SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

NICOLE EL KAROUI
PAUL-ANDRÉ MEYER

Les changements de temps en théorie générale des processus

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 65-78
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__65_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1975/76

LES CHANGEMENTS DE TEMPS EN THEORIE GENERALE DES PROCESSUS

par Nicole El Karoui et P.A. Meyer

Cet exposé reprend un exposé oral fait par Nicole Karoui au séminaire de Strasbourg de Juin 75, avec diverses améliorations techniques dues à de longues discussions entre les deux auteurs. Il ne s'agit ici que de changements de temps associés à un processus croissant <u>continu</u>. Le cas général sera traité dans un autre travail ([1]). De même, un autre article consacré au cas des processus de Markov - et qui en fait a précédé celui-ci - sera publié ailleurs par N. Karoui ([ ]). Cet exposé-ci ne contient donc que la théorie des changements de temps que tout le monde croît connaître, sans qu'aucune référence raisonnablement complète existe dans la littérature.

1. RAPPELS SUR LES ENSEMBLES ALEATOIRES

$(\Omega, \underline{\underline{F}}, P, (\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0})$ désigne un espace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions hābituelles. Nous prenons $\underline{\underline{F}}_\infty = \bigvee_t \underline{\underline{F}}_t$, et nous nous donnons une tribu supplémentaire $\underline{\underline{F}}_{0-}$ permettant de définir proprement la prévisibilité en 0 .

Dans ce paragraphe, on va"rappeler" certains résultats sur les ensembles aléatoires fermés (dus essentiellement à Maisonneuve pour le cas des processus de Markov). Nous nous donnons donc un ensemble aléatoire fermé optionnel M. Nous convenons que M contient <u>toute la demi-droite négative</u>, ce qui pour nous (qui ne regardons que $\mathbb{R}_+$) se traduit ainsi : 0 appartient à M, et 0 n'est pas compté parmi les points isolés de M.

Dans les applications, M sera <u>sans point isolé</u>, mais nous ne ferons pas cette hypothèse au départ.

Comme d'habitude, on désigne par $M^{\rightarrow}$ ($M^{\leftarrow}$) l'ensemble des extrémités gauches (droites) d'intervalles contigus à M. On pose $G=M\setminus M^{\leftarrow}$, de sorte que $I_G(t,\omega) = \limsup_{s\uparrow\uparrow t} I_M(s,\omega)$; c'est un ensemble prévisible contenant 0 (en vertu de la convention faite plus haut). Nous conviendrons que $+\infty$ appartient à G si M est non borné.

On désigne par R la réunion de l'ensemble $M\setminus M^{\rightarrow}$ et de l'ensemble I des points isolés de M. C'est un ensemble progressif, mais en général non optionnel (cf. plus loin).

Les notations suivantes sont familières en théorie des ensembles aléatoires :

(1) $\quad D_t(\omega) = \inf \{ s>t : (s,\omega)\in M \}$

(2) $\quad \ell_t(\omega) = \sup \{ s<t : (s,\omega)\in M \}$ $\quad$ ($\ell_0=0$ par convention).

D_t est un début d'ensemble optionnel, donc un t.d'a. de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$. Dans ces conditions, nous introduisons la famille de tribus, très importante

(3) $\quad \underline{\underline{G}}_t = \underline{\underline{F}}_{D_t}$ $\quad$ ($\underline{\underline{G}}_{0-} = \underline{\underline{F}}_{0-}$; $\underline{\underline{G}}_{\infty} = \bigvee_t \underline{\underline{G}}_t$)

Le but de ce premier paragraphe est l'étude de la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$. Auparavant, nous introduisons une notion qui n'a famais été explicitée en "théorie générale", mais qui est familière en théorie du renouvellement.

Comme d'habitude[*] on peut décomposer l'ensemble à coupes dénombrables $M^{\rightarrow}$ en $M_0^{\rightarrow}$, qui est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt, et $M_\pi^{\rightarrow}$, qui est progressif et ne contient aucun graphe de t.d'a.. Soit alors

(4) $\quad R^o = R\cup M_\pi^{\rightarrow} = (M\setminus M_0^{\rightarrow})\cup I$ $\quad$ (I, points isolés de M)

ensemble optionnel d'après sa seconde représentation. D'après la première, la projection optionnelle de $R^o\setminus R = M_\pi^{\rightarrow}$ est nulle. Donc si un processus optionnel Z est nul sur R, ZI_R a une projection nulle, ZI_{R^o} aussi, et ZI_{R^o} étant optionnel est indistinguable de 0, et finalement Z est nul sur R^o. Autrement dit, si Z optionnel est connu sur R, il l'est sur R^o, c.à.d. sur $M_\pi^{\rightarrow}$. De quelle manière[1] ?

Nous dirons que R^o est l'<u>enveloppe optionnelle</u> de R.

ETUDE DES TRIBUS $(\underline{\underline{G}}_t)$

Ici et dans toute la suite, nous utilisons les abréviations suivantes : processus $\underline{\underline{F}}$-optionnel, $\underline{\underline{F}}$-prévisible ; $\underline{\underline{F}}$-t.a., $\underline{\underline{F}}$-t.a.p. pour signifier processus optionnel par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, prévisible ; temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, temps d'arrêt prévisible. Cela, parce que nous changerons de famille, et que nous aurons aussi les $\underline{\underline{G}}$-t.a., les $\underline{\underline{\bar F}}$-t.a., etc.

LEMME 1. <u>Si</u> S <u>est un</u> $\underline{\underline{F}}$<u>-t.a.</u>, D_S <u>est un</u> $\underline{\underline{F}}$<u>-t.a. et l'on a</u> $\underline{\underline{G}}_S=\underline{\underline{F}}_{D_S}$.

DEMONSTRATION. D_S est le début de $\{(s,\omega) : s>S(\omega), (s,\omega)\in M\}$, ensemble $\underline{\underline{F}}$-optionnel. Donc D_S est un $\underline{\underline{F}}$-t.a. (pour S=t, c'était déjà implicite dans la définition (3)).

1. Je pense qu'il y a dans les bons cas des "noyaux de prolongement", que l'on n'a jamais écrits explicitement.

*. Voir p.14.

Soit $A\in\underline{\underline{F}}_{D_S}$; on a $A\cap\{D_S\leq D_t\}\in\underline{\underline{F}}_{D_t}=\underline{\underline{G}}_t$ pour tout t, donc par intersection avec $\{S\leq t\}\subset\{D_S\leq D_t\}$ qui appartient à $\underline{\underline{G}}_t$, $A\cap\{S\leq t\}\in\underline{\underline{G}}_t$. Compte tenu de l'égalité $\underline{\underline{F}}_\infty=\underline{\underline{G}}_\infty$, on voit que $\underline{\underline{F}}_{D_S}\subset\underline{\underline{G}}_S$.

