SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JACQUES SZPIRGLAS
GÉRALD MAZZIOTTO

Théorème de séparation dans le problème d'arrêt optimal

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 378-384
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__378_0>

Université de Strasbourg 1977 - 1978
Séminaire de Probabilités

THEOREME DE SEPARATION DANS LE PROBLEME D'ARRET OPTIMAL

par J. SZPIRGLAS et G. MAZZIOTTO

I - INTRODUCTION.

On considère un processus positif Y défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\underline{\underline{F}}$ de sous-tribus de $\underline{\underline{A}}$ et d'une sous-filtration $\underline{\underline{G}}$ de $\underline{\underline{F}}$ (i.e. $\underline{\underline{G}}_t \subset \underline{\underline{F}}_t \ \forall t$) vérifiant toutes deux les conditions habituelles de (3). On note $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{F}}, \mathbb{P})$ un tel ensemble. L'arrêt optimal consiste à maximiser $E(Y_T)$ lorsque T décrit la classe $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{F}})$ des $\underline{\underline{F}}$-temps d'arrêt. On se propose de montrer que, sous certaines hypothèses, le même maximum est obtenu en parcourant seulement la classe $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{G}})$ des $\underline{\underline{G}}$-t.a..

La notion d'enveloppe de Snell, introduite par Mertens (8) permet de résoudre le problème d'arrêt optimal. Nous nous référerons constamment dans la suite au travail de M. A. Maingueneau (7) publié dans le séminaire précédent.

On montre ici que pour un processus Y, $\underline{\underline{G}}$-optionnel, l.à.d.-l.à.g., de la classe (D), les enveloppes de Snell $Z(\underline{\underline{F}})$ et $Z(\underline{\underline{G}})$, définies sur la filtration $\underline{\underline{F}}$, respectivement $\underline{\underline{G}}$, coïncident dès que l'ensemble $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{F}}, \mathbb{P})$ possède la propriété (K) suivante :

(K) | Pour tout t , toute v.a. X, bornée, $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable vérifie :
$E(X / \underline{\underline{G}}_t) = E(X / \underline{\underline{G}}_\infty)$ p.s.

Cette hypothèse est essentielle dans les problèmes d'intégration stochastique où intervient un changement de filtration (cf. Brémaud-Yor (2)), en particulier en théorie du filtrage (cf. (2) et Szpirglas-Mazziotto (9)). D'autre part, une telle hypothèse est naturelle dans de nombreux exemples tirés de la théorie des processus de Markov comme nous l'a montré N. El Karoui au cours de fructueuses discussions. En appliquant ce résultat d'indistinguabilité de $Z(\underline{\underline{F}})$ et $Z(\underline{\underline{G}})$ au problème d'arrêt optimal, on montre en particulier, que tout $\underline{\underline{G}}$-t.a. optimal sur $\underline{\underline{T}}(G)$ l'est aussi relativement à $\underline{\underline{T}}(F)$. Le théorème de séparation du contrôle et du filtrage apparaît comme une application de ce résultat à un modèle de filtrage.

II - ENVELOPPE DE SNELL ET CHANGEMENT DE FILTRATION.

1 - Enveloppe de Snell : On rappelle ici les résultats dus à Mertens (8).

Théorème 1 : Sur l'espace $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{F}}, \mathbb{P})$, soit Y un processus positif, l.à.d. - l.à.g., $\underline{\underline{F}}$-optionnel de classe(D) Il existe un unique processus $\underline{\underline{F}}$-optionnel, Z, appelé l'enveloppe de Snell de Y relativement à $\underline{\underline{F}}$ tel que pour tout t.a. T :

$$Z_T = \mathbb{P}\text{-}\operatorname*{ess\,sup}_{\{S\in\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{F}}):S\geqslant T\}} E(Y_S / \underline{\underline{F}}_T)$$

De plus :

a) Z est la plus petite surmartingale forte qui majore Y.

b) Z est l.à.d. - l.à.g. et $Z = \sup(Y, Z^+)$ où Z^+ désigne la régularisée à droite de Z.

c) Z admet la décomposition de Mertens suivante :

$$Z_t = M_t - B_t - A_{t-}$$

avec M une martingale uniformément intégrable (u.i.), A un processus croissant adapté et B un processus croissant prévisible purement discontinu.

