MAURIZIO PRATELLI

Espaces fortement stables de martingales de carré intégrable

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 10 (1976), p. 414-421
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__414_0>

Université de Strasbourg

Séminaire de Probabilités

ESPACES FORTEMENT STABLES DE MARTINGALES DE CARRE INTEGRABLE

par

Maurizio PRATELLI

Le but de cette note est d'étudier les sous-espaces de $\mathcal{M}^2$ qui sont stables pour l'intégration des processus optionnels.

La situation est analogue à celle des sous-espaces stables pour l'intégration des processus prévisibles, mais les démonstrations sont techniquement plus compliquées ; toutefois, elles deviennent extrêmement faciles si la famille de tribus $(\mathcal{F}_t)$ est supposée quasi-continue à gauche.

I. INTRODUCTION ET NOTATIONS.

Les notions fondamentales de la théorie des intégrales stochastiques sont supposées connues (voir, par exemple, [1] ou [2]) ; les notations sont celles de [1].

L'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est muni d'une famille croissante de tribus $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ satisfaisant aux conditions habituelles ; toutes les martingales sont supposées continues à droite.

La notation $\mathcal{M}^2$ désigne l'espace des martingales M , nulles en 0 , et de carré intégrable (c'est-à-dire telles que $\sup_t E[(M_t)^2] < +\infty$).

Si M est une telle martingale, $< M,M >$ désigne le seul processus croissant prévisible tel que $M^2 - < M,M >$ soit une martingale ; on pose, en outre, $[M,M]_t = \langle M^c, M^c \rangle_t + \sum_{s\leq t} \Delta M_s^2$. L'intégrale stochastique H.M , lorsque H est un processus optionnel satisfaisant à des conditions d'intégrabilité convenables, a été introduite très récemment par P.A. Meyer (voir [3]) : on va rappeler ici les définitions et les propriétés fondamentales, en se bornant au cas des martingales de carré intégrable, ce qui suffira pour la suite.

Si M est un élément de $\mathcal{M}^2$ et si H est un processus optionnel tel que $\int_0^{+\infty} H_s^2 \, d[M,M]_s$ soit intégrable, l'intégrale stochastique $H.M$ est la seule martingale L de carré intégrable telle que l'on ait
$E[L_\infty N_\infty] = E[\int_0^{+\infty} H_s \, d[M,N]_s]$ pour tout élément N de $\mathcal{M}^2$.

On énonce ici les propriétés fondamentales de cette martingale :

a) Si H est prévisible, $H.M$ est l'intégrale stochastique usuelle.

b) Pour toute martingale N de $\mathcal{M}^2$, le processus $[H.M,N]_t - \int_0^t H_s \, d[M,N]_s$ est une martingale, nulle si H est prévisible ou si M ou N n'a que des discontinuités totalement inaccessibles.

c) Si T est un temps d'arrêt totalement inaccessible (resp. prévisible), on a $\Delta(H.M)_T = H_T . \Delta M_T$ (resp. $= H_T \Delta M_T - E[H_T \Delta M_T | \mathcal{F}_{T-}]$).

d) On a $H.(K.M) = (HK).M$ pour tout couple H , K de processus optionnels bornés, dont l'un au moins est prévisible.

Pour la démonstration de ces propriétés, on renvoie à la rédaction du cours de P.A. Meyer sur les intégrales stochastiques.

2. SOUS-ESPACES FORTEMENT STABLES.

DEFINITION 1. Un sous-espace $\mathcal{H}$ de $\mathcal{M}^2$ est appelé fortement stable s'il est fermé et si, pour tout élément M de $\mathcal{H}$ et pour tout processus optionnel H tel que $\int_0^{+\infty} H_s^2 \, d[M,M]_s$ soit intégrable, l'intégrale stochastique $H.M$ est encore un élément de $\mathcal{H}$.

Remarque 1 : Puisque la tribu optionnelle est engendrée par les intervalles stochastiques de la forme $[\![0,T [\![= [\![0,T]\!] \setminus [\![T]\!]$, il suffit, pour qu'un sous-espace fermé $\mathcal{H}$ soit fortement stable, que $H.M$ soit un élément de $\mathcal{H}$ lorsque

M appartient à $\mathcal{H}$ et H est l'indicatrice d'un intervalle stochastique de la forme $[\![0,T]\!]$ ou $[\![T]\!]$.

On remarquera que dans le cas où H est l'indicatrice de $[\![0,T]\!]$, $H.M$ coïncide avec la martingale arrêtée M^T . Dans l'autre cas, si l'on désigne par X le compensé du processus à variation intégrable $\Delta M_T . I_{\{t \geq T\}}$, on a $E[\int_0^{+\infty} H_s \, d[M,N]_s] = E[\Delta M_T . \Delta N_T] = E[X_\infty N_\infty]$ pour tout élément N de $\mathcal{M}^2$, ce qui montre que $H.M$ coïncide avec X .