En sens inverse, montrons que $\underline{\underline{G}}_{S-}\subset\underline{\underline{F}}_{D_S}$, après quoi on appliquera cela à S+ε et on fera ε↓↓0 . Soit $A=B\cap\{t<S\}$ un générateur de $\underline{\underline{G}}_{S-}$, avec $B\in\underline{\underline{G}}_t=\underline{\underline{F}}_{D_t}$. Alors $A=B\cap\{D_t\leq D_S\}\cap\{t\leq S\}$; or $B\cap\{D_t\leq D_S\}\in\underline{\underline{F}}_{D_S}$, et $\{t<S\}\in\underline{\underline{F}}_{D_t}$, donc $\{t<S\}=\{t<S\}\cap\{D_t\leq D_S\}\in\underline{\underline{F}}_{D_S}$.

Le lemme suivant est la suite du lemme 1 : a) étend le lemme 1 aux $\underline{\underline{G}}$-temps d'arrêt , et tout $\underline{\underline{F}}$-t.a. est un $\underline{\underline{G}}$-t.a. puisque $\underline{\underline{F}}_t\subset\underline{\underline{G}}_t$.

LEMME 2. a) <u>Soit</u> S <u>un</u> $\underline{\underline{G}}$-<u>t.a.. Alors</u> D_S <u>est un</u> $\underline{\underline{F}}$-<u>t.a. et</u> $\underline{\underline{G}}_S=\underline{\underline{F}}_{D_S}$.
b) <u>Pour que</u> $S\geq 0$ <u>soit un</u> $\underline{\underline{G}}$-<u>t.a., il faut et il suffit que</u> $D_S=T^S$ <u>soit un</u> $\underline{\underline{F}}$-<u>t.a., et que</u> S <u>soit</u> $\underline{\underline{F}}_T$-<u>mesurable</u>.

DEMONSTRATION. Lorsque $S=t_A$, $A\in\underline{\underline{G}}_t=\underline{\underline{F}}_{D_t}$, on a $D_S=(D_t)_A$, et D_S est bien un $\underline{\underline{F}}$-t.a.. On passe de là au cas où S est étagé par inf finis, puis au cas général par suites décroissantes. La vérification que $\underline{\underline{G}}_S=\underline{\underline{F}}_{D_S}$ est alors la même que pour le lemme 1.

b) Si S est un $\underline{\underline{G}}$-t.a., on vient de voir que $T=D_S$ est un $\underline{\underline{F}}$-t.a., et S est mesurable sur $\underline{\underline{G}}_S=\underline{\underline{F}}_T$. La condition est donc nécessaire. Inversement, supposons que T soit un $\underline{\underline{F}}$-t.a. et S $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable. Alors $\{S\leq t\}\in\underline{\underline{F}}_T$, donc $\{S\leq t\}\cap\{T\leq D_t\}\in\underline{\underline{F}}_{D_t}$, soit $\{S\leq t\}\cap\{D_S\leq D_t\}=\{S\leq t\}\in\underline{\underline{G}}_t$, et S est un $\underline{\underline{G}}$-t.a..

Une conséquence très simple : si M est sans points isolés[1]

LEMME 3. <u>Si</u> Z <u>est un processus</u> $\underline{\underline{G}}$-<u>optionnel</u> ($\underline{\underline{G}}$-<u>prévisible</u>), <u>il existe</u> Y $\underline{\underline{F}}$-<u>optionnel</u> ($\underline{\underline{F}}$-<u>prévisible</u>) <u>tel que</u> Y=Z <u>sur</u> R (<u>sur</u> G).
DEMONSTRATION. Il suffit de vérifier cela pour des générateurs des tribus optionnelle et prévisible :
Tribu optionnelle : si $Z=I_{[0,S[}$ où S est un $\underline{\underline{G}}$-t.a., on peut prendre $Y=I_{[0,D_S[}$.
Tribu prévisible : si $Z=I_{\{0\}\times A}$, $A\in\underline{\underline{G}}_{0-}$, on peut prendre Z=Y. Si $Z=I_{]0,S]}$ où S est un $\underline{\underline{G}}$-t.a., on peut prendre $Y=I_{]0,D_S]}$.

Dans le cas optionnel, noter que Y=Z non seulement sur R, mais sur l'enveloppe optionnelle R^o. Nous revenons à l'ensemble M :

LEMME 4. <u>Soit</u> S <u>un</u> $\underline{\underline{G}}$-<u>t.a.</u>. <u>La v.a.</u> $L_S(\omega)=\sup\{s\leq S(\omega) : s\in M(\omega)\}$ <u>est un</u> $\underline{\underline{G}}$-<u>t.a.</u>. <u>On a</u> $\underline{\underline{G}}_{L_S}=\underline{\underline{G}}_S$.

1. Hypothèse nécessaire pour la partie optionnelle.

DEMONSTRATION. Soit $T=D_{L_S}=D_S$; T est un $\underline{\underline{F}}$-t.a., et la v.a.

$$L_S \begin{cases} = \ell_T \text{ sur } \{S<T\},\ \underline{\underline{F}}_T\text{-mesurable puisque } S \text{ l'est} \\ = L_T \text{ sur } \{S=T\} \end{cases}$$

est $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable, donc L_S est un $\underline{\underline{G}}$-t.a. On a $\underline{\underline{G}}_{L_S}=\underline{\underline{F}}_{D_{L_S}} = \underline{\underline{F}}_{D_S}=\underline{\underline{G}}_S$.

Remarque. Un raisonnement analogue montre que ℓ_S est un $\underline{\underline{G}}$-t.a. . On a $D_{\ell_S}=D_S \wedge S_B$, où $B = \{S\in M^{\leftarrow}\} \in \underline{\underline{G}}_S$.

COROLLAIRE. $M^{\rightarrow}$ *et* R *sont* $\underline{\underline{G}}$*-optionnels*.

DEMONSTRATION. $M^{\rightarrow}$ est la réunion des graphes de $\underline{\underline{G}}$-t.a. $L_{(u_A)}$, où u parcourt l'ensemble des rationnels >0, et $A=\{u\notin M\}\in\underline{\underline{F}}_u$. Lorsque M n'a pas de points isolés, $R=M\setminus M^{\rightarrow}$. Lorsqu'il y en a, il faut rajouter les points isolés, le lecteur regardera les détails.

LEMME 5. *Supposons que* M *soit sans point isolé. Tout* $\underline{\underline{G}}$*-t.a.* U *dont le graphe passe dans* $M^{\leftarrow}$ *est un* $\underline{\underline{G}}$*-t.a.p., et un* $\underline{\underline{F}}$*-t.a., et l'on a* $\underline{\underline{G}}_{U-} = \underline{\underline{F}}_U$.

