Albert Benveniste

Séparabilité optionnelle, d'après Doob

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 10 (1976), p. 521-531

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__521_0>

SEPARABILITE OPTIONNELLE , D'APRES DOOB

par A. Benveniste[(*)]

Nous essayons de présenter ici (en tâchant d'expliciter certains points délicats) un article de DOOB à paraître aux Annales de l'Institut Fourier, dans lequel DOOB prouve le résultat étonnant que, si la définition de la séparabilité est légèrement modifiée, tout processus optionnel est séparable. Avant même ce résultat, DOOB donne des démonstrations élémentaires de résultats jugés difficiles sur les processus (élémentaires signifiant : sans le th. de section).

§1 Réarrangements décroissants de temps d'arrêt

$\{\Omega,\mathcal{F}_t,\mathbb{P}\}_{t>0}$ est un espace filtré satisfaisant aux conditions habituelles. Par "processus" nous entendrons une fonction mesurable $(t,\omega) \to X_t(\omega)$ à valeurs dans $\{E,\mathcal{E}\}$ (espace métrisable et séparable muni de sa tribu borélienne), et telle que $X_t \in \mathcal{F}_t$; nous ne considérons donc que des processus adaptés.

Doob utilise constamment dans son travail une méthode de réarrangements croissants et décroissants de temps d'arrêt, que nous allons décrire maintenant, en insistant sur le cas décroissant, qui est plus délicat.

Tout d'abord, soit Γ un ensemble aléatoire, réunion d'un nombre fini de graphes de temps d'arrêt $T_1,\dots,T_n$. Pour tout ω, renumérotons les points $T_1(\omega),\dots,T_n(\omega)$ par ordre de grandeur croissante - si cet ensemble ne compte que k points, nous répétons n-k fois le dernier d'entre eux. Soient $S_1(\omega),\dots S_n(\omega)$ les nombres ainsi obtenus : on vérifie aussitôt que $S_1,\dots,S_n$ sont des temps d'arrêt (S_1 est le début de Γ, S_2 vaut $(\sup_i T_i)\wedge$(début de $\Gamma\setminus[\![S_1]\!]$), etc). On dit que les S_i forment le réarrangement croissant des T_i . Quant au réarrangement décroissant des T_i , c'est la suite finie des temps d'arrêt $S'_1=S_n$, $S'_2=S_{n-1}\dots$ $S'_n=S_1$.

Considérons maintenant une suite double (T_{nm}) de temps d'arrêt, et soit $U=\inf_{n,m} T_{nm}$. Nous nous proposons, sous des conditions à préciser, de définir une suite décroissante (R_i) de temps d'arrêt, qui converge vers U en laissant échapper au plus un nombre fini de points de la suite double.

CAS 1 : Il existe une suite (U_n) strictement décroissante de temps d'arrêt, qui converge vers U, et telle que pour tout n on ait $U_{n+1}\leq T_{nm}\leq U_n$, et que $T_{nm}=U_{n+1}$ pour $m\geq k_n$, entier fixe (non aléatoire !). On ne suppose pas ici que T_{nm} diminue lorsque m augmente. Soit alors $S'_{n1},\dots,S'_{n,k_n}$ le réarrangement décroissant de $T_{n1},\dots,T_{nk_n}$; la suite cherchée est

$$S'_{11},\dots,S'_{1,k_1},S'_{21},\dots,S'_{2,k_2},S'_{31},\dots.$$

Elle ne laisse échapper aucun point.