2 - Changement de filtration et propriété (K) : Le théorème principal de cette étude est le suivant :

Théorème 2 : Soit Y un processus positif, $\underline{\underline{G}}$-optionnel, l.à.d.-l.à.g., de la classe (D), défini sur l'espace $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{F}}, \mathbb{P})$ possédant la propriété (K). Alors, les enveloppes de Snell, $Z(\underline{\underline{G}})$ et $Z(\underline{\underline{F}})$, de Y, relativement aux filtrations $\underline{\underline{G}}$ et $\underline{\underline{F}}$, sont indistinguables.

On utilise les lemmes suivants :

Lemme 3 : Sur l'espace $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{F}}, \mathbb{P})$ possédant la propriété (K), toute $(\underline{\underline{G}}, \mathbb{P})$-surmartingale forte est une $(\underline{\underline{F}}, \mathbb{P})$-surmartingale forte.

Démonstration : Il est montré dans Brémaud-Yor [2], qu'une formulation équivalente de la propriété (K) était : "toute $(\underline{\underline{G}}, \mathbb{P})$-martingale uniformément intégrable est une $(\underline{\underline{F}}, \mathbb{P})$-martingale". Le résultat découle alors de la décomposition de Mertens de la $(\underline{\underline{G}}, \mathbb{P})$-surmartingale forte.

> Lemme 4 : Sur l'espace $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{F}}, \mathbb{P})$, soit Y un processus $\underline{\underline{G}}$-optionnel de classe (D) (relativement aux $\underline{\underline{G}}$-t.a.). Si l'espace possède la propriété (K), alors Y est aussi de classe (D) relativement à $\underline{\underline{F}}$.

Démonstration : Un processus est dit de classe (D) relativement à $\underline{\underline{G}}$ si l'ensemble $\{Y_T, T \in T(\underline{\underline{G}})\}$ est équiintégrable. D'après un théorème de Mertens, rappelé par Emery dans ce séminaire [4] un processus $\underline{\underline{G}}$-optionnel Y est de classe (D) si , et seulement si il est majoré par une martingale uniformément intégrable M. D'après la propriété (K), cette $\underline{\underline{G}}$-martingale est aussi une $\underline{\underline{F}}$-martingale u.i. et le lemme est démontré.

Démonstration du théorème 2 : Les enveloppes de Snell $Z(\underline{\underline{G}})$ et $Z(\underline{\underline{F}})$ sont bien définies du fait que Y est $\underline{\underline{G}}$-optionnel et d'après le lemme 4, de classe D relativement aux filtrations $\underline{\underline{G}}$ ou $\underline{\underline{F}}$. D'après le lemme 3, $Z(\underline{\underline{G}})$ est aussi une $(\underline{\underline{F}}, \mathbb{P})$-surmartingale forte qui majore Y, donc d'après le théorème 1 :

$$Z(G) \geqslant Z(\underline{\underline{F}})$$

D'autre part, on vérifie que la $(\underline{\underline{G}}, \mathbb{P})$-projection optionnelle ${}^{o\underline{\underline{G}}}Z(F)$ de $Z(F)$ est une $(\underline{\underline{G}}, P)$- surmartingale forte qui majore Y, donc :

$${}^{o\underline{\underline{G}}}Z(\underline{\underline{F}}) \geqslant Z(\underline{\underline{G}}) \geqslant Z(\underline{\underline{F}})$$

On en déduit que $Z(\underline{\underline{G}})$ et $Z(\underline{\underline{F}})$ ne peuvent être que des modifications de la surmartingale forte ${}^{o\underline{\underline{G}}}Z(\underline{\underline{F}})$. Par suite $Z^+(\underline{\underline{F}})$, la régularisée à droite de $Z(\underline{\underline{F}})$ est $\underline{\underline{G}}$-optionnelle. D'après le théorème 1, $Z(\underline{\underline{F}}) = \sup(Z^+(\underline{\underline{F}}), Y)$ et est donc $\underline{\underline{G}}$-optionnel. On obtient alors :

$${}^{o\underline{\underline{G}}}Z(\underline{\underline{F}}) = Z(\underline{\underline{G}}) = Z(\underline{\underline{F}}).$$

III - APPLICATION A L'ARRET OPTIMAL .