DEMONSTRATION. En l'absence de points isolés (excepté peut être 0), si U est un $\underline{\underline{G}}$-t.a. dont le graphe passe dans $M^{\leftarrow}$, $D_U=U$ est un $\underline{\underline{F}}$-t.a., et l'on a $\underline{\underline{G}}_U=\underline{\underline{F}}_{D_U}=\underline{\underline{F}}_U$. Nous pouvons donc *supposer que* U *est un* $\underline{\underline{F}}$*-t.a.*, et à partir de maintenant nous pouvons à nouveau admettre des points isolés.

Soit $U_n= (U-1/n)\vee \ell_U$; $D_{U_n}=U$ est un $\underline{\underline{F}}$-t.a., et U_n est $\underline{\underline{F}}_U$-mesurable, donc U_n est un $\underline{\underline{G}}$-t.a.. Comme la suite (U_n) annonce U sur $\{0<U<\infty\}$, U est prévisible.

Soit $A\in\underline{\underline{F}}_U$; alors U_A est un $\underline{\underline{F}}$-t.a. dont le graphe passe dans $M^{\leftarrow}$, donc un $\underline{\underline{G}}$-t.a.p., et cela entraîne $A\cap\{U<\infty\} \in \underline{\underline{G}}_{U-}$. Inversement, les ensembles de la forme $A=B\cap\{t<U\}$ $(B\in\underline{\underline{G}}_t=\underline{\underline{F}}_{D_t})$ engendrent $\underline{\underline{G}}_{U-}$. Comme le graphe de U passe dans $M^{\leftarrow}$, $t<U \Rightarrow D_t\leq U$, et A s'écrit $(B\cap\{D_t\leq U\})\cap\{t<U\}\in\underline{\underline{F}}_U$.

Noter que si M est sans point isolé, on a $D_U=U$, $\underline{\underline{G}}_U=\underline{\underline{F}}_{D_U}=\underline{\underline{F}}_U=\underline{\underline{G}}_{U-}$; U n'est donc pas un temps de discontinuité de la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$.

COROLLAIRE. $M^{\leftarrow}$ *est* $\underline{\underline{G}}$*-prévisible* (qu'il y ait ou non des points isolés).

En effet, $M^{\leftarrow}$ est réunion de graphes de $\underline{\underline{F}}$-t.a.. $M=G\cup M^{\leftarrow}$ est aussi $\underline{\underline{G}}$-prév.!

LEMME 6. *Soit* S *un* $\underline{\underline{G}}$*-t.a.p. dont le graphe passe dans* G. *Alors* S *est aussi un* $\underline{\underline{F}}$*-t.a.p., et* $\underline{\underline{G}}_{S-}=\underline{\underline{F}}_{S-}$.

DEMONSTRATION. Soit (S_n) une suite de $\underline{\underline{G}}$-t.a. annonçant S. Alors les $\underline{\underline{F}}$-t.a. D_{S_n} annoncent S, et $\underline{\underline{G}}_{S-}= \bigvee_n \underline{\underline{G}}_{S_n} = \bigvee_n \underline{\underline{F}}_{D_{S_n}} = \underline{\underline{F}}_{S-}$.

COROLLAIRE. $M^{\rightarrow}_{\pi}$ *est réunion dénombrable de graphes de* $\underline{\underline{G}}$*-t.a. totalement inaccessibles*.

DEMONSTRATION. Nous prouvons un peu mieux . Nous savons que $M_\pi^{\rightarrow}$, contenu dans G, à coupes dénombrables, est aussi $\underline{\underline{G}}$-optionnel (c'est $M^{\rightarrow}\setminus M_o^{\rightarrow}$). C'est donc une réunion de graphes de $\underline{\underline{G}}$-t.a.. Nous prouvons :

Si un graphe [S] de $\underline{\underline{G}}$-t.a. passe dans G, et est disjoint de tout graphe de $\underline{\underline{F}}$-t.a.p., S est totalement inaccessible pour $(\underline{\underline{G}}_t)$.

En effet, si T est un $\underline{\underline{G}}$-t.a.p. et si $P\{S=T<\infty\}>0$, si $A=\{T\in G\}$, on a $A\in\underline{\underline{G}}_{T-}$ et T_A est $\underline{\underline{G}}$-prévisible. D'après le lemme 6 il est aussi $\underline{\underline{F}}$-prévisible, et l'on a $P\{S=T<\infty\}=P\{S=T_A<\infty\}=0$.

2. CHANGEMENTS DE TEMPS (P.C. CONTINU)

Maintenant, nous nous donnons un processus croissant adapté à $(\underline{\underline{F}}_t)$, <u>continu</u>, nul en 0 (mais non nécessairement fini ni strictement croissant). Nous le désignons par (C_t), et nous désignons par i et j respectivement son inverse à gauche et son inverse à droite :

(5) $$i_t = \sup\{s : C_s<t\} = \inf\{s : C_s \geqq t\} \qquad j_t = \inf\{s : C_s>t\} = \sup\{s : C_s \leqq t\}$$

Nous posons aussi

(6) $$z = \inf\{t : C_t=+\infty\} \quad , \overline{z} = C_\infty \quad ; \quad j_\infty = i_\infty = z \ .$$

M désignant le parfait aléatoire des points de croissance de C (le support de la mesure dC ; pour que la demi-droite négative appartienne à M conformément à notre convention, on peut convenir que $C_t=t$ pour $t<0$), et les notations étant celles du paragraphe 1, on a

(7) $$C_{i_t} = C_{j_t} = t\wedge\overline{z} \quad , \quad j_{C_t} = D_t \wedge z \ , \ i_{C_t} = \ell_t \quad .$$

Nous avons tout de suite un petit résultat :

LEMME 7. <u>Pour tout</u> t, j_t <u>est un</u> $\underline{\underline{F}}$<u>-t.a., et</u> i_t <u>un</u> $\underline{\underline{F}}$<u>-t.a.p.</u>.

Il est clair que i_t et j_t sont des débuts d'ensembles optionnels, donc ce sont des t.a. - on utilise ici la continuité à droite de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$. En fait, on a une démonstration élémentaire pour j_t : $\{j_t<a\} = \{C_a>t\}$ (continuité de C !) $\in \underline{\underline{F}}_a$, et on en déduit que i_t est un t.a. du fait que $i(t)=j(t-)$ pour $t>0$. Aucun problème pour $i_0 \doteq 0$.

