K. A. YEN
CHANTHA YOEURP

Représentation des martingales comme intégrales stochastiques des processus optionnels

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 10 (1976), p. 422-431
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__422_0>

Université de Strasbourg 1974/75

Séminaire de Probabilités

REPRESENTATION DES MARTINGALES COMME INTEGRALES STOCHASTIQUES DES PROCESSUS OPTIONNELS

par

K.A. YEN et Ch. YOEURP

On se place dans un espace probabilisé complet $(\Omega,\mathcal{F},P)$ muni d'une famille croissante de sous-tribus $(\mathcal{F}_t)$ vérifiant les conditions habituelles.

Les références indiquées entre parenthèses se rapportent au "Cours sur les intégrales stochastiques" de P.A. Meyer, dans le même volume de Séminaire de Probabilités.

P.A. Meyer a défini l'intégrale stochastique $H.M$ d'un certain processus optionnel $H = (H_t)$ par rapport à une martingale locale $M = (M_t)$, par le fait qu'elle est l'unique martingale locale telle que le processus

$[H.M,N] - H.[M,N]$ soit une martingale locale

pour toute martingale <u>bornée</u> $N = (N_t)$ (Théorème 19, V).

Le lemme suivant généralise ce résultat en ce sens que l'on a $[H.M,N] = H.[M,N]$,et ceci pour toute <u>martingale locale</u> N , quand $(\mathcal{F}_t)$ est quasi-continue à gauche.

LEMME 1.- <u>Soient</u> $M = (M_t)$ <u>une martingale locale</u>, $H = (H_t)$ <u>un processus optionnel tel que</u> $(\int_0^t H_s^2\, d[M,M]_s)^{\frac{1}{2}}$ <u>soit localement intégrable. On suppose que</u> $(\mathcal{F}_t)$

<u>est quasi-continue à gauche (ou que</u> M <u>est quasi-continue à gauche</u>).

<u>Alors, il existe une martingale locale et une seule</u> $(H.M_t) = (\int_0^t H_s\, dM_s)$ <u>telle que l'on ait, pour toute martingale locale</u> $N = (N_t)$:

$[H.M,N] = H.[M,N]$.

<u>Démonstration</u>.- Dans le cas où N est une martingale <u>bornée</u>, le lemme se réduit à (V 19). Comme une martingale locale est localement dans $\underline{\underline{H}}^1$, il suffit de démontrer le lemme pour N appartenant à $\underline{\underline{H}}^1$. Du fait que l'ensemble des martingales bornées est dense dans $\underline{\underline{H}}^1$ (V 13), il existe une suite (N^n) de martingales bornées telle que :

$$\lim_{n\to\infty} E(\sqrt{[N-N^n,N-N^n]_\infty}) = \lim_{n\to\infty} \|N-N^n\|_{\underline{\underline{H}}^1} = 0 .$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer que $[N-N^n,N-N^n]_\infty$ converge presque sûrement vers 0 .

D'autre part, l'inégalité de Kunita-Watanabé nous permet d'écrire les deux inégalités suivantes (IV 10) :

$$\left|\int_0^t H_s\, d[M,N-N^n]_s\right| \le \left(\int_0^t H_s^2\, d[M,M]_s\right)^{\frac{1}{2}} \left([N-N^n,N-N^n]_t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left|\int_0^t d[H.M,N-N^n]_s\right| \le \left([H.M,H.M]_t\right)^{\frac{1}{2}} \left([N-N^n,N-N^n]_t\right)^{\frac{1}{2}} .$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} H.[M,N^n] = H.[M,N] \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} [H.M,N^n] = [H.M,N] .$$

Mais, comme pour tout n , on a :

$$[H.M,N^n] = H.[M,N^n] ,$$

on en conclut que $[H.M,N] = H.[M,N]$.

C.Q.F.D.

On a le théorème fondamental suivant :

THEOREME 2.- On suppose que $(\mathcal{F}_t)$ est quasi-continue à gauche. Soit $M = (M_t)$ une martingale locale donnée.