Le problème d'arrêt optimal défini au paragraphe (I) est résolu en étudiant un problème plus général introduit par J.M. Bismut, on se réfère pour cela à l'exposé de M.A. Maingueneau (7). Un système d'arrêt est un quadruplet $\tau = (T, U, V, W)$ où T est un $\underline{\underline{F}}$-t.a., (U, V, W) une partition dans $\underline{\underline{F}}_T$ de Ω, telle que T est non nul sur U, fini sur W et T_U prévisible. On munit l'ensemble des systèmes d'arrêt (qui contient tous les t.a.) d'une relation d'ordre. Soit Y un processus positif, l.à.d.- l.à.g., $\underline{\underline{F}}$-optionnel, de classe (D) et Z son enveloppe de Snell ; on dit que τ est optimal pour le problème $(Y, \underline{\underline{F}}, \mathbb{P})$ si

$$E\,(Y_T^- \,.\, 1_U + Y_T\, 1_V + Y_T^+\, 1_W) = E\,(Z_0)$$

Il est montré dans (7) que l'ensemble des systèmes d'arrêt optimaux est toujours non vide (ce qui n'était pas le cas des t.a.) et admet des bornes inférieure et supérieure qui s'expriment à partir du processus et de l'enveloppe de Snell. On en déduit facilement le résultat suivant :

> <u>Théorème 5</u> : Soit Y un processus positif, l.à.d.- l.à.g., $\underline{\underline{G}}$-optionnel de classe (D) défini sur l'espace $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{F}}, \mathbb{P})$ possédant la propriété (K). Alors, tout $\underline{\underline{G}}$-système d'arrêt optimal (pour le problème $(Y, \underline{\underline{G}}, \mathbb{P})$) est un $\underline{\underline{F}}$-système d'arrêt optimal. De plus, les ensembles des $\underline{\underline{G}}$ et $\underline{\underline{F}}$-systèmes d'arrêt optimaux ont les mêmes bornes supérieure et inférieure.

On a un théorème analogue sur les t.a. si Y possède les propriétés de régularité supplémentaires assurant (cf. (7)) qu'il existe des vrais t.a. (i.e. $\tau = (T, \emptyset, \Omega, \emptyset)$) parmi les systèmes d'arrêt optimaux.

IV - THEOREME DE SEPARATION.

1 - <u>Le problème d'"observation incomplète"</u> : On considère le problème d'arrêt optimal suivant ; sur un espace de probabilité $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\underline{\underline{E}}$, est défini un processus $\underline{\underline{E}}$-optionnel, X, le "signal", qui représente l'état interne d'un système donné. Celui-ci n'est connu que par l'intermédiaire d'un processus Z, "l'observation", qui engendre une sous-filtration $\underline{\underline{F}}$

de $\underline{\underline{E}}$. On a ainsi construit un modèle de filtrage $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{E}}, \mathbb{P})$. Il s'agit de maximiser sur l'ensemble des $\underline{\underline{F}}$-t.a., c'est-à-dire dépendant de l'observation Z, la quantité $E(Y_T)$; avec Y un processus $\underline{\underline{E}}$-optionnel donné. La difficulté de ce genre de problème vient de ce que la liaison entre Y et Z est trop complexe pour autoriser une résolution directe ; en effet, Y et Z dépendent tous deux de X qui lui à priori est inconnu. Le théorème de séparation ramène ce problème au problème classique, dit en "observation complète", d'arrêt optimal de Y relativement à la filtration $\underline{\underline{G}}$ engendrée par un processus $\hat{X}$ que l'on peut construire à partir de l'observation Z.

On choisit comme processus $\hat{X}$ ici, le processus de filtrage Π de X relativement à la filtration $\underline{\underline{F}}$. Celui-ci est défini de l'espace $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{E}}, \mathbb{P})$ dans l'ensemble des probabilités sur S, espace où X prend ses valeurs et qu'on suppose par exemple polonais. A toute fonction borélienne bornée f sur S, le filtre Π associe le processus à valeurs réelles $\Pi.(f)$ qui est la $(\underline{\underline{F}}, \mathbb{P})$-projection optionnelle du processus $f(X)$. On note $\underline{\underline{G}}$ la filtration naturelle de Π, convenablement complétée. On montre que, sous des hypothèses assez générales, le processus Π peut être obtenu soit sous forme explicite par la formule de Kallianpur-Striebel, soit comme solution d'équations différentielles stochastiques à valeurs mesure dépendant de Z (cf. [9])

2 - <u>Le théorème de séparation</u> : On fait sur le processus Π l'hypothèse (H1) suivante, satisfaite en particulier dans le modèle de filtrage classique de Kunita [6] où X est un Markov.

