivant :

$(p_l)_{l\in L}$ étant une famille de semi-normes sur E engendrant la topologie de E et $(\phi_k)_{k\in K}$ une famille de poids équivalente à L° , on se place dans le cas où :

1) $I = L \times K$;

2) $\forall\ (l,k) \in L \times K$, $\phi_{l,k} = \phi_k$ et $\theta_{l,k} = p_l$;

3) ψ est une charge additive et η est symétrique.

Si on prend un choix particulier de X_i : $X_i = \varepsilon_i\, x_i$ où $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de Bernoulli et les x_i sont des vecteurs de E , on obtient que, si E est de type $((\phi_i,\theta_i)_{i\in I}$, $(\psi,\eta))$, la bornitude en probabilité des sommes partielles de la série aléatoire $\sum_1^n \varepsilon_i\, x_i$ implique l'appartenance de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ à un certain espace de suites qui s'exprime en fonction de ψ et η.

Evidemment cette dernière condition n'est pas en général équivalente au cotype ; c'est cependant vrai dans le cas classique évoqué en 1.3 (on renvoie à [4])

Etendons légèrement les définitions :

Si l'espace E est de (co) type $((\phi_i,\theta_i)_{i\in I}$, $(\psi_j\ \eta_j))$ pour tous les indices j d'une famille J, on dira qu'il est de co(type) $((\phi_i,\theta_i)_{i\in I}$, $(\phi_j\ \eta_j)_{j\in J})$.

§ 2 - Mesures de Lévy

2.1. Dans ce qui suit, E est un e.l.c.s. complet et F une mesure borélienne positive sur E vérifiant la condition suivante :

$$(c)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Pour tout voisinage ouvert de } 0,\ \Omega \text{ la mesure sur } E \\ \qquad F_{\restriction \Omega^c} \quad : A \to F\,(A \cap \Omega^c) \\ \text{est finie et de Radon sur } E \end{array}\right.$$

2.2. Remarques

1. Dans le cas où E est un espace de Banach, la condition (c) peut être remplacée par :

$$(c')\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Pour tout réel } \varepsilon > 0, \text{ la mesure } F_\varepsilon \text{ définie sur } E \text{ par} \\ \qquad F_\varepsilon(A) = F\,(A \cap \{\|\ \ \| \geqslant \varepsilon\}) \\ \text{est finie et de Radon.} \end{array}\right.$$

2. On notera $\tilde{F}$ la mesure définie sur E à partir de F par $\tilde{F}(A) = F(A) + F(-A)$.

3. Si E est un Banach et $0 < \varepsilon < \alpha \leqslant \infty$, $F_{\varepsilon,\alpha}$ désignera la mesure, restriction de F à la couronne $\{\varepsilon \leqslant \|.\| < \alpha\}$.

2.3. Définition : soit F une mesure finie positive et de Radon sur E. La loi exponentielle associée à F n'est autre que la probabilité de Radon sur E :

$$e(F) = e^{-F(E)}\ (\delta_o + \sum_{k\geqslant 1} \frac{F^{*k}}{k!}).$$

Rappelons que

- $e\,(\lambda\ \delta_o) = e(0) = \delta_o\ ,\ \lambda \geqslant 0$;
- $e\,(\lambda\ \delta_a)$ = loi de Poisson usuelle de saut a ($\lambda \geqslant 0$) ;
- $e\,(F+G) = e(F) * e(G)$, si G est également une mesure de Radon finie sur E.

Par suite

$$e(F) = e(F_o)\ ,$$

où $F_o = F - F\{o\}\ \delta_o$.

Ainsi dans le cas où F est une mesure positive vérifiant (c) avec $F_o(E) < \infty$ et $F\{0\} = +\infty$, on peut encore définir e(F) en posant :

$$e(F) = e(F_o).$$

2.4. Définition : on appelle <u>loi de Poisson</u> sur E toute probabilité de Radon sur E de la forme :

$$\mu = e(F),$$

avec F mesure de Radon finie positive sur E.

2.5. Définition : on appelle <u>mesure de Lévy</u> sur E toute mesure borélienne positive sur E vérifiant (c) et telle que la famille $\{e\ (F_{\restriction \Omega^c}),\ \Omega \in \mathcal{G}\}$, où $\mathcal{G}$ est la famille des voisinages ouverts de 0, est équitendue à une translation près.

2.6. Remarque : on sait que F est une mesure de Lévy sur E si et seulement si $\tilde{F}$ en est une, grâce à un lemme classique de Tortrat.

2.7. Définition : on appelle <u>loi de Poisson généralisée</u> sur E, toute probabilité de Radon μ sur E pour laquelle il existe une mesure de Lévy F sur E et une famille $(a_\Omega)_{\Omega \in \mathcal{G}}$ de points de E tels que $\{e\ (F_{\restriction \Omega^c}) * \delta_{a_\Omega},\ \Omega \in \mathcal{G}\}$ soit équitendue et tels que μ soit adhérent au filtre $(e\ (F_{\restriction \Omega^c}) * \delta_{a_\Omega})_{\Omega \in \mathcal{G}}$. F sera appelé <u>exposant</u> de μ.

Il est bien connu que :

2.8.

1) Si μ et μ' sont deux lois de Poisson généralisées sur E ayant même exposant, alors

$$\mu = \delta_a * \mu' \quad \text{avec} \quad a \in E.$$

Ainsi si F est une mesure de Lévy symétrique, le filtre $(e\ (F_{\restriction \Omega^c}))_{\Omega \in \mathcal{G}}$ converge.

2) Si μ est une probabilité de Radon indéfiniment divisible sur E, μ s'écrit de manière unique

$$\mu = \gamma * \nu\ ,$$

avec γ gaussienne centrée et ν loi de Poisson généralisée (Tortrat [7]).

Ces deux résultats peuvent être d'ailleurs obtenus comme corollaire du théorème suivant dû à Dettweiler [3] qui caractérise les fonctions caractéristiques des lois indéfiniment divisibles.

2.9. Théorème : une probabilité de Radon μ sur E est indéfiniment divisible si et seulement si il existe :

α) un élément a de E,

β) une forme quadratique positive Q sur E,

γ) un compact convexe équilibré K et une mesure de Lévy F telle que $F(K^c) < +\infty$,

tels que la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ et μ s'écrive pour $y \in E'$

$$\hat{\mu}(y) = \exp \left[i < a,y > - Q(y) + \int_E h_k(x,y)\, dF(x) \right]$$

où $h_k(x,y) = e^{i<x,y>} - 1 - i < x,y > 1_K(x)$, $x \in E$, $y \in E'$ (le triplet (a,Q,F) associé à h_k étant alors unique).