D'autre part, i_t est le début de l'ensemble $\{(s,\omega) : C_s(\omega) \geqq t\}$, fermé à droite, et prévisible du fait que C est continu. Donc i_t est prévisible. On peut en donner une démonstration élémentaire très simple : en effet $i_t = \lim_n j_{t-1/n}$ pour $t>0$, et la continuité de C entraîne que j est strictement croissant sur $[0,\overline{z}]$. La suite $j_{t-1/n}$ annonce donc i_t sur $\{t \leqq \overline{z}\}$, qui contient $\{i_t<\infty\}$. Donc la suite $n\wedge j_{t-1/n}$ annonce i_t .

(Mais la démonstration non élémentaire s'applique au cas où C est prévisible non continu, ce qui peut être intéressant).

Nous définissons alors la famille de tribus transformée de $(\underline{\underline{F}}_t)$ par le changement de temps, famille qu'on va étudier en détail

(8) $$\overline{\underline{\underline{F}}}_t = \underline{\underline{F}}_{j_t} \qquad (\overline{\underline{\underline{F}}}_{0-} = \underline{\underline{F}}_{0-})$$

Quant à $\overline{\underline{\underline{F}}}_\infty$, on remarque que $z= \sup_t j_t$, avec $j_t<z$ sur $\{z<\infty\}$, de sorte que z est $\underline{\underline{F}}$-prévisible . On a $\overline{\underline{\underline{F}}}_{\infty-} = \bigvee_t \overline{\underline{\underline{F}}}_t = \underline{\underline{F}}_{z-}$. Il est commode de prendre $\overline{\underline{\underline{F}}}_\infty = \underline{\underline{F}}_z$, permettant ainsi un temps de discontinuité à l'infini.

Pour finir, nous introduisons deux notations : si $(Z_t)_{0\leq t\leq\infty}$ est un processus réel, nous pouvons le transformer de deux manières par changement de temps :

(9) $$\bar{Z}_t^+ = Z_{j_t} \quad , \quad \bar{Z}_t^- = Z_{i_t}$$

Si l'on a affaire à un processus défini seulement sur $[0,\infty[$, on conviendra toujours que $Z_\infty = 0$. Nous avons un premier résultat évident

PROPOSITION 8. <u>Si</u> Z <u>est</u> $\underline{\underline{F}}$<u>-optionnel</u>, $\bar{Z}^+$ <u>est</u> $\bar{\underline{\underline{F}}}$<u>-optionnel</u>. <u>Si</u> Z <u>est</u> $\underline{\underline{F}}$<u>-prévisible</u>, $\bar{Z}^-$ <u>est</u> $\bar{\underline{\underline{F}}}$<u>-prévisible</u>.

DEMONSTRATION. Il suffit de remarquer que si Z est $\underline{\underline{F}}$-adapté càdlàg. (resp. càg.), $\bar{Z}^+$ est $\bar{\underline{\underline{F}}}$-adapté càdlàg. ($\bar{Z}^-$ $\bar{\underline{\underline{F}}}$-adapté càg.).

REMARQUE. Reprenons la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$ du paragraphe 1, relative à l'ensemble aléatoire M. Comme (C_t) est aussi $\underline{\underline{G}}$-adapté, nous pouvons définir la famille correspondante $(\bar{\underline{\underline{G}}}_t)$, associée au changement de temps (C_t) et à $(\underline{\underline{G}}_t)$. Or $\bar{\underline{\underline{G}}}_t = \underline{\underline{G}}_{j_t} = \underline{\underline{F}}_{D_{j_t}}$ (lemme 2) $= \underline{\underline{F}}_{j_t} = \bar{\underline{\underline{F}}}_t$. Ainsi <u>les familles</u> $\bar{\underline{\underline{F}}}$ <u>et</u> $\bar{\underline{\underline{G}}}$ <u>sont identiques</u>. Cela illustre la perte d'information dans le changement de temps, due à l'écrasement de tout ce qui se passe dans les intervalles de constance de C.

LEMME 9 . $\bar{z}$ <u>est un</u> $\bar{\underline{\underline{F}}}$<u>-t.a., et l'on a</u>

(10) $$\bar{\underline{\underline{F}}}_{\bar{z}} = \bar{\underline{\underline{F}}}_\infty = \underline{\underline{F}}_z$$

<u>Le</u> $\bar{\underline{\underline{F}}}$<u>-t.a.</u>

(11) $$\bar{z}' = \bar{z}_{\{i_{\bar{z}} = +\infty\}} = \bar{z}_{\{C_t < C_\infty \text{ pour tout } t\}}$$

<u>est</u> $\bar{\underline{\underline{F}}}$<u>-prévisible</u>.

DEMONSTRATION. Soit $Z_t = I_{\{t<\infty\}}$. Alors $\bar{Z}^+$ est l'indicatrice de $[0,\bar{z}[$ (je devrais mettre des $[\![\ ,[\![$! Je pense que tout le monde comprend comme çà, et j'économise l'énergie), de sorte que $\bar{z}$ est un $\bar{\underline{\underline{F}}}$-t.a.. On a $\bar{\underline{\underline{F}}}_{\bar{z}} \subset \bar{\underline{\underline{F}}}_\infty = \underline{\underline{F}}_z$. Inversement, si $K \in \underline{\underline{F}}_z$ on a $K \cap \{j_t = \infty\} \in \underline{\underline{F}}_{j_t}$, ou $K \cap \{\bar{z} \leq t\} \in \underline{\underline{F}}_{j_t}$, et comme $K \in \bar{\underline{\underline{F}}}_\infty$ cela entraîne $K \in \bar{\underline{\underline{F}}}_{\bar{z}}$. D'où (10).

Pour voir (11), nous remarquons que C_t est un $\bar{\underline{\underline{F}}}$-t.a. (si Z est l'indicatrice de $[0,t[$, $\bar{Z}^+$ est l'indicatrice de $[0,C_t[$), et que $\bar{z} = C_\infty = \sup_t C_t$. Ainsi $\bar{z}' = C_\infty$ sur l'ensemble où les C_t annoncent C_∞ , et $+\infty$ sinon : il est annoncé sur l'ensemble $\{\ \bar{z}' < \infty\ \}$, donc $\bar{\underline{\underline{F}}}$-prévisible.

Toujours une conséquence du même résultat évident :

LEMME 10 . *Si* T *est un* $\underline{\underline{F}}$-*t.a.*, C_T *est un* $\overline{\underline{\underline{F}}}$-*t.a.*. (S'applique aussi aux $\underline{\underline{G}}$-t.a. puisque $\overline{\underline{\underline{G}}}_t=\overline{\underline{\underline{F}}}_t$) .