En tenant compte des propriétés de l'intégrale stochastique énoncées ci-dessus, on peut donner les exemples suivants de sous-espaces fortement stables :

1) L'espace $\mathcal{M}^c$ des martingales continues.

2) L'espace $\mathcal{M}^d$ des "sommes compensées de sauts" (voir [1]).

3) Si T est un temps d'arrêt soit prévisible, soit totalement inaccessible, l'espace $\mathcal{M}(T)$ des martingales continues hors de $[\![T]\!]$.

En revanche, si T est un temps d'arrêt quelconque, $\mathcal{M}(T)$ peut ne pas être fortement stable.

<u>Exemple</u> : Soit Ω un espace constitué par trois points x,y,z avec $\mathbb{P}(\{x\}) = \mathbb{P}(\{y\}) = \mathbb{P}(\{z\}) = \frac{1}{3}$, et soit $\mathcal{F}_t = (\emptyset,\Omega)$ si $t<1$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{P}(\Omega)$ si $t \geq 1$.

Soit M la martingale ainsi définie :

$$M_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t<1 , \\ I_{\{x\}} - I_{\{y\}} & \text{si } t \geq 1 . \end{cases}$$

M est continue hors de $[\![T]\!]$, avec

$$T(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = x \text{ ou } \omega = y , \\ +\infty & \text{si } \omega = z . \end{cases}$$

Par contre, en prenant

$$H(\omega,t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega = x \quad \text{et} \quad t \geq 1 \ , \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

l'intégrale $H.M$ est donnée par

$$(H.M)_t = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 1 \\ \frac{2}{3} I_{\{x\}} - \frac{1}{3} I_{\{y\}} - \frac{1}{3} I_{\{z\}} & \text{si} \quad t \geq 1 \ , \end{cases}$$

et $H.M$ n'appartient pas à $\mathcal{M}(T)$.

Le lemme suivant sera utile dans la suite.

LEMME 1. <u>Soient</u> M <u>et</u> N <u>deux martingales de carré intégrable. Les deux conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a) $[M,N] = 0$.

b) <u>Pour tout temps d'arrêt</u> T , <u>l'on a</u> $E[M_T\, N_T] = E[\Delta M_T\, \Delta N_T] = 0$ (<u>avec la convention</u> $\Delta M_T = 0$ <u>sur</u> $\{T = +\infty\}$).

<u>Démonstration</u> : a) $\Rightarrow$ b). Soit $[M,N] = 0$; M et N sont alors orthogonales (voir [1]) et donc $E[M_T\, N_T] = 0$ pour tout T . En outre, $\Delta M_T\, \Delta N_T = \Delta_T([M,N])$.

b) $\Rightarrow$ a). En appliquant la relation $E[\Delta M_T\, \Delta N_T] = 0$ aux t.d.a. de la forme T_A où A parcourt la tribu $\mathcal{F}_T$, on trouve la relation conditionnelle $E[\Delta M_T\, \Delta N_T | \mathcal{F}_T] = \Delta M_T\, \Delta N_T = 0$ p.s., ce qui montre (d'après le théorème de section) que le processus optionnel $\Delta M_s\, \Delta N_s$ est évanescent, de sorte que l'on a $\sum_{s \leq t} \Delta M_s\, \Delta N_s = 0$.

Pour tout temps d'arrêt T , on a donc $E[M^d_T\, N^d_T] = 0$; par conséquent, $0 = E[M_T\, N_T] = E[M^c_T\, N^c_T]$. Il en résulte que $< M^c, N^c > = 0$.

Les théorèmes d'orthogonalité concernant les sous-espaces stables au sens faible (c'est-à-dire pour l'intégration des processus prévisibles) sont fondés sur la notion d'orthogonalité définie par la condition $< M,N > = 0$. Pour obtenir des théorèmes analogues concernant les sous-espaces fortement stables, on pourrait penser à utiliser la notion d'orthogonalité définie par la condition $[M,N] = 0$; mais, on s'aperçoit que la "bonne" définition est en fait la suivante.

DEFINITION 2. Deux éléments M, N de $\mathcal{M}^2$ sont dits fortement orthogonaux si, pour tout $H.K$ optionnels bornés, on a $[H.M, K.N] = 0$.