Il est classique (c'est le théorème de Lévy-Khintchine) que si $E = \mathbb{R}^n$ (ou même E = H avec H espace de Hilbert séparable) qu'une mesure F vérifiant (c') est la mesure de Lévy d'une loi i.d. de Radon sur E ssi

$$\text{(O)} \qquad \int_{\{||x||\leq 1\}} ||x||^2 \, dF(x) < +\infty .$$

Cette condition permet évidemment dans le théorème précédent, quitte à modifier la partie Dirac de la représentation, de remplacer le noyau h_k par le noyau classique(*)

$$K_2(x,y) = e^{i<x,y>} - 1 - \frac{i < x,y >}{1 + ||x||^2}$$

Dans le cas d'un espace de Banach général, la condition (O) peut n'être ni nécessaire, ni suffisante pour que F soit une mesure de Lévy et le noyau n'est pas adapté dans tous les cas (cf. [1] pour un contre-exemple).

(*)Utiliser le noyau K_2 revient à prendre dans la définition 2.7

$$a_\varepsilon = \int_{\{||x||\geq\varepsilon\}} \frac{x}{1 + ||x||^2} \, dF(x).$$

(Rappelons que $e(F_\varepsilon)^\wedge(y) = \exp \int (e^{i<x,y>} - 1)\, dF_\varepsilon(x))$ comme utiliser h_k revenait à considérer

$$a_\varepsilon = \int_{\{||x||\geq\varepsilon\}} 1_K(x).x \, dF(x)) .$$

Dans ce qui suit, nous allons tout d'abord donner un dernier résultat sur les mesures de Lévy. Puis faisant intervenir les conditions de type et de cotype donner pour les E.L.C.S des conditions nécessaires ou suffisantes en termes de poids pour qu'une mesure soit de Lévy.

Le théorème suivant est principalement dû à Yurinskii [8] dans le cadre des espaces de Banach et décrit une propriété d'intégrabilité d'exponentielles de semi-normes pour des mesures de Poisson à support borné.

2.10. Théorème : soit E un e.l.c.s., μ une loi de Poisson généralisée sur E d'exposant F , K un borné mesurable symétrique de E et θ une semi-norme continue sur E. Notons $\tilde{\mu}_K$ la loi de Poisson généralisée symétrique d'exposant $\tilde{F}_{\upharpoonright K}$. Alors

(1) Il existe un réel $\lambda > 0$ tel que

$$(*) \qquad \int \exp (\lambda \ \theta(x)) \, d\tilde{\mu}_K(x) < \infty \quad ;$$

(2) de plus, si λ_θ (K) désigne le plus grand λ tel que (*) et si $(\Omega_i)_{i \in I}$ est une base de filtre de voisinages ouverts symétriques de l'origine,

$$\lim_i \lambda_\theta (K \cap \Omega_i) = + \infty .$$

Preuve de la partie (1) du théorème 2.10 : elle est basée sur le lemme suivant :

2.11. Lemme : Soit θ une semi-norme s.c.i. sur un e.l.c.s. E. Si $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ sont n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans E et telles que

$$\sup \theta (X_i) \leqslant c \qquad \text{p.s.} \qquad \text{avec} \qquad c < + \infty ;$$

alors, pour tout entier $l > 0$,

$$P \Big(\sup_{k \leqslant n} \theta \Big(\sum_{i=1}^{k} X_i \Big) > 3\, l c \Big) \leqslant \Big(P \Big(\sup_{k \leqslant n} \theta \Big(\sum_{i=1}^{k} X_i \Big) > c\Big)\Big)^l ;$$

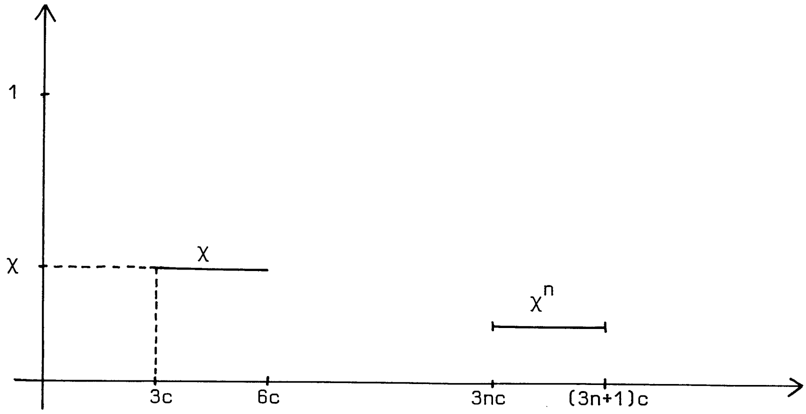
et donc, dans le cas où les X_i sont aussi symétriques,

$$P \Big(\theta \Big(\sum_1^n X_i \Big) > 3\, l c\Big) \leqslant \Big(2\, P \Big(\theta \Big(\sum_1^n X_i\Big) > c\Big)\Big)^l .$$

Admettons un instant ce lemme.

Soit c un réel positif tel que $K \subset \{\theta \leqslant c\}$ et $\chi = 12\, \tilde{\mu}_K \ \{\theta > \frac{c}{2} \} < 1$.

Soit φ la fonction en escalier suivante :



Nous allons montrer que sur $\mathbb{R}^+$

$$g(t) := \sup_{\Omega} \; e\,(\tilde{F}_{\restriction K\cap\Omega^c})\,(\theta > t) \leqslant \psi\,(t)$$

où Ω décrit une base de filtre de voisinage ouverts symétriques de l'origine dans E.

Ce qui impliquera l'assertion avec

$$\lambda < \frac{1}{3c}\ \mathrm{Log}\,\frac{1}{\chi}\,,$$

par convergence étroite des mesures.

Pour cela introduisons, pour tout entier n et tout Ω , n variables aléatoires indépendantes symétriques à valeurs dans E et de loi $e\,(\frac{\tilde{F}_{\restriction K\cap\Omega^c}}{n})$,

Soit $Y^{\Omega}_{1n}, \ldots, Y^{\Omega}_{nm}$; puis posons

$$X^{\Omega}_{in} = Y^{\Omega}_{in}\ 1_{\{\theta(Y_{in}) \leqslant c\}}\,, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n\ ;$$

et notons $\mu_{\Omega,n}$ la loi commune des variables aléatoires $X^{\Omega}_{1,n}, \ldots, X^{\Omega}_{nn}$.

Trivialement

$$\mu_{\Omega,n} = \left(e\,(\frac{\tilde{F}_{\restriction K\cap\Omega^c}}{n})\right) 1_{\{\theta \leqslant c\}} \quad + e\ (\frac{\tilde{F}_{\restriction K\cap\Omega^c}}{n})\ (\{\theta > c\})\ \delta_0$$

et $\sup_{i\leqslant n} \theta\,(X^{\Omega}_{in}) \leqslant c$ p.s.

