

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MARC YOR

## Quelques épilogues

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 13 (1979), p. 400-406

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1979\\_\\_13\\_\\_400\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__400_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## QUELQUES EPILOGUES

Marc YOR

J'ai rassemblé ci-dessous, à la demande de P.A. Meyer, divers résultats qui sont autant de réponses à des questions posées, de façon plus ou moins explicite, dans les deux précédents volumes du Séminaire.

$[\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P]$  est un espace de probabilité filtré vérifiant les conditions habituelles...  $\mathcal{P}$  est la tribu prévisible associée à  $(\mathcal{F}_t)$ .

### 1. ESPERANCES CONDITIONNELLES ET OPERATEURS D'INTEGRALE STOCHASTIQUE

Si  $(f_t)_{t \geq 0}$  est un processus prévisible borné, et  $X \in \mathcal{U} \stackrel{\text{déf}}{=} L^2(\mathcal{F}_\infty, P)$ , on note :

$$K_f(X) = f_0 X_0 + \int_0^\infty f(s) dX_s,$$

où  $(X_t)_{t \geq 0}$  désigne la martingale continue à droite, de variable terminale  $X$ . On définit ainsi un opérateur borné  $K_f$  de  $\mathcal{U}$  dans lui-même, appelé opérateur d'intégrale stochastique.

Dans le Séminaire XI, p. 373, Dellacherie et Stricker demandent de caractériser les sous-tribus  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{F}_\infty$ ,  $(\mathcal{F}_\infty, P)$  complètes, telles que  $E(\cdot | \mathcal{G})$ , considéré comme opérateur de  $\mathcal{U}$  dans lui-même, soit un opérateur d'intégrale stochastique.

Jeulin et Yor ([1], proposition 8) ont montré que  $\mathcal{G}$  vérifie la propriété en question si, et seulement si, il existe un  $(\mathcal{F}_t)$  temps d'arrêt  $T$ , et un ensemble  $B \in \mathcal{F}_{T-}$ , tels que :  $T_B$  est prévisible, et

$$\mathcal{G} = \{C \in \mathcal{F}_T ; \exists C_{T-} \in \mathcal{F}_{T-}, C \cap B = C_{T-} \cap B\}.$$

## 2. GROSSISSEMENT DE FILTRATION, ET NORMES $H^p$ DE SEMI-MARTINGALES

2.1. Outre la filtration  $(\mathcal{H}_t)_{t \geq 0}$ , on suppose donnée une seconde filtration  $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ , vérifiant les conditions habituelles, et telle que :

- pour tout  $t$ ,  $\mathcal{H}_t \subseteq \mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}$ .
- toute  $(\mathcal{H}_t)$  semi-martingale est une  $(\mathcal{G}_t)$  semi-martingale.

Si  $X$  est une  $(\mathcal{H}_t)$  martingale locale, on note  $\bar{X}$  la  $(\mathcal{G}_t)$  martingale locale figurant dans la décomposition canonique de  $X$ , considérée comme  $(\mathcal{G}_t)$  semi-martingale spéciale.

D'après ([1], proposition 12), il existe, pour tout  $p \in [1, \infty[$ , une constante universelle  $c_p$  telle que  $\| \bar{X} \|_{H^p(\mathcal{G}_t)} \leq c_p \| X \|_{H^p(\mathcal{H}_t)}$ , ce qui répond de façon affirmative à la question posée par Jeulin et Yor, dans le Séminaire XII, p. 96.

2.2. Particularisons encore la situation :  $L$  désigne la fin d'un ensemble  $(\mathcal{H}_t)$  optionnel, et pour tout  $t > 0$ ,  $\mathcal{G}_t$  est la tribu engendrée par  $\mathcal{H}_t$  et  $(t < L)$ . M. Barlow d'une part, Jeulin et Yor d'autre part, ont montré que les hypothèses faites en 2.1 sont vérifiées pour le couple de filtrations  $(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ . De plus, d'après ([1], proposition 14), pour tout  $p \in [1, \infty[$ , il existe deux constantes universelles  $k_p$  et  $K_p$  telles que

$$k_p \| Y \|_{H^p(\mathcal{G}_t)} \leq \| Y \|_{H^p(\mathcal{H}_t)} \leq K_p \| Y \|_{H^p(\mathcal{G}_t)},$$

pour toute  $(\mathcal{H}_t)$  semi-martingale  $Y$ .