(*) LABORIA, IRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, 78150 LE CHESNAY

CAS 2 : Les U_n étant comme ci-dessus, chaque suite $(T_{nm})_{m>0}$ est décroissante, converge vers U, et telle que $T_{n1}\leq U_n$. L'ensemble des points de la suite double contenus entre U_{n+1} et U_n est alors fini, mais aléatoire, et il faut faire plus attention. Soit Γ_n l'ensemble $[\![U_{n+1},U_n]\!] \cap (\cup_{n,m} [\![T_{nm}]\!])$: c'est un ensemble optionnel, on vient de le dire, à coupes finies. Soient d'autre part $k_{n1},\dots k_{nn}$ des entiers, et soit H_n l'ensemble $[\![U_{n+1},U_n]\!] \cap (\cup_{m\leq k_1} [\![T_{1m}]\!] \cup \dots \cup_{m\leq k_n} [\![T_{nm}]\!])$.
Si les entiers k_i sont pris assez grands, nous avons

$$P\{ \omega : \Gamma_n(\omega)\neq H_n(\omega)\} \leq 2^{-n}$$

Par conséquent, l'ensemble aléatoire $H=\cup_n H_n$ ne laisse échapper qu'un nombre fini de points de l'ensemble aléatoire $\cup_n \Gamma_n$ (p.s.). Comme chaque H_n ne comporte que $k_{n1}+\dots+k_{nn}$ points au plus, on peut procéder comme dans le cas 1. Nous nous permettrons de parler - malgré l'absence d'unicité - "du" réarrangement croissant de la suite double.

Valeurs d'adhérence des trajectoires.

Outre les réarrangements de temps d'arrêt , nous aurons besoin d'un autre outil que nous allons exposer maintenant; nous nous en servirons sans faire référence à ce paragraphe.

On rappelle que X est un processus à valeurs dans $\{E,\mathcal{E}\}$, espace métrisable séparable muni de sa tribu borélienne; nous désignerons par (x_m) une suite dense dans E.

(1.1) LEMME: <u>soit (T_n) une suite croissante de variables aléatoires annonçant une variable</u> T; <u>posons</u> $Y_t^m = d(x_m,X_t)$ (où d est une distance sur E), <u>et supposons que</u>

$$\forall\, m,\quad \liminf_n\ Y^m_{T_n} = \lim \inf\{Y^m_t | t\nearrow T,\ t<T\} \quad \text{p.s.}$$

<u>Alors, pour presque toute trajectoire</u> ω, <u>les valeurs d'adhérence de</u> $X_t(\omega)$ $(t \uparrow T(\omega)\ ,\ t<T(\omega))$ <u>et de</u> $X_{T_n}(\omega)$ $(n\to\infty)$ <u>sont les mêmes</u> .

DEMONSTRATION: supposons la conclusion non satisfaite. Donnons nous $\varepsilon>0$. Il existe donc un ensemble non négligeable A appartenant à $\mathcal{F}$, tel que, pour tout ω appartenant à A, il existe $x \in E$ (x dépend de ω) tel que l'on ait, en désignant par Y le processus à valeurs réelles $d(x,X)$,

$$\liminf Y_{T_n}(\omega) > \varepsilon > 0 = \liminf \{Y_t(\omega) | t \nearrow T(\omega), t < T(\omega)\} ,$$

où ε est ici indépendant de ω. Pour chacun de ces points x, nous choisissons un point x_m tel que $d(x,x_m) < \varepsilon/4$. Donc, $\forall\, \omega \in A$, $\exists\, x_m$ tel que

$$\liminf Y^m_{T_n}(\omega) > 3\varepsilon/4 , \quad \text{et} \quad \liminf \{Y^m_t(\omega) | t \nearrow T(\omega), t < T(\omega)\} < \varepsilon/4.$$

Et, comme $\mathbb{P}(A)>0$, il existe donc un m tel que

$$\mathbb{P}\left(\liminf Y^m_{T_n} > 3\varepsilon/4 > \varepsilon/4 > \liminf \{Y^m_t | t \nearrow T, t<T\} \right) > 0 ,$$

ce qui contredit l'hypothèse ■

§2: <u>Processus séparables</u>.