Remarquons que $\mu^{*n}_{\Omega,n}$ converge étroitement vers $e\,(F_{\restriction K\cap\Omega^c})$ quand n tend vers $+\infty$, car :

$$e\left(\frac{1}{n}\,\tilde F_{\restriction K\cap\Omega^c}\right) = e^{-\frac{1}{n}\tilde F(K\cap\Omega^c)}\left(\delta_o + \frac{1}{n}\,\tilde F_{\restriction K\cap\Omega^c}\right) + G_n\,,$$

$$\mu_{\Omega,n} = e^{-\frac{1}{n}\tilde F(K\cap\Omega^c)}\left(\delta_o + \frac{1}{n}\,\tilde F_{\restriction K\cap\Omega^c}\right) + G'_n\,,$$

$$(\,K \subset \{\theta \leqslant c\}\ !)$$

avec $G_n(E) = G'_n(E) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Par suite

$$g(t) \leqslant \sup_{\Omega,n} \mu_{\Omega,n}^{*n}(\theta > t)$$

$$= \sup_{\Omega,n} P\left(\theta\,(X_{1n}^{\Omega} + \ldots + X_{nn}^{\Omega}) > t\right)$$

pour tout réel $t > 0$.

D'où, par le lemme 2.11,

$$g\,(3\,lc) \leqslant \sup_{\Omega,n}\left(2\,P\left(\theta\,(X_{1n}^{\Omega} + \ldots + X_{nn}^{\Omega}) > c\right)\right)^{l}$$

pour tout entier $l > 0$.

Mais $P\left(\theta\,(X_{1n}^{\Omega} + \ldots + X_{nn}^{\Omega}) > c\right)$

$$\leqslant P\left(\theta\,(Y_{1n}^{\Omega} + \ldots + Y_{nn}^{\Omega}) > c\right) + P\left(\sup_{1\leqslant n}\ \theta\,(Y_{in}^{\Omega} - X_{in}^{\Omega}) \neq 0\right)$$

et $P\left(\sup_{i\leqslant n}\ \theta(Y_{in}^{\Omega} - X_{in}^{\Omega}) \neq 0\right)$

$$\leqslant P\left(\sup_{i\leqslant n}\ \theta\,(Y_{in}^{\Omega}) > c\right)$$

$$\leqslant P\left(\sup_{k\leqslant n}\ \theta\,(Y_{1n}^{\Omega} + \ldots + Y_{kn}^{\Omega}) > \frac{c}{2}\right)$$

$$\leqslant 2\,P\left(\theta\,(Y_{1n}^{\Omega} + \ldots + Y_{nn}^{\Omega}) > \frac{c}{2}\right)$$

et donc

$$P\left(\theta\,(X_{1n}^{\Omega} + \ldots + X_{nn}^{\Omega}) > c\right) \leqslant 3\,P\left(\theta\,(Y_{1n}^{\Omega} + \ldots + Y_{nn}^{\Omega}) > \frac{c}{2}\right)$$

$$= 3\,e\left(\tilde F_{\restriction K\cap\Omega^c}\right)\left(\left\{\theta > \frac{c}{2}\right\}\right)$$

$$\overset{(*)}{\leqslant} 6\,\tilde\mu_K\left(\left\{\theta > \frac{c}{2}\right\}\right)$$

$$= \frac{\chi}{2}\,.$$

(*) cf. lemme II.4.2.

Par suite :

$$g\,(3\,lc) \leqslant \chi^{l}\ ,\ \text{pour tout entier } l > 0\ ;$$

et donc $g(t) \leqslant \psi\,(t)$ pour tout $t \geqslant 0$, Q.E.D.

Preuve de la partie (2) du théorème 2.10 : D'après la démonstration de l'alinéa (1) du théorème, on a :

$$\forall\, i \in I\ ,\ \lambda_\theta\ (K \cap \Omega_i) \geqslant \frac{1}{3c}\ \mathrm{Log}\ \frac{1}{12\ \tilde{\mu}_{K \cap \Omega_i}\ (\theta > \frac{c}{2})}$$

Alors $\lambda_\theta\ (K \cap \Omega_i) \xrightarrow[i]{} +\infty$, car

$$\lim_i\ \tilde{\mu}_{K \cap \Omega_i}\ (\theta > \frac{c}{2}) = 0$$

grâce à

2.12. Lemme : Soit G une mesure de Lévy symétrique sur un e.l.c.s. et ν_Ω la loi de Poisson généralisée (symétrique) d'exposant $G_{\restriction \Omega}$. Alors, si Ω parcourt le filtre des voisinages ouverts symétriques de l'origine, ν_Ω converge étroitement vers δ_0.

Démontrons à présent les deux lemmes :

Preuve du lemme 2.12 : en posant $\nu = \nu_E$ on a évidemment

$$\nu = \nu_\Omega * \nu_{\Omega^c}\ ,$$

Les mesures étant symétriques, un lemme classique de Tortrat nous indique que la famille $(\nu_\Omega)_\Omega$ est équitendue. Si alors μ est un point adhérent au filtre $(\nu_\Omega)_\Omega$, il vérifie :

$$\nu = \mu * \nu\ ,$$

ce qui prouve que $\mu = \delta_0$ (car $\hat{\nu}$ ne s'annule pas), QED.

Preuve du lemme 2.11 : Soit l un entier, $l > 1$ et

$$\tau = \inf\ \{ i\ ;\ \theta\,(X_1 + \dots + X_i) > 3\,(l-1)\,c \}$$

On a

$$P\,(\sup_{k\leqslant n} \theta\,(X_1 + \dots + X_k) > 3\,lc) =$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} P\,(\sup_{k\leqslant n} \theta\,(X_1 + \dots + X_k) > 3\,lc\ ,\ \tau = i)$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant n} P\,(\sup_{1\leqslant k\leqslant n} \theta\,(X_1 + \dots + X_k) > 3\,lc,\ \tau = i)$$

$$(\cdot) \leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant n} P\,(\sup_{i+1\leqslant k\leqslant n} \theta\,(X_{i+1} + \dots + X_k) > 2\,c\ ,\ \tau = i)$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} P\,(\sup_{i+1\leqslant k\leqslant n} \theta\,(X_{i+1} + \dots + X_k) > 2\,c)\,.\,P\,(\tau = i)$$

$$\leqslant \sup_{1\leqslant i<k\leqslant n} P\,(\sup_{i<k<n} \theta\,(X_{i+1} + \dots + X_k) > 2\,c) \sum_{1\leqslant i\leqslant n} P\,(\tau = i)$$

$$\leqslant P\,(\sup_{k\leqslant n} \theta\,(X_1 + \dots + X_k) > c)\ .\ P\,(\sup_{k\leqslant n} \theta\,(X_1 + \dots + X_k) > 3\,(l-1)\,c).$$

Et par récurrence sur l on obtient le lemme 2.11.