DEMONSTRATION. Si Z est l'indicatrice de $[0,T[$, $\underline{\underline{F}}$-optionnel, $\overline{Z}^+$ est l'indicatrice de $[0,C_T[$, $\overline{\underline{\underline{F}}}$-optionnel.

REMARQUES. a) Il n'y a pas de résultat analogue pour les t.a.p., ni de réciproque (celle ci ne pourrait d'ailleurs concerner que la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$; il est *vrai* que si C_T est un $\underline{\underline{F}}$-t.a., $j_{C_T}=D_T$ est un $\underline{\underline{F}}$-t.a., cf. ci-dessous, mais cela ne suffit pas pour que T soit un $\underline{\underline{G}}$-t.a. (lemme 2, b)).

b) Soit $A\in\underline{\underline{F}}_T$; alors T_A est un $\underline{\underline{F}}$-t.a., donc $C_{(T_A)}=C_T I_A+\overline{z}I_{A^c}$ est un $\overline{\underline{\underline{F}}}$-t.a., donc $\{C_{(T_A)}\leq C_T\}=A\cup\{C_T=\overline{z}\}$ appartient à $\overline{\underline{\underline{F}}}_{C_T}$.
Supposons alors $T\leq z$. On a $A\in\underline{\underline{F}}_z=\overline{\underline{\underline{F}}}_{\overline{z}}$ et de même pour A^c, donc $A^c\cap\{C_T=\overline{z}\}\in\overline{\underline{\underline{F}}}_{C_T}$. par différence on obtient que $A\in\overline{\underline{\underline{F}}}_{C_T}$. Ainsi *avec les notations du lemme 10, si* $T\leq z$ *on a* $\underline{\underline{F}}_T\subset\overline{\underline{\underline{F}}}_{C_T}$.

Encore un lemme sur les temps d'arrêt, mais en sens inverse :

LEMME 11 . *Si* S *est un* $\overline{\underline{\underline{F}}}$-*t.a.*, j_S *est un* $\underline{\underline{F}}$-*t.a.*, *et* $\overline{\underline{\underline{F}}}_S=\underline{\underline{F}}_{j_S}$.
Si S *est un* $\overline{\underline{\underline{F}}}$-*t.a.p.*, i_S *est un* $\underline{\underline{F}}$-*t.a.p.*, *et* $\overline{\underline{\underline{F}}}_{S-}=\underline{\underline{F}}_{i_S-}$.

DEMONSTRATION. Traitons d'abord le cas où $S=t_B$, $B\in\overline{\underline{\underline{F}}}_t$. Dans ce cas, $j_S=j_t$ sur B , $j_\infty=z$ sur B^c , ou encore $j_S=(j_t)_B\wedge z$; c'est bien un $\underline{\underline{F}}$-t.a.

La tribu $\overline{\underline{\underline{F}}}_S$ consiste en les $A\in\overline{\underline{\underline{F}}}_\infty=\underline{\underline{F}}_z$ tels que $A\cap B\in\overline{\underline{\underline{F}}}_t=\underline{\underline{F}}_{j_t}$. De l'autre côté, nous utilisons une petite remarque de Doob, incroyablement triviale et utile, et qui ne figure dans aucun livre : si U et V sont deux $\underline{\underline{F}}$-t.a., $\underline{\underline{F}}_{U\wedge V}=\underline{\underline{F}}_U\cap\underline{\underline{F}}_V$ (démonstration : si $A\in\underline{\underline{F}}_U\cap\underline{\underline{F}}_V$, A est réunion des deux ensembles $A\cap\{U\leq U\wedge V\}$ et $A\cap\{V\leq U\wedge V\}$, qui sont dans $\underline{\underline{F}}_{U\wedge V}$). Ici $\underline{\underline{F}}_{j_S}=\underline{\underline{F}}_{(j_t)_B\wedge z}$ consiste en les $A\in\underline{\underline{F}}_z$ tels que $A\cap B\in\underline{\underline{F}}_{j_t}$. C'est bien la même chose.

Ce cas élémentaire étant traité, on passe au cas où S est un inf fini de $\overline{\underline{\underline{F}}}$-t.a. élémentaires, en appliquant la remarque de Doob comme ci-dessus, i.e. on a le cas où S est étagé. Puis le cas général comme d'habitude.

Soit S un $\overline{\underline{\underline{F}}}$-t.a.p. ; l'ensemble $\{S=0\}$ appartient à $\overline{\underline{\underline{F}}}_{0-}=\underline{\underline{F}}_{0-}$. Quitte à se placer sur son complémentaire, on peut supposer $S>0$. Soit alors (S_n) une suite de $\overline{\underline{\underline{F}}}$-t.a. annonçant S. Les $\underline{\underline{F}}$-t.a. j_{S_n} annoncent $j_{S-}=i_S$ sur l'ensemble $\{i_S<\infty\}$: ils l'annoncent en effet sur $\{S\leq\overline{z}\}$, qui contient $\{i_S<\infty\}$ (mais peut être plus grand). Donc i_S est prévisible.

Enfin, prenant des S_n <u>finis</u> dans le raisonnement précédent, nous avons $\overline{\underline{\underline{F}}}_{S-} = \bigvee_n \overline{\underline{\underline{F}}}_{S_n} = \bigvee_n \underline{\underline{F}}_{j_{S_n}}$. Comme les j_{S_n} annoncent j_S sur $\{S<\infty\}$, et comme $\underline{\underline{F}}_\infty = \underline{\underline{F}}_{\infty-}$, nous avons $\underline{\underline{F}}_{j_S-} = \bigvee_n \underline{\underline{F}}_{j_{S_n}}$, et le théorème est établi.

REMARQUES. a) Nous avons supposé au départ que $\underline{\underline{F}}_\infty = \underline{\underline{F}}_{\infty-}$, et cette hypothèse n'est pas préservée par le changement de temps, puisque nous aboutissons à $\overline{\underline{\underline{F}}}_\infty = \underline{\underline{F}}_z$, qui peut être différent de $\overline{\underline{\underline{F}}}_{\infty-} = \underline{\underline{F}}_{z-}$ (néanmoins, $z=\infty$ dans la plupart des applications). J'ai buté sur la démonstration de la dernière assertion du théorème (plus précisément, sur la démonstration même du fait que $\overline{\underline{\underline{F}}}_\infty = \underline{\underline{F}}_{z-}$), sans l'hypothèse que $\underline{\underline{F}}_\infty = \underline{\underline{F}}_{\infty-}$, et il ne m'a pas semblé que cela valait la peine d'être fouillé davantage.

b) Lorsque S est un $\overline{\underline{\underline{F}}}$-t.a., non nécessairement prévisible, on sait que j_S est un $\underline{\underline{F}}$-t.a., et on a $i_S = L_{j_S}$, donc i_S est un $\underline{\underline{G}}$-t.a. (lemme 4).