On rappelle qu'un processus X est séparable s'il existe un sous-ensemble dénombrable dense Σ de $\mathbb{R}_+$ (que nous appelons <u>ensemble séparant</u>) tel que, pour presque tout ω, le graphe de la trajectoire $t \to X_t(\omega)$ soit contenu dans la fermeture du graphe de la restriction à Σ de cette trajectoire. On rappelle que tout processus admet une modification séparable.[1]

Si $E = \mathbb{R}$, nous introduisons les notations

$$X^*_t = \limsup\{X_s | s>t, s\to t\} \quad ; \quad {}^*X_t = \limsup\{X_s | s<t, s\to t\}$$
$$X_{*t} = \liminf \{X_s | s>t, s\to t\} \quad ; \quad {}_*X_t = \liminf \{X_s | s<t, s\to t\} .$$

(2.1) PROPOSITION: <u>soit</u> X <u>séparable à valeurs dans</u> $\mathbb{R}$; <u>alors</u>, ${}^*X$ <u>et</u> ${}_*X$ <u>sont prévisibles</u>.

DEMONSTRATION: examinons ${}^*X$. Soit Σ un ensemble séparant pour X. Posons

$$X^n_t = \sum_{k>0} 1_{\{ \frac{k}{2^n} < t \le \frac{k+1}{2^n} \}} \cdot \sup\{X_s | s \in \,]\tfrac{k-1}{2^n} , \tfrac{k}{2^n}] \cap \Sigma \} ;$$

alors, X^n est prévisible, comme somme de processus adaptés et continus à gauche; le résultat provient alors de ce que ${}^*X = \limsup X^n$.■

1. Si l'espace d'états est compact métrisable. Ce résultat n'est pas utilisé dans la suite.

(2.2) PROPOSITION: <u>soit X séparable à valeurs dans $\mathbb{R}$; X^* et X_* sont alors progressivement mesurables</u>.

DEMONSTRATION: on regarde X^*. Soit $b>0$, posons

$$X_t^n \begin{cases} = \sup\{ X_s \mid s \in [bj2^{-n}, b(j+1)2^{-n}[\cap \Sigma \} & \text{si } b(j-1)2^{-n} \leq t < bj2^{-n},\ j<2^n \\ = X_b^* & \text{si } b(1-2^{-n}) \leq t \leq b\ . \end{cases}$$

Pour tout t, la variable X_t^n est $\mathcal{F}_b$-mesurable lorsque $t \leq b$; pour tout ω, la trajectoire $t \to X_t^n(\omega)$ est continue à droite de $]0,b]$ dans $\mathbb{R}$; il vient donc que X^n est $\mathcal{R}_b \otimes \mathcal{F}_b$-mesurable ($\mathcal{R}_b$: boréliens de $]0,b]$). Le résultat provient alors de ce que X^* coïncide sur $]0,b]$ avec $\limsup X^n$ ∎

La notion de temps T à valeurs dans Σ est ici bien claire. Au §4, Σ sera un ensemble aléatoire, et il faudra alors comprendre que le graphe de T est contenu dans Σ.

(2.3) THEOREME: <u>soit X séparable, et T un temps prévisible fixé; il existe alors une suite (T_n) de temps optionnels à valeurs dans Σ, annonçant T, telle</u> **<u>que, pour presque tout ω, les valeurs d'adhérence de $X_t(\omega)$</u> ($t \to T(\omega)$, $t<T(\omega)$) <u>et de $X_{T_n}(\omega)$</u> $(n\to\infty)$ <u>soient les mêmes</u> .**

DEMONSTRATION: nous commençons par supposer que $E = \mathbb{R}$, et nous allons montrer l'existence d'une suite (T_n) de temps optionnels à valeurs dans Σ, annonçant T et telle que

(1) $$\limsup X_{T_n} = {}^*X_T \quad \text{p.s.}$$

Soit (V_n) une suite arbitraire annonçant T, et (s_n) une énumération de Σ; nous choisissons la suite d'entiers p_n de telle sorte que

$$\mathbb{P}\{\forall m \leq p_n,\ s_m \notin [V_n, V_{n+1}[\} < 2^{-n}$$

et nous posons

$$U'_n = \text{début de } \left(\Sigma_{p_n} \times \Omega \cap [\![V_n, V_{n+1}[\![\right) \ (*) .$$

puis $$U_n = \inf\{U'_m \mid m \geq n\}.$$

(*) si (s_n) est une énumération de Σ, nous notons $\Sigma_N = \{s_n, n \leq N\}$.