2.13. Les assertions du théorème 2.10 sont encore vraies lorsque θ est une semi-norme (finie ou non) s.c.i. vérifiant

$$e\,(F_{\restriction K})\ (\theta = +\infty) = 0$$

et

$$K \subset \{\theta \leqslant c\}\quad \text{pour un certain réel } c > 0.$$

Donnons deux applications du théorème 2.10 :

2.14. Proposition : Soit F une mesure de Lévy symétrique sur un e.l.c.s. complet E. Alors il existe un compact disqué K de E tel que :

(1) $F_{\restriction K^c}$ est finie ;

(2) pour toute semi-norme continue θ sur E et tout réel $p > 0$, les lois de Poisson généralisée d'exposant $F_{\restriction K}$ sont d'ordre (M_p, θ).

Preuve : c'est une conséquence immédiate des théorèmes (2.9) et (2.10).

$(\cdot)$ $\tau = i \Longrightarrow \theta(X_1 + \dots + X_i) \leqslant 3\,(l-1)\,c + c < 3\,l\,c$;

si $\theta\,(X_1 + \dots + X_k) > 3\,lc$ avec $i \leqslant k \leqslant n$, et si $\tau = i$

$$3\,lc < \theta\,(X_1 + \dots + X_k) \leqslant \theta\,(X_1 + \dots + X_{i-1}) + \theta\,(X_i) + \theta\,(X_{i=1} + \dots + X_k)$$

$$\leqslant 3\,(l-1)\,c + c + \theta\,(X_{i+1} + \dots + X_k).$$

2.15. Proposition : Soit F une mesure de Lévy symétrique sur un e.l.c.s. E et B un borné mesurable symétrique de E. Alors :

(1) $\forall\, x' \in B'$, $\quad \int |\langle x, x'\rangle|^2 \, dF_{\restriction B}(x) = \int |\langle x, x'\rangle|^2 \, d\mu_B(x)$,

où μ_B est la loi de Poisson généralisée symétrique d'exposant $F_{\restriction B}$;

(2) pour E Fréchet, il existe un compact disqué K de E tel que

$$\sup_{x' \in K^\circ} \int \langle x, x'\rangle^2 \, dF_{\restriction B}(x) < +\infty$$

Preuve

(1) Tout d'abord, pour toute mesure finie (symétrique) positive G sur $\mathbb{R}$,

$$\int t^2 \, dG = \int t^2 \, d\,(e(G)).$$

Par suite, pour tout voisinage ouvert Ω de 0 dans E,

$$\int \langle x,x'\rangle^2 \, dF_{\restriction B \cap \Omega^c} = \int \langle x,x'\rangle^2 \, d\,(e\,(F_{\restriction B \cap \Omega^c}))$$

Maintenant, comme

$$\forall\, x' \in E' , \quad \int \langle x,x'\rangle^2 \, d\mu_B(x) < \infty$$

(cf théorème 2.9), on obtient (1) par passage à la limite suivant le filtre des voisinages de 0

(2) A cause de (1), (2) est satisfaite si et seulement si l'opérateur

$$L : x' \to \langle \cdot\, , x'\rangle$$

est continu de $c(E', E)$ dans $L^2(\mu_B)$; où $c(E', E)$ est la topologie de convergence uniforme sur les parties compactes de E.

Mais, grâce au théorème 2.10, μ_B est une probabilité de Radon sur E d'ordre 2, i.e. :

$$\int \theta^2(x) \, d\mu_B(x) < +\infty$$

pour toute semi-norme continue θ sur E. Il est alors bien connu que, si E est un Fréchet, cela implique la continuité désirée de L. (on se ramène à E séparable et on utilise le théorème de Banach-Dieudonné et le théorème de convergence dominée).

§ 3 - La condition de type .

3.1. Proposition : Soit E un e.l.c.s. de type $((\phi_i,\theta_i)_{i\in I}\ (\psi_j,\eta_j)_{j\in J})$. Soit $\tilde{F}$ une mesure de Radon symétrique finie sur E ; alors la condition :

$$\forall\, i \quad \phi_i\,(\tilde{F},\,\theta_i) \leqslant A_i\ ,$$

implique :

$$\forall\, j \quad \psi_j\,(e(\tilde{F}),\,\eta_j) \leqslant B_j\,((A_i)_{i\in I}),$$

où les B_j sont les constantes intervenant dans la définition du type relativement à chaque (ψ_j,η_j).

Preuve : pour chaque entier n, posons :

$$B_n = \exp\,(\frac{1}{n}\ \tilde{F}(E)) - 1 - \frac{1}{n}\ \tilde{F}(E)\ \ (= O\,(\frac{1}{n^2})),$$

$$\text{et}\quad \mu_n = \left[(1+\beta_n)\,\delta_o + \frac{1}{n}\ \tilde{F}\right]\ \exp\,(-\frac{1}{n}\ \tilde{F}(E)).$$

Il est facile de constater que μ_n est une loi de probabilité de Radon sur E et que μ_n^{*n} converge étroitement vers $e(\tilde{F})$.

Supposons donc que :

$$\forall\, i \quad \phi_i\,(\tilde{F},\,\theta_i) \leqslant A_i\ .$$

Alors en utilisant les propriétés (a) et (b) des charges, on obtient

$$\begin{aligned}\phi_i\,(n\,\mu_n\ ,\ \theta_i) &= \phi_i\,(\exp\,(-\frac{1}{n}\ \tilde{F}(E))\,\tilde{F}\ ,\ \theta_i)\\ &\leqslant \phi_i\ \ (\tilde{F}\ ,\ \theta_i) \leqslant A_i\ .\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall\, i,\ \forall\, n,\ \phi_i\ (n\,\mu_n,\ \theta_i) \leqslant A_i.$$

La loi μ_n étant symétrique, il est clair que la condition de type entraîne alors :

$$\forall\, j,\ \forall\, n,\ \psi_j\ (\mu_n^{*n}\ ,\ \eta_j)\ \leqslant\ B_j\ ;$$

et enfin :

$\forall\, j \quad \psi_j\ \ (e\ (\tilde{F}),\ \eta_j) \leqslant B_j$, puisque les ψ_j sont des poids et que l'on a convergence étroite des mesures. (Cf. I.4.3).

De cette proposition, on ressort le premier résultat suivant :

3.2. Théorème : soit E un e.l.c.s. de type $((\phi_i\ \theta_i)_{i\in I}\ ,\ (\psi_j,\ \eta)_{j\in J})$ où :

(1) Les ψ_j , $j \in J$ forment une famille compacte de poids ;

(2) η est la restriction à E d'une fonction compacte η_1 sur un E.L.C.S. $(E_1.\tau)$ contenant E continuement.

