

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHING SUNG CHOU

Extension au cas continu d'un théorème de Dubins

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 132-133

[<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__132_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__132_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EXTENSION AU CAS CONTINU D'UN THEOREME DE L.E. DUBINS

par Ching-Sung CHOU

Très récemment, M. P.A. Meyer m'a envoyé un article de Dubins [1] et m'a indiqué " il me semble que les résultats de cet article n'ont jamais été étendus au cas continu". Nous lui exprimons nos remerciements pour cette suggestion.

Voici l'énoncé du théorème de Dubins :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}})$ un espace probabilisé filtré, et soit $X = (X_n)$ une surmartingale à valeurs dans $[0, 1]$. On associe à X le processus croissant des variances conditionnelles

$$V_n^X = E[(X_1 - X_0)^2 | \mathcal{F}_0] + \dots + E[(X_n - X_{n-1})^2 | \mathcal{F}_{n-1}]$$

Alors on a

$$(1) \quad E[V_\infty^X | \mathcal{F}_0] \leq X_0(2 - X_0) \text{ p.s. .}$$

Cette inégalité est "sharp" : il existe des surmartingales X pour lesquelles la borne est atteinte.

Avant d'étendre cela au cas continu, nous voulons transformer le résultat de Dubins. Tout d'abord, nous remplaçons X par $Y = 1 - X$, sous-martingale à valeurs dans $[0, 1]$. On a $V^X = V^Y$, et (1) s'écrit

$$(2) \quad E[V_\infty^Y | \mathcal{F}_0] \leq 1 - Y_0^2 \text{ p.s. .}$$

Ensuite, puisqu'il y a un symbole $E[. | \mathcal{F}_0]$, le conditionnement dans la définition de V_n^Y (qui revient à travailler sur le processus croissant $\langle Y, Y \rangle$) est inutile, et (2) s'écrit simplement, en faisant passer Y_0^2 du côté gauche

$$(3) \quad E[[Y, Y]_\infty | \mathcal{F}_0] \leq 1 \text{ p.s. .}$$

Il suffit de vérifier que $E[[Y, Y]_n | \mathcal{F}_0] \leq 1$ pour tout n , ou encore (comme Y est à valeurs dans $[0, 1]$) que $E[[Y, Y]_n | \mathcal{F}_0] \leq E[Y_n^2 | \mathcal{F}_0]$, et finalement on se trouve ramené à la proposition suivante :

PROPOSITION 1. Si Y est une sousmartingale positive, avec $Y_n \in L^2$ pour tout n , le processus $Y^2 - [Y, Y]$, nul en 0, est une sousmartingale.

Démonstration. $E[Y_{n+1}^2 - Y_n^2 - (Y_{n+1} - Y_n)^2 | \mathcal{F}_n] = 2Y_n E[Y_{n+1} - Y_n | \mathcal{F}_n] \geq 0$.

Maintenant nous allons passer au cas continu. Soit (X_t) une surmar-

tingale continue à droite sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{F}, P, (\mathbb{F}_t)_{t \geq 0})$ satisfaisant aux conditions habituelles, à valeurs dans $[0, 1]$. Nous voulons établir la formule

$$(1') \quad E[\langle X, X \rangle_\infty | \mathbb{F}_0] \leq 2X_0, \quad \text{ou } E[[X, X]_\infty | \mathbb{F}_0] \leq 2X_0$$

qui correspond à (1), où l'on a ajouté X_0^2 des deux côtés. Pour cela, on écrit cette inégalité pour la surmartingale discrète $X_{k/2^n}$, et on utilise le fait que

$$X_0^2 + \sum_k (X_{(k+1)/2^n} - X_{k/2^n})^2 \text{ converge en probabilité vers } [X, X]_\infty$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, et le lemme de Fatou.

Mais il est plus intéressant d'établir dans le cas continu l'analogie de la proposition 1 :

PROPOSITION 2. Si (Y_t) est une sousmartingale positive continue à droite, avec $Y_t \in L^2$ pour tout t , le processus $Y_t^2 - [Y, Y]_t$ est une sousmartingale.

Démonstration. Nous remarquons d'abord (inégalité de Doob) que $\|Y_t^*\|^2 \leq 2\|Y_t\|_2^2$, donc Y appartient à la classe (D) sur tout intervalle $[0, t]$, et admet une décomposition $Y = M + A$, où M est une martingale, A un processus croissant prévisible nul en 0. En appliquant le théorème 52' de [2], p.56, à la surmartingale $E[Y_t | \mathbb{F}_s] - Y_s$ sur l'intervalle $[0, t]$, on voit que $M_t \in L^2$ pour tout t , donc aussi $A_t \in L^2$ pour tout t .

Nous avons $Y_t^2 - [Y, Y]_t = 2 \int_0^t Y_s - dY_s = 2 \int_0^t Y_s - dA_s + 2 \int_0^t Y_s - dM_s$. Le processus $\int_0^t Y_s - dA_s$ est croissant et intégrable pour t fini

$$E[\int_0^t Y_s - dA_s] \leq E[Y_t^* A_t] \leq \|Y_t^*\|_2 \|A_t\|_2$$

et la martingale locale $\int_0^t Y_s - dM_s$ est une vraie martingale, car

$$E[(\int_0^t Y_s^2 - d[M, M]_s)^{1/2}] \leq E[Y_t^* [M, M]_t^{1/2}] \leq \|Y_t^*\|_2 (E[[M, M]_t])^{1/2} < \infty.$$

La proposition est établie.

REFERENCES

- [1]. L.E. Dubins. Sharp bounds for the variance of uniformly bounded semimartingales. Ann. Math. Stat. 43, 1972, p.1559-1565.
- [2]. P.A. Meyer. Martingales and stochastic integrals. Lecture Notes in mathematics, n° 284, Springer-Verlag 1972.

Chou Ching Sung
Mathematics Department
National Central University
Chung-Li, Taiwan
Republic of China