(H1) Le processus de filtrage Π est un processus de Markov, relativement à la filtration $\underline{\underline{F}}$, continu pour la topologie de la convergence étroite.

On montre alors facilement, grâce au caractère markovien de Π, que l'espace $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{F}}, \mathbb{P})$ possède la propriété (K). On suppose de plus :

(H2) Le processus Y est de la forme

$$Y_t = \int_0^{t\wedge 1} f(X_s)\, ds + g(X_{t\wedge 1})$$

avec f borélienne bornée sur S et g continue.

La $(\underline{\underline{F}}, \mathbb{P})$-projection optionnelle du processus Y est le processus continu $\underline{\underline{G}}$-adapté défini par :

$$ {}^{o}Y_t = \int_0^{t\wedge 1} \Pi_s (f)\, ds + \Pi_{t\wedge 1} (g) $$

On démontre alors le théorème de séparation :

Théorème 6 : Avec les notations ci-dessus et sous les hypothèses (H1) et (H2), on a :

1) $\sup\limits_{T \in T(\underline{\underline{F}})} E(Y_T) = \sup\limits_{T \in T(\underline{\underline{G}})} E(Y_T)$

2) L'ensemble des $\underline{\underline{G}}$-t.a. qui maximisent $E(Y_T)$ sur $T(\underline{\underline{G}})$ est non vide et c'est l'ensemble des t.a. optimaux pour le problème $({}^{o}Y, \underline{\underline{G}}, \mathbb{P})$.

3) L'ensemble des $\underline{\underline{F}}$-t.a. qui maximisent $E(Y_T)$ est compris entre le plus grand et le plus petit des $\underline{\underline{G}}$-t.a. optimaux pour le problème $({}^{o}Y, \underline{\underline{G}}, \mathbb{P})$.

Démonstration : Il est montré dans (7) que si Y est suffisamment régulier, les notions de domaine d'arrêt optimal peuvent être remplacées par celles, plus classiques, de temps d'arrêt optimal dans les énoncés du III. La continuité du processus ${}^{o}Y$ est ici suffisante : il est bien connu (cf. Bismut (1) ; Engelbert (5)) qu'il existe des $\underline{\underline{G}}$-t.a. optimaux pour le problème $({}^{o}Y, \underline{\underline{G}}, \mathbb{P})$. D'autre part, on a par définition de la projection optionnelle :

$$ E(Y_T) = E({}^{o}Y_T) \text{ pour tout } \underline{\underline{F}}\text{-t.a. (et donc } \underline{\underline{G}}\text{-t.a.).} $$

Cette remarque entraîne 2), puis 1) et 3) en appliquant le théorème 6.

BIBLIOGRAPHIE.

(1) J.M. BISMUT : Contrôle stochastique, jeux et temps d'arrêt ; applications de la théorie probabiliste du potentiel. Z. Wahr. verw. Geb. 39, 315-338 (1977).

(2) P. BREMAUD-M. YOR : Changes of filtration and of probability measures. A paraître.

(3) C. DELLACHERIE-P.A. MEYER : Probabilités et potentiel. Hermann (1975).

(4) M. EMERY : Sur un théorème de J.M. Bismut. ZfW, 44, 1978, p.141-144.

(5) H.J. ENGELBERT : On optimal stopping rules for Markov processes. Theor. Prob. Appl. 18, N° 2, 304-311 (1973).

(6) H. KUNITA : Asymptotic behavior of the non linear filtering errors of Markov processes. J. Mult. Anal., Vol. 1, N° 4 (Dec. 1971).

(7) M.A. MAINGUENEAU : Temps d'arrêt optimaux et théorie générale. Séminaire de probabilités XII. Lecture Notes in M. 649 (Springer-Verlag 1978).

(8) J.F. MERTENS : Théorie des processus stochastiques généraux. Applications aux martingales. Z. Wahr. verw. Geb. 22, 45-68 (1972).

(9) J. SZPIRGLAS-G. MAZZIOTTO : Modèle géneral de filtrage non linéaire et équations différentielles stochastiques associées. C.R. Acad. Sc. Paris. (A paraître).

Centre National d'Etudes des Télécommunications
Centre de fiabilité
196 rue de Paris 92 220 Bagneux