Nous avons ainsi montré que l'on peut annoncer T à l'aide d'une suite de temps optionnels à valeur dans Σ. Soit q_n tel que

$$\mathbb{P}\left(\sup\{X_s \mid s\in]U_n,U_{n+1}[\} - \sup\{X_s \mid s\in]U_n,U_{n+1}[\cap \Sigma_{q_n}\} > \frac{1}{n} \right) < 2^{-n} ;$$

nous posons alors $T_{nj} = s_j$ si $s_j \in [U_n,U_{n+1}[$ et $j\leq q_n$, $= U_{n+1}$ sinon. En vertu du CAS 1, nous pouvons alors considérer le réarrangement croissant de la famille $(T_{nj} \mid n\in\mathbb{N}, j\leq q_n)$, notons-la (T_n), elle satisfait à (1).

Passons au cas où l'espace d'états est E quelconque; soit (x_m) une suite dense dans E; pour tout m, posons $Y_t^m = d(X_t,x_m)$ (d est la distance sur E). Il nous suffit de construire une suite (T_n) annonçant T, telle que, pour tout m,

(2) $$\liminf Y^m_{T_n} = {}_*Y^m_T \quad \text{p.s.}$$

Pour chaque Y^m fixé, c'est (1) avec "inf" au lieu de "sup". Considérons de nouveau la suite (U_n) construite plus haut; pour chaque m, nous pouvons construire une suite $(T_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant à (1) et telle que $T_{m,0} > U_m$. Nous sommes alors dans le CAS 2, et le réarrangement croissant de la famille $(T_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ satisfait bien à (2) ∎

(2.4) THEOREME: <u>soit X séparable, et T un temps optionnel; il existe une suite décroissante (T_n) de temps optionnels à valeurs dans Σ annonçant T en décroissant(*), et telle que, pour p.s. tout ω sur $\{T<\infty\}$, les valeurs d'adhérence de $X_t(\omega)$ $(t\to T(\omega),\ t>T(\omega))$ et de $X_{T_n}(\omega)$ $(n\to\infty)$ soient les mêmes</u> .

DEMONSTRATION: comme au théorème précédent, on se ramène à montrer l'existence de (T_n) telle que

(3) $$\limsup X_{T_n} = {}^*X_T \quad \text{p.s.}$$

dans le cas où l'espace d'états est $\mathbb{R}$. On commence par construire une suite (U_n)

(*) cela signifie que $T_n>T$ sur $\{T<\infty\}$, et $\lim T_n = T$; "annonçant" n'est évidemment pas très réussi!

à valeurs dans Σ, annonçant T en décroissant. On choisit alors p_n assez grand pour que

$$P\left(T<\infty\ ;\ \sup\{X_t|t\in]T,U_n[\}-\sup\{X_t|t\in]T,U_n[\cap\Sigma_{p_n}\}>2^{-n}\right)<2^{-n}$$

et l'on définit $T_{nj}=s_j$ si $s_j\in]T,U_n[\cap\Sigma_{p_n}$, $=U_n$ sinon. Le réarrangement décroissant de la famille $(T_{nj}|n\in\mathbb{N},j\leq p_n)$ (CAS 1) satisfait à (3) ∎

(2.5) THEOREME: <u>soit</u> X <u>séparable, et</u> T <u>prévisible. Il existe une suite</u> (T_n) <u>de temps optionnels à valeur dans</u> Σ, <u>convergeant vers</u> T, <u>et telle que, pour presque</u> **<u>tout</u> ω, <u>les valeurs d'adhérence de</u> $X_{T_n}(\omega)$ $(n\to\infty)$ <u>et de</u> $X_t(\omega)$ $(t\to T(\omega))$ <u>soient</u> <u>les mêmes</u>.**