Alors, pour toute martingale locale $N = (N_t)$, il existe un processus optionnel $f = (f_t)$ tel que $(\int_0^t f_s^2 \, d[M,M]_s)^{\frac{1}{2}}$ soit localement intégrable et que :

$$N = f.M + L$$

où $L = (L_t)$ est une martingale locale telle que $[M,L] = 0$.(*)

Cette décomposition est unique en $f.M$ et en L .

De plus, si N est une martingale de carré intégrable, il en est de même pour L , et, si N est bornée, L est localement bornée.

Démonstration :

a) L'inégalité de Kunita-Watanabé (IV 10) nous permet d'écrire pour tout t fini :

$$\int_0^t |d[M,N]_s| \leq (\int_0^t d[M,M]_s)^{\frac{1}{2}} (\int_0^t d[N,N]_s)^{\frac{1}{2}} .$$

Ce qui montre que $d[M,N]_s$ est absolument continue par rapport à $d[M,M]_s$. Soit alors $f = (f_t)$ une version optionnelle de $\dfrac{d[M,N]_s}{d[M,M]_s}$.

Montrons que $(\int_0^t f_s^2 \, d[M,M]_s)^{\frac{1}{2}}$ est localement intégrable. En posant $f^n = f\,1_{\{|f| \leq n\}}$, on a :

$$\int_0^t (f_s^n)^2 \, d[M,M]_s = \int_0^t f_s^n \, (f_s \, d[M,M]_s)$$

$$= \int_0^t f_s^n \, d[M,N]_s .$$

(*) On a $[M,L] = 0$ si et seulement si M et L sont orthogonales et sans sauts communs.

$$\leq \left(\int_0^t (f_s^n)^2\, d[M,M]_s\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t d[N,N]_s\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

toujours d'après l'inégalité de Kunita-Watanabé.

Puisque $\int_0^t (f_s^n)^2\, d[M,M]_s$ est fini, on en déduit que :

$$\left(\int_0^t (f_s^n)^2\, d[M,M]_s\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^t d[N,N]_s\right)^{\frac{1}{2}} = ([N,N]_t)^{\frac{1}{2}} .$$

D'où, en faisant tendre n vers $+\infty$:

$$\left(\int_0^t f_s^2\, d[M,M]_s\right)^{\frac{1}{2}} \leq ([N,N]_t)^{\frac{1}{2}} .$$

On a alors le résultat désiré du fait que $([N,N]_t)^{\frac{1}{2}}$ est localement intégrable (IV 30) .

On peut alors parler de l'intégrale stochastique $f.M$. Posons : $L = N - f.M$, on a alors :

$$\begin{aligned}
[M,L] &= [M,N] - [M,f.M] \\
&= f.[M,M] - f.[M,M] \quad \text{(lemme 1)} \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

Le théorème de décomposition est ainsi démontré.

b) Supposons que N soit une martingale de carré intégrable, montrons que L aussi. On peut écrire :

$$\begin{aligned}
[N,N] &= [f.M + L\, ,\, f.M + L] \\
&= [f.M\, ,\, f.M] + [L,L] + 2[f.M,L] \\
&\geq [L,L] + 2f.[M,L] = [L,L] .
\end{aligned}$$

Or $[N,N]_\infty$ est intégrable, donc $[L,L]_\infty$ aussi. Ce qui équivaut à dire que L est une martingale de carré intégrable.

c) Supposons que N soit bornée par k, montrons que L est localement bornée. Considérons :

$$T_n = \inf\{t / |L_t| \geq n\} .$$

Ce sont des t.a. tendant en croissant vers $+\infty$.

On a :

$$|L_{t \wedge T_n}| \leq n + |\Delta L_{T_n}| .$$

Mais L et $f.M$ n'ont pas de sauts communs. Donc, si ΔL_{T_n} n'est pas nul, il est égal à ΔN_{T_n} qui est borné par $2k$. Donc :

$$|L_{t \wedge T_n}| \leq n + 2k .$$

C.Q.F.D.

d) Unicité.