Alors une condition suffisante pour qu'une mesure symétrique $\tilde{F}$ sur E, vérifiant la condition (c) (de l'alinéa II.2.1) soit de Lévy sur (E_1,τ) (*) est qu'il existe un ensemble mesurable, symétrique A de E tel que :

(α) $\tilde{F}_{\restriction A}$ soit d'ordre $(\phi_i,\ \theta_i)_{i\in I}$

(β) $\tilde{F}_{\restriction A^c}$ soit finie et de Radon

Preuve : il suffit évidemment de montrer que $\tilde{F}_{\restriction A}$ est dans ces conditions de Lévy sur (E_1,τ)

Soit pour cela $\mathcal{G}_E$ (resp. $\mathcal{G}_E$) le filtre des voisinages ouverts équilibrés de l'origine dans E (resp. dans (E_1,τ)). Par la croissance des ϕ_i , $i \in I$, la condition imposée implique que :

$$\forall\ i \in I,\ \forall\ \Omega \in \mathcal{G}_E \qquad \phi_i\ (\tilde{F}_{\restriction \Omega^c \cap A},\ \theta_i) \leqslant A_i < +\infty$$

et donc, par le biais de la proposition II.3.1, $\tilde{F}_{\restriction \Omega^c \cap A}$ étant une mesure de Radon finie et symétrique, on en déduit que :

$$\forall\ j \in J\ ,\ \forall\ \Omega \in \mathcal{G}_E\ ,\quad \psi_j\ (e\ (\tilde{F}_{\restriction \Omega^c \cap A},\ \eta) \leqslant B_j\ .$$

A fortiori, si u désigne l'injection canonique de E dans E_1, on a :

$$\forall\ j \in J,\ \forall\ \Omega_1 \in \mathcal{G}_{E_1}\ ,\quad \psi_j\ (e\ ((u\ (\tilde{F}_{\restriction A}))_{\restriction \Omega_1^c}\ )\ ,\ \eta_1) \leqslant B_j\ ;$$

car

$$\eta = \eta_1 \circ i\ ,\ e\ ((u\ (\tilde{F}_{\restriction A}))_{\restriction\ \Omega_1^c}\ ) = u\ (e\ (\tilde{F}_{\restriction A \cap \Omega_1^c}\ )).$$

A présent la famille ψ_j , $j \in I$, étant compacte l'ensemble des probabilités de Radon μ sur (E_1,τ) vérifiant

$$\forall\ j \in J\ ,\quad \psi_j\ (\mu,\eta_1) \leqslant B_j$$

est équitendu. Par suite u $(\tilde{F}_{\restriction A})$ est une mesure de Lévy sur (E_1,τ), QED.

(*) c'est-à-dire que l'image de F dans E_1 soit de Lévy

3.3. Remarques

1) L'ensemble mesurable symétrique A peut être choisi (s'il existe) compact à l'aide du théorème II.2.9.

2) A l'aide de la remarque II.2.6, on peut montrer facilement que la condition est encore valable si on ne suppose pas $\tilde{F}$ symétrique, mais à condition de supposer que les fonctions θ_i , $i \in I$, le sont et que les θ_i sont homogènes.

3.4. Exemple : la condition portant sur η est par exemple réalisée si E est un espace de Banach, η la norme sur E et (E_1,τ) l'espace E" muni de σ (E",E').

3.5. Corollaire : dans les conditions du théorème II.3.2, si E est un espace de Banach ayant la propriété de Radon Nikodym et si η est la norme sur E ; une condition suffisante pour que $\tilde{F}$ soit de Lévy sur E est qu'il existe un ensemble symétrique mesurable A de E et un compact faible K de E tels que :

(α) $\sup_{x' \in K^\circ} \int_A |< x, x' >|^2 \, d\tilde{F}(x) < \infty$;

(β) $\tilde{F}_{\restriction A}$ soit d'ordre $(\phi_i,\theta_i)_{i \in I}$;

(γ) $\tilde{F}_{\restriction A^c}$ soit finie et de Radon sur E.

Preuve : en effet l'image de $\tilde{F}$ sur $\sigma(E",E')$ est, par le théorème 3.4 l'exposant d'une mesure de Poisson généralisée symétrique λ sur $\sigma(E",E')$. De plus la condition (α) assure que λ provient d'une probabilité cylindrique μ sur E, celle dont la transformée de Fourier s'écrit

$$\forall x' \in E' , \qquad \hat{\mu}(x') = \exp\left(- \int (1 - \cos < x, x' >) \, d F_{\restriction A}(x)\right),$$

et que λ est scalairement concentrée sur les parties disquées faiblement compactes de E (cf. proposition 2.15).

La propriété de Radon-Nikodym de E permet alors de dire que μ est une mesure de Radon sur E et donc que $\tilde{F}$ est de Lévy sur E, QED

3.6. Exemple : Soit $\mathfrak{K}_E$ l'ensemble des compacts hilbertiens d'un espace de Badrikian E. Supposons les éléments de $\mathfrak{K}$ métrisables. Alors E est évidemment de type $((M_2, p_K), (M_2, p_K))$ pour chaque K de $\mathfrak{K}$. On retrouve ainsi la première partie du résultat de Tortrat [7], p. 324 :

3.7. Théorème : Une condition suffisante pour qu'une mesure F soit de Lévy sur E espace de Badrikian complet, dont les compacts sont métrisables, est qu'il existe un compact hilbertien K de E tel que

$$\int_K p_K^2(x)\, dF(x) < +\infty$$

et

$$F_{\restriction K^c} \text{ finie et de Radon sur E.}$$

Donnons un autre énoncé analogue à 3.2 et utilisant les familles compactes de fonctions.

3.8. Théorème : soit E un e.l.c.s. de type $((\phi_i,\theta_i)_{i\in I}\ ;\ (\psi_n,\eta_n)_{n\in\mathbb{N}})$ où :

(1) chaque ψ_n , $n \in \mathbb{N}$ est compact ;

(2) la famille $(\eta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est la restriction à E d'une famille <u>dénombrable</u> compacte de fonctions sur un espace L.C.S. (E_1,τ) contenant E continuement.

Alors une condition suffisante pour qu'une mesure <u>symétrique</u> $\tilde{F}$ sur E, vérifiant la condition (C)(de l'alinéa II.2.1) soit de Lévy sur (E_1,τ) est qu'il existe un ensemble mesurable symétrique A de E tel que

(α) $\tilde{F}_{\restriction A}$ soit d'ordre $(\phi_i,\theta_i)_{i\in I}$,

(β) $\tilde{F}_{\restriction A^c}$ soit finie et de Radon .