DEMONSTRATION: nous résumons. On procède comme suit: 1) on encadre T par deux suites (U_n) et (V_n) à valeurs dans Σ, l'une annonçant T en croissant, l'autre en décroissant; 2) pour tout n, on construit la suite $(T_{nj}|n\in\mathbb{N},j\leq p_n)$ ayant les propriétés maintenant habituelles, et telle que $U_n<T_{nj}<V_n$; 3) on remarque que, en dehors de $]U_n,V_n[$, il n'y a qu'un nombre fini de temps T_{nj}, ce qui permet, par un raisonnement analogue au CAS 2, de réarranger la famille (T_{nj}) en une suite convergeant vers T; ceci résout le cas où X est à valeurs réelles, et où l'on cherche à atteindre la lim sup. On généralise comme précédemment ∎

REMARQUE: on ne peut, en général, demander que la suite (T_n) soit monotone: cela nécessiterait une propriété de "séparabilité à gauche" (ou à droite).

(2.6) LEMME: <u>soit</u> X <u>séparable,</u> T <u>optionnel,</u> <u>et</u> Y <u>une variable</u> $\mathcal{F}_{T-}$<u>-mesurable à valeurs dans</u> $(E,\mathcal{E})$. <u>On suppose qu'il existe une suite</u> (T_n) <u>de temps optionnels à valeur dans</u> Σ, <u>convergeant vers</u> T, <u>et telle que</u> Y <u>soit p.s. un point d'accumulation de la suite</u> (X_{T_n}); <u>il existe alors une suite</u> (S_n) <u>de temps optionnels à valeur dans</u> Σ, <u>convergeant vers</u> T, <u>et telle que</u> $\lim X_{S_n} = Y$ <u>p.s.</u>

DEMONSTRATION: comme précédemment, quitte à remplacer X_t et Y par $f\circ X_t$ et

f_0Y, où f parcourt un ensemble dénombrable dense dans $\mathcal{C}(E)$, on se ramène au cas où $E=\mathbb{R}$. Remarquons pour commencer que $\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_{T_n}) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_{T\wedge T_n}) \to Y$. Définissons alors la suite d'entiers (p_n) par $p_1=1$, et, pour $n>1$

$$\mathbb{P}\left(\min\{|X_{T_j}-Y|+|Y-\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_{T_j})|;p_{n-1}<j<p_n\} > 2^{-n} \right) < 2^{-n} .$$

Soit alors S'_n le début de l'ensemble aléatoire à coupes discrètes

$$\{ \cup [\![T_j]\!] ;p_{n-1}<j<p_n\} \cap \{(t,\omega);|X_t(\omega)-Y_t(\omega)|<2^{-n}\},$$

où Y_t est une version continue à droite de $\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t)$; bien que X ne soit pas progressif, il n'y a pas de difficulté, car on regarde X uniquement sur Σ. Il nous reste alors à poser $S_n = S'_n \wedge (\sup T_j;p_{n-1}<j<p_n)$ ∎

De ce lemme, et des résultats précédents, on déduit le résultat ci-dessous, où il est <u>nécessaire</u> de supposer $X_T \in \mathcal{F}_{T-}$ dans (i) et (iii); dans (ii), il nous suffit de supposer $X_T \in \mathcal{F}_T$, car nous n'avons pas à utiliser la convergence des martingales dans le cas où $T_n \searrow T$.

(2.7) COROLLAIRE: (i) <u>soit</u> T <u>prévisible tel que</u> X_T <u>soit p.s. un point d'accumulation de l'ensemble</u> $\{X_t|t\to T,t<T\}$; <u>on peut alors annoncer</u> T <u>à l'aide d'une suite</u> (T_n) <u>à valeurs dans</u> Σ <u>telle que</u> $\lim X_{T_n} = X_T$ <u>p.s.;</u>

(ii) <u>soit</u> T <u>optionnel tel que</u> X_T <u>soit p.s. un point d'accumulation de l'ensemble</u> $\{X_t|t\to T,t>T\}$; <u>on peut alors annoncer</u> T <u>en décroissant à l'aide d'une suite</u> (T_n) <u>à valeurs dans</u> Σ <u>telle que</u> $\lim X_{T_n} = X_T$ <u>p.s.;</u>