2.3. Considérons à nouveau un couple de filtrations générales satisfaisant les hypothèses :

- pour tout  $t$ ,  $\mathcal{H}_t \subseteq \mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}$ .
- il existe un espace de Banach  $\Theta$  constitué de  $(\mathcal{H}_t)$  martingales uniformément intégrables, et vérifiant :



- c.1) l'application  $X \rightarrow X_\infty$ , de  $\Theta$  dans  $L^1(\widehat{\mathcal{F}}, P)$ , est continue  
 c.2) toute  $(\widehat{\mathcal{F}}_t)$  martingale  $X \in \Theta$  est une  $(\mathcal{G}_t)$  quasi-martingale.

Les hypothèses faites ci-dessus entraînent l'existence d'une constante  
 $c_{\Theta, \mathcal{G}}$  telle que :

$$\forall X \in \Theta, \forall \mathcal{G} (X) \leq c_{\Theta, \mathcal{G}} \|X\|_{\Theta}.$$

Démonstration : Notons  $\mathcal{C}$  l'ensemble des couples  $\alpha = (t, a)$ , où  
 $t = (0=t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty)$ , et  $a = (a_1, \dots, a_n)$ , avec, pour tout  $i \leq n$ ,  
 $a_i$  variable  $\mathcal{G}_{t_i}$  mesurable, bornée par 1. ( $n$  varie dans  $\mathbb{N}$ ).

D'après c.1), pour tout  $\alpha \in \mathcal{C}$ , l'application  
 $X \rightarrow \ell_\alpha(X) = E \left[ \sum_{i \leq n-1} a_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \right] + E[a_n X_{t_n}]$  est une forme linéaire/continue sur  $\Theta$ ,  
 et, d'après c.2), pour tout  $X \in \Theta$ ,  $\forall \mathcal{G} (X) = \sup_{\alpha \in \mathcal{C}} \ell_\alpha(X) < \infty$ . L'existence de  
 $c_{\Theta, \mathcal{G}}$  découle alors du théorème de la borne uniforme.

Cette remarque donne une explication générale de l'existence des  
 constantes  $c_{\Theta, \mathcal{G}}$  dans les articles de Dellacherie et Meyer (Séminaire XII,  
 page 74,  $\Theta = H^1(\mathcal{F})$ ), et P.A. Meyer (Sém. XII, p. 60,  $\Theta = BMO(\mathcal{F})$ )

2.4. Rappelons le cadre de l'étude faite par P.A. Meyer dans la note :

"Sur un théorème de J. Jacod" (Sém. XII, p. 57-60).

Soit  $\pi = (A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une partition dénombrable d'ensembles  
 $\widehat{\mathcal{F}}$ -mesurables, et de probabilité strictement positive, pour tout  $i$ . Pour tout  $t$ ,  
 on note  $\mathcal{G}_t$  la tribu engendrée par  $\mathcal{F}_t$  et  $\pi$ . P.A. Meyer montre alors que toute  
 $(\widehat{\mathcal{F}}_t)$  semi-martingale est une  $(\mathcal{G}_t)$  semi-martingale, et que si, de plus, la  
 partition  $\pi$  est d'entropie finie,

d) toute martingale de  $BMO(\mathcal{F})$  est une  $\mathcal{G}$ -quasi-martingale.

On va donner ci-dessous une condition nécessaire et suffisante pour  
 que d) soit réalisée.

D'après 2.3,

$$d) \iff \sup_{\|X\|_{\text{BMO}(\mathcal{F})} \leq 1} \sup_{\alpha \in \mathcal{L}} \ell'_\alpha(X) < \infty,$$

où, avec les notations de 2.3, on note  $\ell'_\alpha(X) = \ell'_\alpha(X) + E[\bar{a}_n X_{t_n}]$ . Pour tout

$j \in \mathbb{N}$ , notons  $N_t^j = P(A_j | \mathcal{F}_t)$  (version continue à droite). On a :

$$\ell'_\alpha(X) = E[\sum_{i \leq n-1} a_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})]$$

$$= \sum_j E[\sum_i a_i 1_{A_j} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})]$$

Pour tout  $j$ , il existe  $a_i^j$  v.a.  $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurable, bornée par 1

en valeur absolue.

$$\text{D'où } \ell'_\alpha(X) = \sum_j E(\sum_i a_i^j (X_{t_{i+1}} N_{t_{i+1}}^j - X_{t_i} N_{t_i}^j))$$

$$= \sum_j E(\sum_i a_i^j (\langle X, N^j \rangle_{t_{i+1}} - \langle X, N^j \rangle_{t_i})),$$

et finalement :