Supposons que l'on ait deux décompositions du même type :

$$N = f.M + L = f'.M + L' .$$

Alors :

$$L - L' = (f' - f).M .$$

On a donc :

$$\begin{aligned} [L - L', L - L'] &= [(f' - f).M , L - L'] \\ &= (f' - f).[M,L] - (f' - f).[M,L'] \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Par conséquent : $L = L'$ et $f.M = f'.M$.

C.Q.F.D.

Remarque : Cas particulier où M est continue.

Si la martingale locale M est continue, dans le théorème 2, f peut être choisi prévisible. Alors, l'hypothèse de la quasi-continuité à gauche de $(\mathcal{F}_t)$ peut être supprimée.

En effet, dans le cas d'une martingale continue, l'intégrale stochastique des optionnels coïncide avec celle des prévisibles.

□

Pour simplifier, les martingales locales considérées dans la suite seront supposées nulles pour $t = 0$. Cela n'enlève rien quant à la généralité.

THEOREME 3.- Soit $M = (M_t)$ une martingale locale. On suppose que $(\mathcal{F}_t)$ est quasi-continue à gauche (ou que M est quasi-continue à gauche). Alors, les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. toute martingale bornée admet une représentation comme intégrale stochastique d'un processus optionnel par rapport à M (on dira tout simplement "représentation optionnelle par rapport à M").

2. toute martingale locale admet une représentation optionnelle par rapport à M .

3. toute martingale bornée L telle que $[M,L] = 0$ est nulle.

Démonstration :

a) Montrons l'implication $1. \Rightarrow 2.$:

Soit $N = (N_t)$ une martingale locale. D'après le théorème 2 , on peut écrire :

$$N = f.M + L$$

où $f = (f_t)$ est un processus optionnel et L est une martingale locale telle que $[M,L] = 0$.

On va prouver que $L = 0$. Par arrêt, on peut supposer que L est dans $\underline{\underline{H}}^1$. Il existe alors une suite de martingales bornées L^n qui convergent dans $\underline{\underline{H}}^1$ vers L .

Mais, d'après 1., on peut écrire :

$$L^n = f^n.M$$

où $f^n = (f^n_t)$ est un processus optionnel. On a alors :

$$\|L^n - L\|_{\underline{\underline{H}}^1} = E(\sqrt{[L^n - L, L^n - L]_\infty})$$

$$= E(\sqrt{[L^n, L^n]_\infty + [L,L]_\infty - 2[L^n, L]_\infty})$$

$$\geq E(\sqrt{[L,L]_\infty})$$

car $[L^n, L] = [f^n.M, L] = f^n.[M,L] = 0$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient :

$$[L,L]_\infty = 0 \ .$$

Donc, $L = 0$.

b) Montrons que $2. \Rightarrow 3.$

Soit L une martingale bornée telle que $[M,L] = 0$. D'après 2., il existe $f = (f_t)$ optionnel tel que $L = f.M$. On peut alors écrire :

$$[L,L] = [f.M, L] = f.[M,L] = 0 \ .$$

Donc, $L = 0$.

c) Montrons que $3. \Rightarrow 1.$:

Soit $N = (N_t)$ une martingale bornée. Le théorème 2 permet d'écrire :

$$N = f.M + L$$

où $f = (f_t)$ est optionnel et $L = (L_t)$ une martingale localement bornée telle que $[M,L] = 0$.

Pour prouver que $L = 0$, on peut supposer, par arrêt, que L est bornée. Alors, 3. permet de conclure.

C.Q.F.D. □

Introduisons la classe des martingales locales suivantes :

DEFINITION 4.- Une martingale locale $M = (M_t)$ est dite standard si elle satisfait à la condition suivante :

si Q est une loi de probabilité équivalente à P telle que M soit encore une martingale locale sous la loi Q, alors $Q = P$ sur $\mathcal{F}_\infty$.

Exemples : Une martingale continue $M = (M_t)$ telle que $<M,M>$ soit une fonction déterministe est standard par rapport à sa famille de tribu naturelle (suivre par exemple la démonstration de III Théorème 10) ; le mouvement brownien en est un cas particulier.