Nous tirons maintenant quelques conséquences de ces lemmes.

PROPOSITION 12. a) <u>Soit</u> $S \geq 0$, $\overline{\underline{\underline{F}}}_\infty$<u>-mesurable</u>. S <u>est un</u> $\overline{\underline{\underline{F}}}$<u>-t.a.p. si et seul</u>^{t} <u>s'il existe un</u> $\underline{\underline{F}}$<u>-t.a.p.</u> T <u>dont le graphe passe dans</u> G, <u>tel que</u> $C_T = S \wedge \bar{z}$. <u>Ou encore</u> : S <u>est un</u> $\overline{\underline{\underline{F}}}$<u>-t.a.p. si et seulement si</u> i_S <u>est un</u> $\underline{\underline{F}}$<u>-t.a.p.</u>.

b) <u>Avec les mêmes notations</u>, S <u>est un</u> $\overline{\underline{\underline{F}}}$<u>-t.a. si et seulement s'il existe un</u> $\underline{\underline{F}}$<u>-t.a.</u> T <u>dont le graphe passe dans</u> $R\cup[z]$, <u>tel que</u> $C_T = S \wedge \bar{z}$. <u>Ou encore</u> : S <u>est un</u> $\overline{\underline{\underline{F}}}$<u>-t.a. si et seulement si</u> j_S <u>est un</u> $\underline{\underline{F}}$<u>-t.a.</u>.

S <u>est un</u> $\overline{\underline{\underline{F}}}$<u>-t.a. totalement inaccessible si et seulement si</u>, <u>de plus</u>, $S \leq \bar{z}$, <u>et le graphe de</u> i_S <u>est disjoint de tout graphe de</u> $\underline{\underline{F}}$<u>-t.a.p.</u>.

DEMONSTRATION. D'après le lemme 11, si S est un $\overline{\underline{\underline{F}}}$-t.a.p., i_S est prévisible, son graphe passe dans G, et on a $C_{i_S} = S \wedge \bar{z}$.

Inversement, soit T un $\underline{\underline{F}}$-t.a.p. dont le graphe passe dans G, et soit (T_n) une suite annonçant T : comme G est l'ensemble des points de croissance à gauche de C (nous laissons de côté la petite nuance en 0), la suite des $\overline{\underline{\underline{F}}}$-t.a. C_{T_n} (lemme 10) annonce C_T, qui est donc prévisible. Ainsi, s'il existe T comme dans l'énoncé, $S \wedge \bar{z}$ est un $\overline{\underline{\underline{F}}}$-t.a.p.. Comme $\overline{\underline{\underline{F}}}_\infty = \overline{\underline{\underline{F}}}_{\bar{z}}$, $S = S_{\{S \leq \bar{z}\}} \wedge S_{\{S > \bar{z}\}}$ est un inf de deux $\overline{\underline{\underline{F}}}$-t.a.p., c'est un t.a.p..

Enfin, on conclut en remarquant que i_S est <u>la seule</u> v.a. U dont le graphe passe dans G, et telle que $C_U = S \wedge \bar{z}$, ce qui restreint la portée du "il existe".

Le cas optionnel est plus facile encore, nous le laissons de côté. Enfin, dire que S est un $\overline{\underline{F}}$-t.a. totalement inaccessible signifie que, de plus, [S] est disjoint de tout graphe de $\overline{\underline{F}}$-t.a.p.. Cela entraîne d'abord que $S\leq\bar{z}$, car toutes les v.a. $\overline{\underline{F}}_\infty$-mesurables et $>\bar{z}$ sont des $\overline{\underline{F}}$-t.a.p. Compte tenu de la caractérisation des $\overline{\underline{F}}$-t.a.p. donnée en a), on obtient alors aisément la dernière affirmation de l'énoncé.

Nous montrons ensuite comment on peut caractériser les processus $\overline{\underline{F}}$-optionnels et $\overline{\underline{F}}$-prévisibles. Mais l'énoncé suivant <u>n'est pas le meilleur possible</u> : l'étude des projections donnera un théorème plus plaisant (le corollaire 15 plus bas). Nous n'avons conservé celui-ci qu'en raison de la simplicité de la méthode.

LEMME 13. <u>Soit</u> $(Z_t)_{0\leq t<\infty}$ <u>un processus $\overline{\underline{F}}$-optionnel. Il existe un processus $\underline{F}$-optionnel</u> $(Y_t)_{0\leq t<\infty}$, <u>nul hors de</u> R^o, <u>tel que</u> $Z_t=Y_{j_t}$ <u>pour</u> $0\leq t<\bar{z}$, <u>et</u> Y <u>est alors unique</u>.

b) <u>Soit</u> $(Z_t)_{0\leq t\leq\infty}$ <u>un processus $\overline{\underline{F}}$-prévisible. Il existe un processus $\underline{F}$-prévisible</u> $(Y_t)_{0\leq t\leq\infty}$, <u>nul hors de</u> G, <u>tel que</u> $Z_t=Y_{i_t}$ <u>pour</u> $0\leq t\leq\bar{z}$, <u>et</u> Y <u>est alors unique</u>.

DEMONSTRATION. Soit f l'application $(t,\omega)\mapsto(j_t(\omega),\omega)$ de $[0,\bar{z}[$ dans $\mathbb{R}_+\times\Omega$. Nous désignons par $\underline{O}$ la tribu $\underline{F}$-optionnelle sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$, par $\overline{\underline{O}}$ la tribu trace de la tribu $\overline{\underline{F}}$-optionnelle sur l'ensemble ($\overline{\underline{F}}$-optionnel) $[0,\bar{z}[$. On a $f^{-1}(\underline{O})\subset\overline{\underline{O}}$ (prop. 8). Pour vérifier que $f^{-1}(\underline{O})=\overline{\underline{O}}$ aux évanescents près, il suffit de vérifier que tout intervalle stochastique $[0,S[$ appartient à $f^{-1}(\underline{O})$, où S est un $\overline{\underline{F}}$-t.a., $S\leq\bar{z}$. Or $[0,S[=f^{-1}([0,j_S[)$ (si $s\leq\bar{z}$, $r<s \Leftrightarrow j_r<j_s$).

Comme R est l'ensemble des j_s, $s<\bar{z}$, la connaissance de Y_{j_s} pour tout s détermine Y sur R, donc sur l'enveloppe optionnelle R^o. Celle ci étant optionnelle par définition, on peut remplacer Y par 0 hors de R^o, et c'est fini.

Pour b), le raisonnement est tout analogue.