(iii) <u>soit</u> T <u>prévisible; il existe alors une suite</u> (T_n) <u>à valeurs dans</u> Σ <u>telle que</u> $\lim T_n = T$ <u>et</u> $\lim X_{T_n} = X_T$ <u>p.s.</u>

§3 <u>Théorèmes limites.</u>

(3.2) THEOREME: <u>soit</u> X <u>séparable borné à valeurs réelles, et</u> T <u>un temps prévisible; si</u> $\lim \mathbb{E}(X_{T_n})$ <u>existe pour toute suite</u> (T_n) <u>de temps optionnels à valeurs dans</u> Σ <u>annonçant</u> T, <u>alors,</u> X_{T-} <u>existe p.s.</u>

DEMONSTRATION: commençons par montrer que $L = \lim \mathbb{E}(X_{T_n})$ ne dépend pas de la suite (T_n) choisie. Soient (T'_n) et (T''_n) deux suites, donnant respectivement L' et L'' comme limites. Etant donné $\varepsilon>0$, on définit une suite (T_n) annonçant T par

$$T_1 = T'_1,\quad T_2 = \sup(T''_{n_2}, T_1),\quad T_3 = \sup(T'_{n_3}, T_2), \ldots$$

où n_m est tel que $P\{T_m = T'_{n_m}\} > 1-\varepsilon$ ou $P\{T_m = T''_{n_m}\} > 1-\varepsilon$ suivant que m est pair ou impair. Mais alors, la limite L donnée par cette suite satisfait à $|L-L'| < \varepsilon \|X\|_\infty$, avec la même propriété pour L'', ce qui donne bien $L' = L''$ puisque ε est arbitraire. Mais alors, (2.4) et (2.6) nous donnent l'existence d'une suite (T_n) (resp. (T'_n)) annonçant T, telle que $\lim X_{T_n} = {}^*X_T$ p.s. (resp. $\lim X_{T'_n} = {}_*X_T$ p.s.), et il vient bien que ${}_*X_T = {}^*X_T$ ■

(3.3) THEOREME: <u>soit</u> X <u>séparable borné à valeurs réelles, et</u> T <u>optionnel. Si</u> $\lim E(X_{T_n}; T_n<\infty\}$ <u>existe pour toute suite de temps</u> (T_n) <u>à valeurs dans</u> Σ, <u>annonçant</u> T <u>en décroissant, alors</u> X_{T+} <u>existe p.s.</u>

REMARQUE: on peut étendre (3.2) comme suit. Soit X séparable d'espace d'états métrisable, séparable et compact; supposons que, pour toute suite (T_n) à valeurs dans Σ annonçant T, <u>les lois de</u> X_{T_n} <u>convergent étroitement, alors</u> X_{T-} <u>existe p.s.</u>: c'est exactement (3.2) appliqué à $f \circ X$, où f parcourt une famille dénombrable dense dans $\mathcal{C}(E)$. On a le même résultat avec X_{T+}.

(3.4) THEOREME (MERTENS): <u>soit</u> X <u>séparable borné à valeurs réelles. Si, pour toute suite uniformément bornée</u> (T_n) <u>à valeurs dans</u> Σ <u>et croissante</u>, $\lim E(X_{T_n})$ <u>existe</u>, X <u>est alors p.s. pourvu de limites à gauche</u>.

DEMONSTRATION: c'est évidemment (3.2) plus le théorème de section, puisque ${}^*X$ et ${}_*X$ sont prévisibles; mais, DOOB donne une démonstration directe et étonnante. Soient $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, et posons

$$T = \inf\{s \mid {}^*X_s > b > a > {}_*X_s\}.$$

Il nous suffit évidemment de montrer que $T = +\infty$ p.s. pour un couple (a,b) arbitraire. Supposons donc l'existence d'un couple (a,b) et d'un entier k tels que $P\{T < k\} = \delta > 0$. Si S est une variable ≥ 0, on pose

