

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHANTHA YOEURP

PAUL-ANDRÉ MEYER

## **Sur la décomposition multiplicative des sousmartingales positives**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 10 (1976), p. 501-504

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1976\\_\\_10\\_501\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10_501_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE DES  
SOUSMARTINGALES POSITIVES

par Ch. YOEURP et P.A. MEYER

Nous considérons ici un espace probabilisé filtré  $(\Omega, \underline{F}, P ; (\underline{F}_t))$  satisfaisant aux conditions habituelles, et une sousmartingale positive  $(X_t)$  continue à droite. Il est impossible en général de représenter  $X$  comme produit d'une martingale positive et d'un processus croissant, car toute martingale positive conserve la valeur 0 à partir du premier instant où elle l'atteint, tandis que cette propriété n'est pas vraie pour les sousmartingales ( par exemple, la valeur absolue du mouvement brownien est une sousmartingale positive qui s'annule très souvent ). Nous allons donc supposer  $X$  strictement positive, en un sens que nous préciserons. Notre but dans ce travail consiste à donner une décomposition multiplicative de  $X$ , et aussi à étudier les rapports entre cette décomposition multiplicative et une représentation assez bizarre, qui figure dans le Séminaire VIII, p.310-315.

NOTATIONS ET RAPPELS

$X$  est, on l'a dit plus haut, une sousmartingale positive. Nous supposons pour simplifier, dans nos premiers raisonnements, que  $X$  est bornée inférieurement par une constante  $\epsilon > 0$ , et que la sousmartingale  $X$  est bornée dans  $L^1$  : elle converge alors p.s. et dans  $L^1$  vers une v.a. intégrable  $X_\infty (=X_{\omega_-})$ , et il est bien connu qu'elle appartient à la classe (D). On peut donc écrire

$$(1) \quad X = M + A$$

où  $M$  est une martingale uniformément intégrable - non nécessairement positive - et  $A$  est un processus croissant prévisible, continu à droite, nul en 0, intégrable. Le processus  $X$  admet une projection prévisible

$$(2) \quad \dot{X} = M_- + A$$

Recopions quelques identités classiques . En un temps prévisible  $T$  on a  $\Delta A_T = E[\Delta X_T | \underline{F}_{T-}] = \dot{X}_T - X_{T-}$  . D'où, par le théorème de section prévisible

$$(3) \quad \dot{X} = X_- + \Delta A$$

Il en résulte en particulier que  $\dot{X}$ , lui aussi, est borné inférieurement par  $\varepsilon$ . Il en résulte d'autre part que

$$(4) \quad \Delta A = \dot{X} - X_- , \quad \Delta M = X - \dot{X}$$

$$1 \geq 1 - \frac{\Delta A}{\dot{X}} = \frac{X_-}{\dot{X}} > 0, \quad 1 + \frac{\Delta M}{\dot{X}} = \frac{X}{\dot{X}} \geq 0$$

Nous introduisons maintenant trois nouveaux processus : une sous-martingale

$$(5) \quad Z_t = \int_{]0,t]} \frac{dX_s}{\dot{X}_s} = N_t + B_t \quad ( N_t = \int_{]0,t]} \frac{dM_s}{\dot{X}_s} , B_t = \int_{]0,t]} \frac{dA_s}{\dot{X}_s} )$$

et un processus croissant<sup>1</sup> non adapté ,

$$(6) \quad C_t = \exp( - \int_t^\infty \frac{dA_s^C}{\dot{X}_s} ) ( \prod_{t < s < \infty} ( 1 - \frac{\Delta A_s}{\dot{X}_s} ) ) X_\infty$$