Une martingale locale somme compensée de sauts $M = (M_t)$ dont tous les sauts sont égaux à $+1$, telle que $<M,M>^{(*)}$ soit une fonction déterministe continue est aussi standard par rapport à sa famille de tribu naturelle ; le processus de Poisson compensé en est un cas particulier.

□

On aura besoin du lemme suivant dont la démonstration est immédiate et est laissée au lecteur.

LEMME 5.- Soit Q une loi de probabilité équivalente à P. Posons :

$$\mu_t = E\{\frac{dQ}{dP}/\mathcal{F}_t\} \text{ , pour tout } t \text{ fini.}$$

Alors, $M = (M_t)$ est une martingale locale relativement à Q si et seulement si $(M_t\mu_t)$ est une martingale locale relativement à P.

THEOREME 6.-

1. On suppose que $(\mathcal{F}_t)$ est quasi-continue à gauche. Si $M = (M_t)$ est standard, alors toute martingale locale admet une représentation optionnelle par rapport à M.

(*) En considérant $T_n = \inf\{t/|M_t| \geq n\}$, on voit que $|M_{t \wedge T_n}| \leq n+1$. Donc, en particulier, M est une martingale localement de carré intégrable, et $<M,M>$ est bien défini.

2. Soit $M = (M_t)$ une martingale locale continue et soit $(\mathcal{G}_t)$ sa famille de tribus naturelle, complétée et rendue continue à droite.

Alors, M est standard relativement à $(\mathcal{G}_t)$ si et seulement si toute martingale locale de la famille $(\mathcal{G}_t)$ admet une représentation prévisible par rapport à M .

Démonstration :

1. En vertu du théorème 3, il suffit de faire la démonstration pour une martingale bornée $N = (N_t)$. Le théorème 2 permet d'écrire :

$$N = f.M + L$$

où f est optionnel et L est une martingale localement bornée telle que $[M,L] = 0$.

Pour prouver que $L = 0$, on peut supposer, par arrêt que L est bornée par une constante k . Définissons alors une loi de probabilité Q équivalente à P , en posant :

$$Q = (1 + \frac{L_\infty}{2k}) P .$$

Puisque $[M,L] = 0$, ML est une martingale locale sous la loi P , donc $M + \frac{LM}{2k}$ aussi. Le lemme 5 permet alors de dire que M est une martingale locale sous la loi Q . Donc, du fait que M est standard, on a :

$$Q = P \quad \text{sur} \quad \mathcal{F}_\infty .$$

Donc, $L_\infty = 0$.

C.Q.F.D.

2. La condition nécessaire résulte immédiatement de 1. et de la remarque suivant la démonstration du théorème 2.

Passons à la condition suffisante. Soit Q une loi de probabilité équivalente à P telle que M soit encore une martingale locale sous Q . Posons, pour tout t fini :

$$\mu_t = E\{\frac{dQ}{dP} / \mathcal{G}_t\} .$$

On va montrer que $\mu_t = 1$, pour tout t , ce qui entraînera alors que $Q = P$ sur $\mathcal{G}_\infty$.

Soit $N = (N_t) = (1-\mu_t)$. C'est une martingale relativement à P , nulle pour $t = 0$, car $\mu_o = E\{\frac{dQ}{dP}/\mathcal{G}_o\} = E(\frac{dQ}{dP}) = 1$. Il existe alors un processus prévisible $f = (f_t)$ tel que $N = f.M$. D'autre part, le lemme 5 permet de dire que $(\mu_t M_t)$ est une martingale locale sous la loi P , puisque M l'est sous Q . Par conséquent NM est aussi une martingale locale sous la loi P et on a, puisque M est continue : (*)

$$<N,M> = 0 .$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} <N,N> &= <N,f.M> \\ &= f.<N,M> = 0 . \end{aligned}$$

Donc, N est orthogonale à elle-même et vaut donc 0 . Il en résulte que $\mu_t = 1$, pour tout t .

C.Q.F.D.

(*) Si M est continue, alors pour toute martingale locale N , $<M,N>$ existe et est continu, et on a :

$$[M,N] = <M,N^c> = <M,N>$$

où N^c est la partie continue de N .