Nous allons mettre ce résultat en relation avec les résultats du § 1. En effet, si l'on cherche un processus Y tel que $Z_t=Y_{j_t}$ ou Y_{i_t}, le plus naturel est de tenter de prendre $Y=\underline{C}(Z)$, défini par

$$Y_t=\underline{C}(Z)_t=Z_{C_t} \tag{13}$$

Malheureusement, si Z est $\overline{\underline{F}}$-optionnel (prévisible), $\underline{C}(Z)$ n'est pas tout à fait $\underline{F}$-optionnel (prévisible).

LEMME 14. Si Z est $\underline{\underline{F}}$-prévisible, $\underline{\underline{C}}(Z)$ est $\underline{\underline{F}}$-prévisible ; si Z est $\underline{\underline{F}}$-optionnel, $\underline{\underline{C}}(Z)$ est $\underline{\underline{G}}$-optionnel.

DEMONSTRATION. Cas prévisible . Si Z est l'indicatrice de $\{0\}\times A$, $A\in\underline{\underline{F}}_{0-}$, $\underline{\underline{C}}(Z)$ est le processus prévisible $I_A(\omega)I_{[0,j_0]}(t,\omega)$. Si Z est l'indicatrice de $]0,S]$, où S est un $\underline{\underline{F}}$-t.a., $\underline{\underline{C}}(Z)$ est l'indicatrice de $]j_0,j_S]$, et on applique le lemme 11, 1e partie.

Cas optionnel. Si Z est l'indicatrice de $[0,S[$, où S est un $\underline{\underline{F}}$-t.a., $\underline{\underline{C}}(Z)$ est l'indicatrice de $[0,i_S[$, et i_S est un $\underline{\underline{G}}$-t.a. d'après la remarque b) après le lemme 12.

On passe ensuite des générateurs aux tribus, de la manière accoutumée.

Pour obtenir une nouvelle démonstration du théorème 13, il reste dans le cas optionnel à appliquer le lemme 3, puis à remplacer $\underline{\underline{C}}(Z)$ par 0 sur R^{oc} ou G^c suivant le cas.

PROJECTIONS ET PROJECTIONS DUALES

Nous arrivons maintenant aux résultats vraiment importants de l'exposé. En voici l'idée. Donnons nous un processus mesurable Z (resp. un processus croissant intégrable non adapté H, nul en 0). Nous désirons calculer la projection optionnelle $\overline{Z}^o$ ou prévisible $\overline{Z}^p$ de Z sur $(\underline{\underline{F}}_t)$, et de même la projection duale optionnelle ${}^o\overline{H}$ ou prévisible ${}^p\overline{H}$ de H sur $(\underline{\underline{F}}_t)$. En gros, on peut s'attendre à une recette de calcul du genre suivant :

- former le processus Z_{C_t} ou H_{C_t}
- calculer la projection ou projection duale voulue de ce processus relativement à $(\underline{\underline{F}}_t)$
- revenir à $(\underline{\underline{F}}_t)$ par le changement de temps i_t ou j_t convenable.

Nous verrons que,en effet, on a quelque chose de ce genre, mais avec une nuance importante dans le cas de la projection duale optionnelle.

THEOREME 14. Soit $(Z_t)_{0\leq t\leq\infty}$ un processus $\mathcal{F}_\infty\times\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable, positif ou borné, arrêté à l'instant $\overline{z}$. Sa projection $\underline{\underline{F}}$-optionnelle $\overline{Z}^o$ s'obtient ainsi : on forme le processus $Y_t=Z_{C_t}$, sa projection $\underline{\underline{F}}$-optionnelle $X_t=Y^o_t$, et l'on a enfin $\overline{Z}^o_t = X_{j_t}$. De même pour la projection prévisible, en remplaçant o par p, j par i.

DEMONSTRATION. Traitons le cas prévisible. Nous posons donc $Y_t=Z_{C_t}$, de sorte que $Z_{t\wedge\overline{z}} = Y_{i_t}=Y_{j_t}$, et cela vaut aussi Z_t puisque Z est arrêté à $\overline{z}$. Soient alors S un $\underline{\underline{F}}$-t.a.p. et A un élément de $\underline{\underline{F}}_{S-}$; d'après le lemme 11 on sait que i_S est un $\underline{\underline{F}}$-t.a.p. et que $A\in\underline{\underline{F}}_{i_S-}$. Alors

$E[Z_S I_A]=E[Y_{i_S} I_A]=E[X_{i_S} I_A]$ (définition de la proj. $\underline{\underline{F}}$-prévisible)
et on remarque que le processus (X_{i_t}) est $\overline{\underline{\underline{F}}}$-prévisible (prop. 8).
Le cas optionnel est exactement semblable.

COROLLAIRE 15. <u>Si</u> Z <u>est</u> $\overline{\underline{\underline{F}}}$-<u>optionnel</u> (<u>prévisible</u>) <u>arrêté à</u> $\overline{z}$, <u>il existe</u> Y $\underline{\underline{F}}$-<u>optionnel</u> (<u>prévisible</u>) <u>tel que</u> $Z_t=Y_{j_t}$ ($Z_t=Y_{i_t}$).

DEMONSTRATION. Z est sa propre projection $\overline{\underline{\underline{F}}}$-optionnelle (prévisible).
Le lecteur retrouvera aisément les détails du lemme 13 quant à l'unicité, etc.

Pour traiter le cas des projections duales, nous aurons besoin d'un lemme sur les fonctions de variables réelles, dû à Getoor-Sharpe. Soit c(t) une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$, continue à droite, finie ou non, avec $c(0)\geq 0$; on définit son inverse à droite j(t), son inverse à gauche i(t) ($i(t)=\sup\{s : c(s)<t\}$, $j(t)=\inf\{s : c(s)>t\}$). Soit h(t) une fonction croissante et continue à droite. Alors si $y\geq 0$ est borélienne

(14) $\quad \int_{]0,\infty[} y(i(s))dh(s) = \int_{]0,\infty[} y(s)dh(c(s))$ $\quad (y(+\infty)=0$ par convent.)

vérification : il suffit de prendre $y=I_{]0,t]}$, les deux côtés valent $h(c(t)-h(c(0))$.

On a d'ailleurs aussi <u>lorsque</u> c <u>est continue</u>

(15) $\quad \int_{]0,\infty[} y(c(s))dh(s) = \int_{]0,\infty[} y(s)dh(j(s))$

C'est la même formule, en réalité, appliquée à j, fonction croissante dont l'inverse à gauche est c.