$$[S,n] = \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \{X_{s_j} > b;\ S \leq s_j \leq k\}\Big) \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \{X_{s_j} < a;\ S \leq s_j \leq k\}\Big) .$$

où (s_j) est une énumération de Σ. Il est clair que, si $T(\omega)<k$, $X_{\cdot}(\omega)$ a commencé à osciller avant k, et l'on a $\omega \in [0,n]$ pour n assez grand. Soit alors (δ_n) une suite strictement décroissante et strictement comprise entre δ et $\delta/2$. Il existe n_1 tel que $\mathbb{P}[0,n_1] > \delta_1$; on pose alors

$$T_1' = \min\{s_j \mid j \leq n_1 ;\ X_{s_j} > b\},\quad T_1 = \inf(T_1',k);$$

T_1 est optionnel à valeurs dans Σ (il n'y a aucun inconvénient à supposer $\mathbb{N}\subset \Sigma$), et $X_{T_1}>b$ sur $\{T_1<k\}$, avec $\mathbb{P}\{T_1<k\}>\delta_1$. On choisit alors n_2 tel que

$$\mathbb{P}\{[0,n_1] \cap [T_1,n_2]\} > \delta_2,$$

et l'on pose

$$T_2' = \min\{s_j \mid s_j>T_1 ; j \leq n_2 ; X_{s_j}<a\},\quad T_2 = \inf(T_2',k);$$

T_2 est optionnel à valeurs dans Σ, et $X_{T_2}<a$ sur $\{T_2<k\}$, avec $\mathbb{P}\{T_2<k\}>\delta_2$. Et ainsi de suite. Posons alors $S_n = T_n^{\{T_n<k\}}$, la suite (S_n) est strictement croissante, bornée par k, et

$$\liminf \left(\mathbb{E}(X_{T_{2n+1}}) - \mathbb{E}(X_{T_{2n}}) \right) > (b-a).\delta/2 >0 \quad \blacksquare$$

(3.5) THEOREME: <u>soit</u> X <u>séparable borné à valeurs réelles. Supposons que, pour toute suite bornée décroissante</u> (T_n) <u>de temps à valeurs dans</u> Σ, $\lim \mathbb{E}(X_{T_n})$ <u>existe; alors,</u> X <u>est p.s. pourvu de limites à droite.</u>

DEMONSTRATION: soit $\varepsilon>0$. Définissons la famille croissante (T_α), où α parcourt l'ensemble des ordinaux dénombrables, par $T_0 = 0$,

$$T_{\alpha+1} = \inf\{t>0 \mid (\mathrm{osc}(X_{\cdot}) \text{ sur }]T_\alpha,T_\alpha+t[\ ) > \varepsilon\},$$

et $T_\alpha = \sup(T_\beta \mid \beta<\alpha\}$ si α est un ordinal limite. Il existe un ordinal dénombrable γ tel que $T_\gamma = T_{\gamma+1}$ p.s.; si $\mathbb{P}\{T_\gamma<\infty\}>0$, X n'est pas p.s. pourvu de limites à droite en T_γ, et l'hypothèse de (3.5) contredit alors (3.3). On a donc $T_\gamma = +\infty$, ce qui achève la démonstration, puisque ε est arbitraire $\blacksquare$

§4 Processus optionnellement séparables.

Les méthodes développées aux paragraphes précédents peuvent paraître d'un intérêt restreint dans la mesure où il est souvent interdit de modifier un processus pour le rendre séparable. Nous allons dans ce paragraphe étendre de manière frappante l'efficacité de ces méthodes grâce aux notions que voici.

(4.1) DEFINITION : soit X un processus, et soit Σ un ensemble aléatoire, réunion d'une suite de graphes $[\![S_n]\!]$ de temps optionnels(*). On dit que X est optionnellement séparable , et admet Σ comme ensemble séparant optionnel, si pour presque tout ω le graphe de la trajectoire $t \to X_t(\omega)$ est contenu dans la fermeture du graphe de la restriction de cette trajectoire à $\Sigma(\omega)$.

On définit de même la séparabilité prévisible.