Il y a une relation entre B et C : si l'on forme l'exponentielle de Catherine Doléans-Dade de -B, on a

$$(7) \quad \mathcal{E}(-B)_t = \exp(-B_t) \prod_{s \leq t} (1 - \Delta B_s) e^{\Delta B_s} = \exp(-B_t^C) \prod_{s \leq t} (1 - \Delta B_s)$$

$$= \exp( - \int_0^t \frac{dA_s^C}{\dot{X}_s} ) \prod_{s \leq t} ( 1 - \frac{\Delta A_s}{\dot{X}_s} ) = \frac{C_0}{C_t} .$$

#### DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE DE X

Nous avons que  $X_t = X_0 + \int_{]0,t]} \dot{X}_s dZ_s$ . Il a été démontré par le premier auteur ( voir dans ce volume ) que la solution de cette équation différentielle stochastique est  $X = X_0 \eta(Z) = X_0 \mathcal{E}(N) / \mathcal{E}(-B)$ . Ainsi

$$(8) \quad X_t = X_0 \mathcal{E}(N)_t / \mathcal{E}(-B)_t$$

C'est la décomposition multiplicative de X :  $X_0 \mathcal{E}(N)$  est une martingale locale positive, en fait une vraie martingale de la classe (D), car  $X_0 \mathcal{E}(N) = X_t \mathcal{E}(-B) \leq X_t$  ;  $1/\mathcal{E}(-B)$  est un processus croissant prévisible, égal à 1 en 0. Nous n'insisterons pas ici sur l'unicité, qui se démontre comme pour les surmartingales.

1.  $A^C$  et  $B^C$  désignent les parties continues des processus croissants A et B ( notation un peu dangereuse, car  $X^C$  désigne souvent la partie martingale-continue de la semimartingale X ).

## REPRESENTATION DE X COMME PROJECTION

Nous démontrons maintenant le résultat du séminaire VIII ( dans le séminaire VIII, il s'agit d'une surmartingale positive Y majorée par 1, ou plus généralement par une martingale M, et on applique ce qui suit à la sousmartingale 1-Y ou M-Y ).

Nous écrivons (8) sous la forme

$$(9) \quad C_0 X_t = X_0 \mathcal{E}(N)_t C_t$$

et nous faisons d'abord tendre t vers  $+\infty$ . Comme  $C_\infty = X_\infty$  d'après (6), et  $X_\infty$  ne s'annule pas, nous obtenons

$$C_0 X_\infty = X_0 \mathcal{E}(N)_\infty X_\infty \Rightarrow C_0 = X_0 \mathcal{E}(N)_\infty .$$

D'autre part, nous avons vu que  $X_0 \mathcal{E}(N)$  est une vraie martingale de la classe (D). Donc en conditionnant par rapport à  $\underline{F}_t$  il vient

$$(10) \quad E[C_0 | \underline{F}_t] = E[X_0 \mathcal{E}(N)_\infty | \underline{F}_t] = X_0 \mathcal{E}(N)_t .$$

Conditionnons aussi (9) par rapport à  $\underline{F}_t$  ; il vient

$$E[C_0 | \underline{F}_t] X_t = X_0 \mathcal{E}(N)_t E[C_t | \underline{F}_t]$$

et comme la martingale (10) ne s'annule jamais, il vient simplement

$$(11) \quad X_t = E[C_t | \underline{F}_t]$$

Voici l'intérêt de cette relation : la projection optionnelle d'un processus croissant intégrable ( non nécessairement adapté ) est toujours une sousmartingale de la classe (D). Inversement, la décomposition additive nous dit que toute sousmartingale de la classe (D) est projection optionnelle d'un processus croissant intégrable , à savoir  $A_t + X_\infty - A_\infty$ , mais celui-ci n'est ni positif lorsque X est positive, ni borné lorsque X est bornée. La formule (11) nous représente X comme projection optionnelle d'un processus croissant intégrable C, non adapté, tel que  $0 \leq C_t \leq X_\infty$  ( formule (6)). Ainsi la théorie de l'exponentielle  $\eta$  permet de mieux comprendre l'exposé du séminaire VIII, et d'en simplifier la démonstration.