Preuve : La démonstration est semblable à celle du théorème II.3.2, modulo la proposition I.4.4.

Le contenu de la Remarque II.3.3 s'applique en totalité à cet énoncé.

Nous allons à présent nous intéresser à une propriété légèrement plus forte que le type et qui permet dans certains cas d'éviter le passage par E_1.

3.9. Définition : on dira qu'un e.l.c.s. est de <u>type fort</u> $(\phi_i,\theta_i)_{i\in I}$, $(\psi_j,\eta_j)_{j\in J})$ s'il est de type $((\phi_i,\theta_i)_{i\in I}$, $(\psi_j,\eta_j)_{j\in J})$ et que la condition :

pour tout $i \in I$, A_i tend vers 0 implique que l'on peut choisir les B_j vérifiant pour chaque j la même condition.

3.10. Définition : soit X un espace topologique et (ϕ,θ) un couple formé d'une charge et d'une fonction $\geqslant 0$ s.c.i. On dira que (ϕ,θ) possède la <u>propriété</u> de <u>Beppo</u> si, pour toute mesure $\geqslant 0$, F sur X d'ordre (ϕ,θ) et toute famille décroissante $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Boréliens de X tels que $\phi\,(F_{\restriction \bigcap_n \Omega_n}, \theta) = 0$,

$$\lim_n \downarrow \phi(F_{\restriction \Omega_n}, \theta) = 0$$

On dira que ϕ a la propriété de Beppo si, pour toute fonction $\geqslant 0$ s.c.i., (ϕ,θ) possède la propriété de Beppo.

Une charge additive et vérifiant (σ c.c.) a la propriété de Beppo. C'est le cas par exemple des charges M_φ .

3.11. Théorème : soit E un espace de Fréchet de type <u>fort</u> $((\phi_i,\theta_i)_{i \in I}\, , (\psi_j,\eta_j)_{j \in J})$ où :

(1) pour tout i de I , (ϕ_i,θ_i) est de Beppo ;

(2) pour tout j de J , ψ_j est plus fort que L^o ;

(3) $(\eta_j)_{j \in J}$ est une famille de semi-normes engendrant la topologie de E.

Alors une condition suffisante pour qu'une mesure symétrique $\tilde{F}$ vérifiant la condition (c) (de l'alinéa II.2.1) soit de Lévy sur E est qu'il existe dans E un ensemble équilibré mesurable B (pour la topologie de E) tel que

(α) $\tilde{F}_{\restriction B}$ soit d'ordre $(\phi_i,\theta_i)_{i \in I}$;

(β) $\tilde{F}_{\restriction B^c}$ soit finie et de Radon .

Preuve : encore une fois, il suffit de considérer $\tilde{F}_{\restriction B}$.

Soit Ω_n un système fondamental de voisinages ouverts équilibrés de 0 dans E. On peut évidemment supposer la famille (Ω_n) décroissante et

$$F_{\restriction B \cap \bigcap_n \Omega_n} = F\,(o)\;\delta_o$$

Soit $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ des variables aléatoires indépendantes symétriques telles que

$$\mathcal{L}\,(X_1) = e\,(F_{\restriction \Omega^c})\ ,$$

$$\mathcal{L}(X_i) = e\,(F_{\restriction \Omega_1^c \cap \Omega_{i-1}}) \qquad i \geqslant 2\ ,$$

les complémentaires étant pris dans B. Il est clair alors que $\mathcal{L}(\sum_1^n X_i) = e\,(F_{\restriction \Omega_n^c})$, de plus la condition de Beppo et le type fort impliquent que

$$\forall\, j \in J\ ,\ \lim_k \sup_{l>k}\ \psi_j\ \ (e\,(F_{\restriction \Omega_1^c \,\cap\, \Omega_k})\ ,\ \eta_j) = 0\ .$$

Chaque ψ_j , $j \in J$ étant plus fort que L° et les η_j engendrant la topologie de E , on en déduit que la série $\sum_{i=0}^n X_i$ est de Cauchy en probabilité et donc converge vers une v.a. dont la loi ne peut être qu'une loi de Poisson généralisée d'exposant $F_{\restriction B}$. QED.

Encore une fois le contenu de la remarque 3.3 s'applique à cet énoncé.

3.12. Remarque : si E est un espace de Banach de type p-Rademacher, le choix pour B de la boule unité de E redonne le résultat de [5], [2] (il est clair que ce choix est toujours possible dans le cas d'un espace de Banach : la boule unité est à la fois bornée et ouverte !) :

Si E est un espace de Banach de type p-Rademacher une condition suffisante pour qu'une mesure F sur E vérifiant (c') soit une mesure de Lévy sur E est que

$$\int_{\{||x||\leqslant 1\}} ||x||^p \ \ dF(x) < +\infty$$

3.13. Définition : on dira qu'un e.l.c.s. E est de type-p s'il existe une famille de semi-normes $(\theta_i)_{i\in I}$ engendrant la topologie de E et telles que E soit de type $((M_p,\theta_i)_{i\in I}\ ,\ (M_p,\theta_i)_{i\in I})$.

3.14. Corollaire : si E est un espace de Fréchet de type p , une condition suffisante pour qu'une mesure F vérifiant la condition (c) de l'alinéa II.2.1 soit de Lévy sur E est qu'il existe un ensemble mesurable, symétrique et métrisable (pour la topologie) de E, soit B tel que

(α) $\qquad \forall\, i\ ,\ \int_B \theta_i^p(x)\ dF(x) < +\infty$,

(β) $\qquad F_{\restriction B^c}$ est finie et de Radon ,

Les fonctions $(\theta_i)_{i\in I}$ étant les semi-normes intervenant dans la définition du type p de E.

§ 4 - La condition de cotype

Débutons par deux lemmes :

4.1. Lemme : soit ϕ une charge scalairement continue à gauche. Alors, si θ est une fonction $\geqslant 0$ s.c.i. sur un e.l.c.s. E et F une mesure de Radon finie sur E,

$$\phi\,(F,\,\theta) \leqslant \underline{\lim}_{n}\ \phi\,(n\ e\,(\tfrac{F}{n}),\,\theta)\ .$$

Preuve : par croissance de la charge ϕ, on a d'abord

$$\phi\,(n\ e\,(\tfrac{F}{n}),\,\theta) \geqslant \phi\,(\exp\,(-\,\tfrac{F(E)}{n}\,)\,F\,,\,\theta)\ ;$$

puis, par continuité à gauche,

$$\underline{\lim}_{n}\ \phi(n\ e\,(\tfrac{F}{n}),\,\theta) \geqslant \phi\,(F,\theta).$$

Le lemme suivant est classique.