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{L}} \ell'_\alpha(X) = \sum_j E\left(\int_0^\infty |d\langle X, N^j \rangle_s|\right).$$

Cette expression explicite permet d'écrire :

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{L}} \ell'_\alpha(X) = \sup_{J \in \mathbb{N}} \sup_{f_j \in \mathcal{P}, |f_j| \leq 1} E\left[\langle X; \sum_{j \leq J} f_j \cdot N^j \rangle_\infty\right],$$

et donc, par interversion des supremum,

$$d) \iff \infty > \sup_{J \in \mathbb{N}} \sup_{f_j \in \mathcal{P}, |f_j| \leq 1} \sup_{\|X\|_{\text{BMO}(\mathcal{F})} \leq 1} E\left[\langle X; \sum_{j \leq J} f_j \cdot N^j \rangle_\infty\right]$$

Or, puisque le dual de  $H^1$  est BMO, il existe deux constantes universelles  $c$  et  $c'$  telles que, pour tout  $Y \in H^1(\mathcal{F})$ ,

$$c \|Y\|_{H^1(\mathcal{F})} \leq \sup_{\|X\|_{\text{BMO}(\mathcal{F})} \leq 1} E[\langle X, Y \rangle_\infty] \leq c' \|Y\|_{H^1(\mathcal{F})}.$$

En conséquence,

$$d) \iff A \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sup_{J \in \mathbf{N}} \sup_{f_j \in \mathcal{P}; |f_j| \leq 1} \left\| \sum_{j \leq J} f_j \cdot N^j \right\|_{H^1(\mathcal{F})} < \infty.$$

Remarques :

1) La condition de Meyer : ( $\pi$  est d'entropie finie)  
implique :  $\sum_j \|N^j\|_{H^1(\mathcal{F})} < \infty$ , condition plus restrictive que :  $A < \infty$ .

2) Les arguments utilis\u00e9s pr\u00e9c\u00e9demment permettent \u00e9galement de montrer, pour tout  $p \in ]1, \infty[$ , l'\u00e9quivalence de

$d_p)$  toute martingale de  $H^p(\mathcal{F})$  est une  $\mathcal{G}$ -quasi-martingale et

$$A_q = \sup_{J \in \mathbf{N}} \sup_{f_j \in \mathcal{P}; |f_j| \leq 1} \left\| \sum_{j \leq J} f_j \cdot N^j \right\|_{H^q(\mathcal{F})} < \infty, \text{ o\u00f9 } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

### 3. CONVERGENCE DE MARTINGALES DANS $L^1$ ET DANS $H^1$ .

Dans l'\u00e9tude faite dans le S\u00e9minaire XII sur la repr\u00e9sentation des martingales \u00e0 partir du th\u00e9or\u00e8me de Douglas (p. 278, et suivantes), le r\u00e9sultat suivant joue un r\u00f4le important.

Proposition 1. Soit  $M$  une martingale locale. Soient  $(Y_t^n), (Y_t)$  des martingales uniform\u00e9ment int\u00e9grables telles que  $Y_\infty^n$  converge dans  $L^1$  vers  $Y_\infty$ . Si les martingales  $Y^n$  admettent des repr\u00e9sentations comme int\u00e9grales stochastiques pr\u00e9visibles par rapport \u00e0  $M : Y_t^n = \int_0^t \phi_s^n dM_s$ , il existe un processus pr\u00e9visible  $\phi$  tel que  $Y_t = \int_0^t \phi_s dM_s$ .

L'espace  $\mathcal{X}^1(M)$  des int\u00e9grales stochastiques pr\u00e9visibles  $\int_0^\cdot \phi(s) dM_s$ , qui appartient \u00e0  $H^1$ , \u00e9tant ferm\u00e9 pour la convergence dans  $H^1$  fort, la proposition pr\u00e9c\u00e9dente d\u00e9coule imm\u00e9diatement du r\u00e9sultat suivant ([2], Corollaire 3.1).

Proposition 2. Soient  $(Y_t^n), (Y_t)$  des martingales uniform\u00e9ment

intégrables, telles que  $Y_\infty^n$  converge vers  $Y_\infty$  dans  $L^1$ . Il existe alors une sous-suite  $(n_k)$  de  $\mathbb{N}$  et une suite de t.a  $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$  croissant vers  $+\infty$

P p.s, telles que :

- pour tout couple  $(j,k)$ ,  $(Y^{n_k})^{T_j}$ ,  $Y^{T_j} \in H^1$ .
- pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $(Y^{n_k})^{T_j} \xrightarrow{H^1} Y^{T_j}$   $(k \rightarrow \infty)$ .