## LE CAS OU X N'EST PAS BORNEE INFÉRIEUREMENT

Pour effectuer les passages à la limite, nous introduisons des notations un peu différentes : nous posons

$$(12) \quad D = \mathcal{E}(-B), \text{ processus décroissant prévisible, } D_0 = 1$$

$$(13) \quad Q = X_0 \mathcal{E}(N), \text{ martingale positive}$$

Nous avons alors  $XD = Q$  ( formule (8)). Si X est une sousmartingale positive appartenant à la classe (D), admettant la décomposition  $X = M + A$ , la sousmartingale  $X^\varepsilon = X + \varepsilon$  est bornée inférieurement, et nous

pouvons lui appliquer la théorie précédente. Les quantités correspondantes seront affectées d'un  $\varepsilon$ . Recopions en particulier

$$(14) \quad C_t^\varepsilon = \exp\left(-\int_t^\infty \frac{dA_s^C}{\dot{X}_s + \varepsilon}\right) \left(\prod_{t < s < \infty} \left(1 - \frac{\Delta A_s}{\dot{X}_s + \varepsilon}\right)\right) (X_\infty + \varepsilon)$$

$$(15) \quad D_t^\varepsilon = \exp\left(-\int_0^t \frac{dA_s^C}{\dot{X}_s + \varepsilon}\right) \prod_{s \leq t} \left(1 - \frac{\Delta A_s}{\dot{X}_s + \varepsilon}\right)$$

Lorsque  $\varepsilon$  décroît,  $D_t^\varepsilon$  et  $C_t^\varepsilon$  décroissent tous deux.

THEOREME 1. Soit X une sousmartingale positive de la classe (D). Il existe alors un processus croissant non adapté C tel que

$$(16) \quad X_t = E[C_t | \mathbb{F}_t] \quad , \quad 0 \leq C_t \leq X_\infty \quad .$$

DEMONSTRATION. Immédiate : on écrit que  $X_t + \varepsilon = E[C_t^\varepsilon | \mathbb{F}_t]$ ,  $C_t^\varepsilon \leq X_\infty + \varepsilon$ . Les  $C_t^\varepsilon$  décroissent, soit  $C_t^0$  leur limite. On a  $X_t = E[C_t^0 | \mathbb{F}_t]$ ,  $C_t^0 \leq X_\infty$ .

Enfin, on pose  $C_t = C_{t+}^0$ .

THEOREME 2. Soit X une sousmartingale positive, telle que les processus X et X\_ ne s'annulent jamais. Il existe alors un processus décroissant prévisible D, tel que  $D_0=1$ , ne s'annulant jamais, et une martingale Q, tels que

$$(17) \quad X_t D_t = Q_t \quad .$$

DEMONSTRATION. Nous partons de  $(X_t + \varepsilon) D_t^\varepsilon = Q_t^\varepsilon$  ;  $D_t^\varepsilon$  décroît vers  $D_t^0$ ,  $Q_t^\varepsilon$  vers  $Q_t^0$ , et  $D_t^0$  est décroissant prévisible,  $Q_t^0$  une martingale. Nous avons donc toujours  $X_t D_t = Q_t$  avec  $D_t = D_{t+}^0$ ,  $Q_t = Q_{t+}^0$  - mais ici il faut nous assurer que  $D_{t+}^0 = D_t^0$ , car nous exigeons la prévisibilité de D, et le fait que  $D_0=1$ . La condition de l'énoncé entraîne que pour tout  $\omega$  et tout a fini, les fonctions  $X_\cdot(\omega)$  et  $X_\cdot(\omega)$  sont bornées inférieurement sur  $[0, a]$  par un  $h > 0$ . Il en est alors de même pour  $\dot{X}_\cdot(\omega) \geq X_\cdot(\omega)$  (formule (3)), et alors il n'y a aucune difficulté dans le passage à la limite.