4.2. Lemme : soient μ et ν deux lois de probabilité de Radon sur un e.l.c.s. E. Alors si ν est symétrique, on a :

(1) $\mu\,(C^c) \leqslant 2\ \ \mu * \nu\ \ (C^c)$ si C est un borélien convexe ;

$\nu\,(C^c) \leqslant 2\ \ \mu * \nu\ \ (C^c)$ si C est un borélien disqué ;

(2) plus généralement si φ est une fonction positive sur E telle que :

$\forall\ x,\ y \qquad \varphi\,(x) \leqslant A\ (\varphi\,(x-y) + \varphi\,(x+y))$, on a

$$\int_E \varphi\, d\mu \leqslant 2\,A \int_E \varphi\, d\,\mu * \nu\ ,$$

et

$$\int_E \varphi\, d\nu \leqslant 2\,A \int_E \varphi\, d\,\mu * \nu$$

si φ est une fonction symétrique.

Preuve

(1) est un cas particulier de (2) et

(2) est trivial

4.3. Corollaire : soient μ et ν deux lois de probabilité de Radon sur un e.l.c.s. E avec ν symétrique. Si θ est une fonction réelle $\geqslant 0$, ν , quasi-convexe, symétrique, s.c.i. sur E, on a :

$$\theta\,(\nu) \ll 2\,\theta\,(\mu * \nu)\ .$$

4.4. Définition : on dira qu'une famille $(\phi_i, \theta_i)_{i \in I}$ où les ϕ_i sont des poids et les θ_i des fonctions s.c.i., $\geqslant 0$, (quasi-convexes) sur un e.v.t. X vérifie la condition (δ_2) si pour toute mesure de probabilité symétrique sur X d'ordre $(\phi_i, \theta_i)_{i \in I}$, il existe une famille $(A_i)_{i \in I}$ de réels > 0, tel que pour tout facteur symétrique ν de μ on ait :

$$\forall\, i \qquad \phi_i\,(\nu,\, \theta_i) \leqslant A_i\ .$$

4.5. Remarque : si les ϕ_i sont les restrictions à $P\,(\overline{\mathbb{R}}^+)$ de charges ϕ_i' sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$, il est facile de voir à partir du corollaire 4.3 que la famille $(\phi_i, \theta_i)_{i \in I}$ vérifie (δ_2) dès que les ϕ_i' sont croissantes pour $\ll$ et la famille $(\phi_i')_{i \in I}$ vérifie la condition (Δ_2) i.e. : si pour tout $\lambda \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{R}}^+)$ tel que $(\forall\, i,\ \phi_i'(\lambda) < \infty\,)$ l'on ait $(\forall\, i,\ \phi_i'\,(2\lambda) < \infty\,)$.

Les charges M_φ, la famille de charges $(J_\alpha)_{\alpha<1}$ vérifient la condition (Δ_2).

<u>Preuve du Corollaire 4.3</u>

θ étant quasi-convexe, par définition les ensembles $\{\theta \leqslant a\}$, $a > 0$ sont convexes et le lemme 4.2 donne :

$$\mu\,(\{\theta \leqslant a\}^c) \leqslant 2\ \mu * \nu\,(\{\theta \leqslant a\}^c),$$

c'est-à-dire

$$\theta(\mu)\ (]a, +\infty]) \leqslant 2\ \theta\,(\mu * \nu)\ (]a, +\infty]).$$

4.6. Théorème : soit E un e.l.c.s. de cotype $((\phi_i, \theta_i)_{i \in I},\ (\psi_j, \eta_j)_{j \in J})$ où :

(1) les fonctions θ_i, $i \in I$ sont quasi-convexes ,

(2) la famille $(\phi_i, \theta_i)_{i \in I}$ vérifie (δ_2) ,

(3) les charges ψ_j, $j \in J$ sont scalairement continues à gauche.

Supposons de plus que

(4) pour toute mesure de Lévy symétrique, G sur E, il existe un ensemble symétrique mesurable A tel que, si μ_A est la loi de Poisson généralisée symétrique d'exposant $G_{\restriction A}$, on ait :

(*) μ_A est d'ordre $(\phi_i, \theta_i)_{i \in I}$,

(**) $G_{\restriction A^c}$ est finie et de Radon.

Alors une condition nécessaire pour qu'une mesure borélienne symétrique $\tilde{F}$ soit de Lévy sur E est qu'il existe un ensemble A_1 mesurable symétrique tel que :

(α) $\forall j \sup_{\Omega \in \mathcal{G}} \psi_j (\tilde{F}_{\restriction A_1 \cap \Omega^c}, \eta_j) < +\infty$

où $\mathcal{G}$ est l'ensemble des voisinages ouverts équilibrés de 0 dans E ;

(β) $\tilde{F}_{\restriction A_1^c}$ est finie et de Radon.

Preuve : soit donc $\tilde{F}$ une mesure de Lévy sur E, symétrique et A un ensemble mesurable symétrique tel que si μ_A est la loi de Poisson généralisée symétrique associée à $\tilde{F}_{\restriction A}$ on ait :

$$\forall i \in I, \quad \phi_i (\tilde{\mu}_A, \theta_i) < +\infty$$

Comme $\forall \Omega \in \mathcal{G}$

$$\tilde{\mu}_A = \tilde{\mu}_{A \cap \Omega} * e(\tilde{F}_{\restriction A \cap \Omega^c}),$$

l'hypothèse (2) nous offre l'existence d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ de réels $\geqslant 0$ tels que

$$\forall \Omega, \forall i, \quad \phi_i (e(\tilde{F}_{\restriction A \cap \Omega^c}), \theta_i) \leqslant A_i ;$$

et donc la condition de cotype entraîne facilement :

$$\forall \Omega, \forall j, \quad \psi_j \left(n\, e\left(\frac{\tilde{F}_{\restriction A \cap \Omega^c}}{n}\right), \eta_j\right) \leqslant B_j ;$$

et en passant à la limite à l'aide du lemme 4.1 :

$$\forall \Omega, \forall j, \psi_j (\tilde{F}_{\restriction A \cap \Omega^c}, \eta_j) \leqslant B_j$$ Q.E.D.

4.7. Remarques

(1) Comme d'habitude on peut se passer de l'hypothèse F symétrique à condition de supposer que les θ_j, $j \in J$ le soient.

(2) Si E est complet, si les ϕ_i sont des poids M_p et si les θ_i sont des semi-normes continues sur E, alors la propriété (3) est vérifiée avec A compact disqué de E (cf. proposition 2.14)

(3) La preuve ci-dessus permet de montrer que l'on a aussi :

$$\forall j \quad \sup_B \psi_j (F_{\restriction A_1 \cap B}, \eta_j) < \infty,$$

où B parcourt la famille des boréliens symétriques de E tels que $F_{\restriction B}$ soit finie et de Radon sur E.