REMARQUE; soit X optionnel et optionnellement séparable, et T un temps optionnel fini; le processus translaté $(X_{T+t})_{t>0}$ est adapté à la famille $(\mathcal{F}_{T+t})_{t>0}$ et admet comme ensemble séparant optionnel Σ^T composé des temps S_n^T définis par $S_n^T = (S_n - T).1_{\{S_n>T\}} + \infty.1_{\{S_n\leq T\}}$. Cette bonne propriété n'est évidemment pas satisfaite par la séparabilité ordinaire.

L'intérêt de cette notion provient du résultat suivant(×) :

(4.2) THEOREME: tout processus optionnel est optionnellement séparable; tout processus prévisible est prévisiblement séparable.

DEMONSTRATION: commençons par supposer X à valeurs réelles. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}_+$; montrons l'existence d'une suite (S_n) de temps optionnels tels que

$$(4) \qquad S_n \in I \text{ p.s.} \quad , \qquad \sup\{X_t \mid t \in I\} = \sup X_{S_n} \quad , \text{ p.s.}$$

L'ensemble aléatoire $\{X>r\} \cap \Omega\times I$ est optionnel; d'après le théorème de section, il existe un temps optionnel S dont le graphe est contenu dans cet ensemble, et tel que $\mathbb{P}\{S<\infty\} > \mathbb{P}\{\omega \mid \exists s\in I, X_s(\omega)>r\} - \varepsilon$, où $\varepsilon>0$ est arbitraire; notons

(*) On notera aussi Σ la suite (S_n) elle même.

(×) Remarquer que l'espace d'états n'a pas besoin ici d'être métrique compact.

(S_n^r) la famille dénombrable définie ainsi relativement à $r\in\mathbb{Q}$ et $\varepsilon_n = 1/n$: elle satisfait à (4). Faisant parcourir à I un système fondamental dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}_+$, on peut obtenir une famille (S_n) satisfaisant à

$$(5) \qquad \sup\{X_t \,|\, t\in I\} = \sup\{X_{S_n} \,|\, S_n \in I\} \quad \text{p.s. ,}$$

où l'ensemble exceptionnel est indépendant de l'intervalle ouvert quelconque I. Pour obtenir le théorème, on procède alors comme suit: soit d une distance sur E, et (x_k) une suite dense dans E; il suffit, pour chaque k, d'appliquer (5) à $X_t^k = d(x_k, X_t)$ avec "inf" à la place de "sup", puis de rassembler les suites $(S_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par (5). Le cas prévisible s'obtient en appliquant le théorème de section des ensembles prévisibles ▫

Pour terminer, nous remarquons que tous les théorèmes des paragraphes précédents s'étendent aux processus optionnellement (ou prévisiblement) séparables à condition de supposer de bonnes propriétés de mesurabilité des variables X_{S_n} où $S_n \in \Sigma$. Pour chacun des théorèmes des paragraphes précédents, nous donnons ci-dessous les hypothèses supplémentaires à faire pour les étendre; nous ne prétendons pas énoncer les hypothèses les plus faibles.

(2.1),(2.2): X progressif et optionnellement séparable.
(2.3,4,5) : X optionnellement séparable (remplacer dans la démonstration $\mathbb{P}$ par la probabilité extérieure $\mathbb{P}^*$).
(2.6,7): X optionnel.
(3.1 à 5): X Progressif et optionnellement séparable.
Les démonstrations sont exactement les mêmes que dans les paragraphes 2 et 3 .

SUR LA REGLE DU JEU (*) : l'utilisation sans retenue du théorème de section permet évidemment de simplifier certaines démonstrations; néanmoins, la séparabilité optionnelle, jointe à (4.2), semble être une méthode particulièrement simple pour arriver à certains résultats. A cet égard, la chaîne (4.2),(3.4) qui aboutit au théorème de Mertens (et même un peu mieux) est particulièrement éloquente.

(*) qui a consisté à ne jamais utiliser les théorèmes de section, sauf en (4.2) où ils sont nécessaires.