Maintenant, regardons la mesure dh(c(s)), en supposant toujours c continue. Soit [u,v] un intervalle contigu à l'ensemble M, ensemble des points de croissance de c ; posant $d\lambda(s)=dh(c(s))$, nous avons

$$\lambda(]u,v[)=0\ ,\ \lambda(v)=\lim_\varepsilon(h(c(v+\varepsilon))-h(c(v-\varepsilon)))=\lim_\varepsilon (h(c(v+\varepsilon))-h(c(v)))=0$$

et de même $\qquad \lambda(u)=\lim_\varepsilon(h(c(u))-h(c(u-\varepsilon))) = \Delta h(c(u))$

ainsi, sur la mesure λ, la masse de dh en la valeur palier $c(u)=c(v)$ est venue se placer au point u, extrémité <u>gauche</u> de l'intervalle contigu [u,v]. Nous définissons maintenant une nouvelle mesure μ en <u>transportant cette masse au point</u> v , nous dirons que μ, ou sa fonction de répartition $\ell(t)$ s'obtient en <u>ramenant sur</u> R la mesure dh(c(t)). Nous avons alors

(16) $\quad \int_{]0,\infty[} y(j(s))dh(s) = \int_{]0,\infty[} y(s)d\ell(s)$

Noter que la masse située éventuellement au point sup M s'est perdue à l'infini dans l'opération.

Ceci étant, on a le théorème sur les projections duales :

THEOREME 16. Soit (H_t) un processus croissant intégrable, sans condition d'adaptation, ne chargeant pas 0, ni $]\overline{z},\infty]$ (ni $+\infty$). La projection duale $\overline{\underline{\underline{F}}}$-prévisible $^p\overline{H}$ s'obtient ainsi : on forme le processus croissant intégrable $K_t=H_{C_t}$; on prend sa projection duale $\underline{\underline{F}}$-prévisible ^pK_t ; enfin $^p\overline{H}_t={}^pK_{j_t}={}^t\, {}^pK_{i_t}$. De plus, ^pK est porté par G .

De même pour la projection duale $\overline{\underline{\underline{F}}}$-optionnelle $^o\overline{H}$: on forme $K_t=H_{C_t}$ comme ci-dessus, puis L_t en ramenant la masse sur R, puis la projection duale $\underline{\underline{F}}$-optionnelle ^oL_t , enfin $^o\overline{H}_t={}^oL_{j_t}$. De plus, ^oL est porté par R.

DEMONSTRATION. Soit U un processus $\overline{\underline{\underline{F}}}$-prévisible borné, et soit Z le processus $\overline{\underline{\underline{F}}}$-prévisible obtenu par arrêt de U à l'instant $\overline{z}$. Comme Z est sa propre projection $\overline{\underline{\underline{F}}}$-prévisible, si l'on forme $Y_t=Z_{C_t}$, puis sa projection $\underline{\underline{F}}$-prévisible Y^p_t , on a $Z_t=Y^p_{i_t}$.

Alors $E[\int_{]0,\infty[} U_s dH_s]= E[\int_{]0,\infty[} Z_s dH_s]$ (H ne charge pas $]\overline{z},\infty[$)

$$= E[\int_{]0,\infty[} Y^p_{i_s} dH_s] = E[\int_{]0,\infty[} Y^p_s dK_s] \text{ (formule 14)}$$

$$= E[\int_{]0,\infty[} Y^p_s\, d^pK_s] \text{ (définition de la proj. duale } \underline{\underline{F}}\text{-prévisible)}$$

La mesure dK_s est portée par l'ensemble $\underline{\underline{F}}$-prévisible G, il en est donc de même de sa projection $\underline{\underline{F}}$-prévisible duale d^pK_s. Or sur G on a $s=i_{C_s}$, et l'on peut poursuivre les égalités

$$= E[\int_{]0,\infty[} Y^p_{i_{C_s}} d^pK_s] = E[\int Z_{C_s} d^pK_s] = E[\int Z_s d^pK_{j_s}] \text{ (fle (15).}$$

Comme ^pK est porté par G, on a en fait $^pK_{j_s}={}^pK_{i_s}$ pour tout s, ce qui prouve (prop. 8) que le processus croissant $^pK_{j_t}$ est continu à droite et $\overline{\underline{\underline{F}}}$-prévisible. Comme il ne charge manifestement pas $]\overline{z},\infty]$, on peut remplacer Z par U, et on a obtenu alors la propriété caractéristique d'une projection duale $\overline{\underline{\underline{F}}}$-prévisible.

Traitons de même, plus rapidement, le cas optionnel. Soit donc U $\overline{\underline{\underline{F}}}$-optionnel ; son arrêté à $\overline{z}$ est Z $\overline{\underline{\underline{F}}}$-optionnel, qui s'écrit $Y^o_{j_t}$ par le même raisonnement que ci-dessus. On a alors

$$E[\int U_s dH_s]\underset{\text{arrêt à } \overline{z}}{=}E[\int Z_s dH_s]=E[\int Y^o_{j_s} dH_s]\underset{\text{fle (16)}}{=}E[\int Y^o_s dL_s]=E[\int Y^o_s d^oL_s]$$

Maintenant, la mesure dL est portée par R, donc d^oL est portée par l'enveloppe optionnelle R^o. Comme $R^o=R\cup M^{\rightarrow}_{\pi}$, et que ce dernier ensemble n'est chargé par aucun processus croissant $\underline{\underline{F}}$-optionnel, d^oL est portée par R. Sur R on a $s=j_{C_s}$, et la chaîne d'égalités continue

$$=E[\int Y^o_{j_{C_s}} d^oL_s]=E[\int Z_{C_s} d^oL_s] = E[\int Z_s d^oL_{j_s}]$$

le processus ${}^oL_{j_t}$ ne charge pas $]\overline{z},\infty]$, donc on peut remplacer Z par U et le tour est joué.

<u>Note à la page 2.</u> << Comme d'habitude >> est un peu abusif, car une telle décomposition n'a été faite que dans le cas markovien. C'est heureusement très simple. Soit un ensemble mesurable à coupes dénombrables, que nous noterons ici H (p.2, on a $H=\overleftarrow{M}$) . On sait que H est une réunion dénombrable de graphes de v.a. positives U_n , ce qui entraîne que la mesure sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ $\mu=\int P(d\omega)\Sigma_{t\in H(\omega)}\varepsilon_t$ est σ-finie. Soit alors H_o la réunion μ-essentielle de tous les graphes de temps d'arrêt contenus dans H ; H_o est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt, donc un ensemble optionnel, et si T est un temps d'arrêt on a $P\{\omega :(T(\omega),\omega) \in H\backslash H_o \} = 0$. Lorsque H est progressif, on pose $H\backslash H_o=H_\pi$, c'est un ensemble progressif dont la projection optionnelle est évanescente.

BIBLIOGRAPHIE.

[1]. Théorie générale et changement de temps, par N. El KAROUI et G. WEIDENFELD, dans ce volume.

[2]. Article à paraître.