Evidemment dans l'énoncé du théorème 4.6 on serait tenté de remplacer la condition (α) par

(α') $\tilde{F}_{\restriction A_1}$ est d'ordre $(\psi_j, \eta_j)_{j \in J}$.

Il ne semble pas clair que cela soit toujours le cas. Cependant :

4.8. On peut remplacer (α) par (α') si les ψ_j croissent τ-continuement et sont croissantes pour la relation <<sur $\mathfrak{M}^+(\overline{\mathbb{R}}^+)$. C'est le cas des charges $\mathfrak{M}_\varphi$.

Plus généralement :

4.9. Si les ψ_j croissent seulement σ-continuement, on peut remplacer (α) par (α') dès que l'on sait qu'il existe une suite croissante de boréliens symétriques B_n de E tels que

$$\bigcup_n B_n \supset A_1 \setminus \{0\}$$

et

$$\forall n , \quad F_{\restriction B_n} \text{ est finie (et de Radon sur E).}$$

4.10. Théorème : dans les conditions du théorème 4.4 en supposant de plus

(3') les charges $(\psi_j)_{j \in J}$ ont la propriété (σ-c.c.) ; et dans (4)

(∗∗∗) A est métrisable.

Alors une condition nécessaire pour qu'une mesure borélienne positive symétrique $\tilde{F}$ soit de Lévy sur E est qu'il existe un ensemble A_1 mesurable symétrique (et métrisable) tel que :

(α') $\tilde{F}_{\restriction A_1}$ est d'ordre $(\psi_j,\eta_j)_{j \in J}$,

(β) $F_{\restriction A_1^c}$ est finie et de Radon.

Preuve : c'est immédiat : la métrisabilité de A_1 entraîne l'existence d'une suite décroissante $(\Omega_n)_n$ de voisinages ouverts équilibrés de 0 tels que

$$\bigcup_n \Omega_n^c \supset A_1 \setminus \{0\}$$

Il suffit alors d'appliquer (4.8) avec $B_n = \Omega_n^c$.

Bien entendu si les compacts de E sont métrisables, la condition (∗∗∗) est automatiquement vérifiée (cf. théorème 2.9).

4.11. Théorème : soit E un e.l.c.s. de cotype $[(\phi_i,\theta_i)_{i\in I}\ (\psi_j,\eta_j)_{j\in J}]$ où

(1) les fonctions $\theta_{i,i\in I}$ sont quasi-convexes $\geqslant 0$,

(2) les charges $(\psi_j)_{j\in J}$ sont scalairement continue à gauche,

(3) les charges $(\psi_j)_{j\in J}$ ont la propriété (σ c.c.) .

Supposons de plus que pour toute mesure de Lévy symétrique G sur E, il existe un ensemble équilibré mesurable borné A tel que si μ_A est la loi de Poisson généralisée d'exposant $G_{\restriction A}$ on ait :

(*) μ_A est d'ordre $(\phi_i,\theta_i)_{i\in I}$,

(**) $\forall\ \varepsilon > 0$, $G_{\restriction(\varepsilon A)^c}$ est finie et de Radon .

Alors une condition nécessaire pour qu'une mesure borélienne symétrique $\tilde{F}$ soit de Lévy sur E est qu'il existe un ensemble A_1 mesurable équilibré et borné tel que

(α) $\forall\ j$ $F_{\restriction A_1}$ est d'ordre $(\psi_i,\theta_i)_{i\in I}$,

(β) $\forall\ \varepsilon > 0$ $F_{\restriction(\varepsilon A_1)^c}$ est finie et de Radon .

Preuve : il suffit d'appliquer (4.9) avec $B_n = \frac{1}{n}\ A_1^c$.

Ce dernier énoncé a l'avantage d'éviter toute référence à la métrisabilité de l'espace, mais la condition (**) n'est pas facile à vérifier dans les applications.

A présent le théorème II.2.8 permet d'énoncer divers corollaires en particulier le résultat bien connu [2] , [5] pour les espaces de Banach de cotype p-Rademacher :

Une condition nécessaire pour qu'une mesure F sur un espace de Banach de cotype p soit de Lévy est que :

$$\int_{\{||x||\leqslant 1\}} ||x||^p\ dF(x) < +\infty\ .$$

4.12. Définition : soit E un e.l.c.s., on dira que E est de cotype p s'il existe une famille $(\theta_i)_{i\in I}$ de semi-normes sur E engendrant la topologie de E, telle que E

E soit de cotype $((M_p,\theta_i)_{i\in I}, (M_p,\theta_i)_{i\in I})$.

Alors, grâce à 4.8 et 2.14, le théorème 4.6 nous donne :

4.13. Proposition : soit E un e.l.c.s. complet de cotype p , alors pour toute mesure de Lévy F sur E il existe un ensemble (borné) mesurable A (et même un compact disqué A) dans E tel que :

(1) $F_{\restriction A}$ soit d'ordre $(M_p,\theta_i)_{i\in I}$,

(2) $F_{\restriction A^c}$ soit finie et de Radon sur E.

4.14. Proposition : si E est un espace de Fréchet nucléaire, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une mesure F vérifiant la condition (c) (de l'alinéa II.2.1) soit de Lévy sur E est que pour toute semi norme hilbertienne continue sur E, soit θ et pour un compact équilibré K

(1) $\int_K \theta^2(x)\, dF(x) < +\infty$,

(2) $F_{\restriction K^c}$ soit finie et de Radon .

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ARAUJO, On infinitely divisible laws in C [01] , Proc. A.M.S. 51, (1975), 179-185.

[2] A. ARAUJO et E. GINE, Cotype and type in Banach spaces. Ann. of Prob., Vol. 6 n° 4, (Août 78), p. 637

[3] E. DETTWEILER, Grenzwertsäte für Wahrschenlichkeitmaße and Badrikianshen Raüme, Z. Wahrschenlichkeitstheorie verw. Gebiete 34, (1976), 285-311.

[4] J. HOFFMANN-JØRGENSEN, Probability in Banach spaces, preprint.

[5] G.G. HAMEDANI et V. MANDREKAR, Lévy-Khintchine representation and Banach spaces of type and cotype, (1977) (à paraître dans Studia Math. vol. 63).

[6] L. SCHWARTZ, Séminaire L. Schwartz, applications radonifiantes 1969-70, exposé IV.

[6'] L. SCHWARTZ, Probabilités cylindriques et applications radonifiantes, Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo, vol. 18, n° 2, (1970), 139-286.

[7] A. TORTRAT, Sur la structure des lois i.d. dans les espaces vectoriels, Z. Wahrschenlichkeitstheorie verw. Gebiete 11, (1969), 311-326.

[8] V.V. YURINSKI, On infinitely divisible distributions, Theor. Prob. and its appl. 19, (1974), 297-308.