Ceci permet de simplifier considérablement la rédaction faite dans le Séminaire XII (p. 279 et suivantes) en remplaçant les arguments de convergence faible dans  $L^1$  ou  $H^1$ , par des arguments analogues de convergence forte dans les mêmes espaces.

#### 4. TEMPS LOCAUX

4.1. En [3], J. Walsh exhibe une famille de semi-martingales réelles, continues, qui prennent à la fois des valeurs positives et négatives, et dont le temps local en 0 est discontinu : il s'agit des " skew Brownian motion" de paramètre  $\alpha \neq 1/2$ .

On veut ici donner des exemples généraux (en fait, très liés à ceux de Walsh) d'une telle situation.

Soit  $M$  une martingale locale continue, nulle en 0, mais non nulle. Son temps local en 0 - soit  $L^0$  - n'est donc pas nul (pourquoi ?). De plus, si  $X = aM^+ + bM^-$ , avec  $ab < 0$ ,  $X$  prend à la fois des valeurs positives et négatives. D'après la formule de Tanaka, si l'on note  $V = (\frac{a+b}{2})L^0$ ,  $X-V$  est une martingale locale. D'après ([4], théorème 2, iv), c), le saut du temps local de  $X$  en  $x=0$ , soit  $\zeta_t^0 - \zeta_t^{0-}$ , est égal à :

$$2 \int_0^t 1_{(X_s=0)} dV_s = 2 \int_0^t 1_{(M_s=0)} dV_s = (a+b) L_t^0.$$

Ainsi, lorsque  $ab < 0$ , et  $a+b \neq 0$ , la semi-martingale  $X = aM^+ + bM^-$  répond à la demande de J. Walsh.

4.2. A l'aide d'arguments de projection duale prévisible, Azéma et Yor ont montré en ([5], Corollaire 13) que  $M$  martingale continue de carré intégrable appartient à  $BMO$  si, et seulement si, il existe une constante  $C$

telle que, pour tout t.a.  $T : E \left[ \sup_{s \geq T} (M_s - M_\infty)^2 / \widehat{\mathcal{H}}_T \right] \leq C$  p.p.s.

En fait, P.A. Meyer nous a fait remarquer que cette caractérisation de BMO découle simplement de l'inégalité de Doob dans  $L^2$ .

Montrons, de façon générale, que  $M$ , martingale de carré intégrable, appartient à BMO si, et seulement si, il existe une constante  $C$  telle que :

$$\forall T \text{ t.a.}, E \left[ \sup_{s \geq T} (M_{s^-} - M_\infty)^2 / \widehat{\mathcal{H}}_T \right] \leq C.$$

La condition est évidemment suffisante ; inversement, si  $M \in \text{BMO}$ ,

$$\begin{aligned} B_T & \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} E \left[ \sup_{s \geq T} (M_{s^-} - M_\infty)^2 / \widehat{\mathcal{H}}_T \right] \\ & \leq 2 \{ E \left[ \sup_{s \geq T} (M_s - M_{T^-})^2 / \widehat{\mathcal{H}}_T \right] + \|M\|_{\text{BMO}}^2 \} \\ & \leq 2 \{ 4 E \left[ (M_\infty - M_{T^-})^2 / \widehat{\mathcal{H}}_T \right] + \|M\|_{\text{BMO}}^2 \} \\ & \leq 10 \|M\|_{\text{BMO}}^2, \text{ cqfd.} \end{aligned}$$

REFERENCES (dans l'ordre d'apparition dans le texte).

- [1] T. JEULIN et M. YOR : Nouveaux résultats sur le grossissement des tribus  
Annales Scientifiques ENS, t. 11, n° 3 (1978).
- [2] M. YOR : Convergence de martingales dans  $L^1$  et dans  $H^1$ .  
C.R.A.S., t. 286, p. 571-573 (1978).
- [3] J.B. WALSH : A diffusion with a discontinuous local time.  
in : Temps locaux. Ast\u00e9rique 52-53, 1978.
- [4] M. YOR : Sur la continuit\u00e9 des temps locaux associ\u00e9s \u00e0 certaines semi-  
martingales ;  
in : Temps locaux.
- [5] J. AZEMA et M. YOR : En guise d'introduction, in : Temps locaux.