Remarque 2 : Lorsque les discontinuités de M, N sont contenues dans des graphes de temps d'arrêt totalement inaccessibles (par exemple, si la famille $\mathcal{F}_t$ est quasi-continue à gauche), la condition de la définition précédente se réduit à $[M,N] = 0$: il suffit de remarquer que, dans ce cas, on a $H.[M,N] = [H.M,N]$ pour tout H optionnel borné.

THEOREME 1. Pour que les martingales M et N soient fortement orthogonales, (il faut et) il suffit que l'on ait $[H.M,N] = 0$ pour tout processus H optionnel borné.

Démonstration : En vertu de la remarque précédente, il suffit de démontrer le théorème lorsque M et N sont deux sommes compensées de sauts contenus dans des graphes de temps d'arrêt prévisibles. Supposons d'abord $M = \Delta M_T . I_{\{t \geq T\}}$ et $N = \Delta N_S . I_{\{t \geq S\}}$ avec T et S prévisibles. Si $\mathbb{P}\{T = S < +\infty\} = 0$, il est très facile de voir que M et N sont fortement orthogonales : en effet, H et K étant optionnels bornés, $H.M$ (resp. $K.N$) est purement discontinue avec un seul saut contenu dans $[\![T]\!]$ (resp. $[\![S]\!]$), de sorte que $[H.M,K.N] = 0$.

Si $\mathbb{P}\{T = S < +\infty\} > 0$, l'ensemble $A = \{T = S < +\infty\}$ appartient à $\mathcal{F}_{T-} \cap \mathcal{F}_{S-}$ (voir [4], th. IV, 73) et l'on a $M = M^1 + M^2$, $N = N^1 + N^2$, avec :

$$M^1 = \Delta M_{T_{A^c}} . I_{\{t \geq T_{A^c}\}} \ , \ M^2 = \Delta M_{T_A} . I_{\{t \geq T_A\}} \ ,$$

$$N^1 = \Delta N_{S_{A^c}} . I_{\{t \geq S_{A^c}\}} \ , \ N^2 = \Delta N_{S_A} . I_{\{t \geq S_A\}} \ .$$

Les couples (M^1, N^1) , (M^2, N^2) et (M^2, N^1) sont alors fortement orthogonaux, ce qui permet de se réduire au cas de deux martingales M, N de la forme

$$M = \Delta M_T . I_{\{t \geq T\}} \ , \ N = \Delta N_T . I_{\{t \geq T\}} \ ,$$

avec T prévisible. Supposons donc $[H.M,N] = 0$ pour tout H optionnel borné, et en particulier (pour $H = 1$) $[M,N] = 0$, c'est-à-dire $\Delta M_T . \Delta N_T = 0$ p.s. Soit $B = \{E[|\Delta M_T| | \mathcal{F}_{T-}] > 0\}$ et soit $H = \mathrm{sgn}(\Delta M_T) . I_{\{t = T\}}$. On a alors $H.M = (|\Delta M_T| - E[|\Delta M_T| | \mathcal{F}_{T-}]) I_{\{t \geq T\}}$ et, puisque $[H.M,N] = 0$, on a $(|\Delta M_T| - E[|\Delta M_T| | \mathcal{F}_{T-}]) . \Delta N_T = -E[|\Delta M_T| | \mathcal{F}_{T-}] . \Delta N_T = 0$ p.s. Le saut de M est donc contenu dans $[\![T_B]\!]$ (qui est prévisible) et le saut de N dans $[\![T_{B^c}]\!]$: M et N sont alors fortement orthogonaux. Le même raisonnement est valable lorsque chacune des martingales M,N est la somme compensée d'un nombre fini de sauts.

Passons maintenant au cas général. Soient donc $M = \sum_n \Delta M_{T_n} . I_{\{t \geq T_n\}}$ et $N = \sum_n \Delta N_{S_n} . I_{\{t \geq S_n\}}$, telles que l'on ait $[L.M,N] = 0$ pour tout L optionnel borné. La somme M^h des h premiers sauts de M peut être mise sous la forme $M^h = H.M$ avec H prévisible borné (par exemple, $H = \sum_{n \leq h} I_{[\![T_n]\!]}$) ; de la même façon, la somme N^k des k premiers sauts peut s'écrire $N^k = K.N$.

En vertu des propriétés b) et d) de l'intégrale stochastique, on a $[L.M^h, N^k] = [L.(H.M), K.N] = [(HKL).M,N] = 0$, ce qui montre que M^h et N^k sont fortement orthogonales pour tout h et k . Il suffit alors de passer à la limite pour en déduire que les martingales M et N sont elles aussi fortement orthogonales.

Remarque 3 : On sait que pour que l'égalité $[M,N] = 0$ ait lieu, il faut et il suffit que l'on ait $\langle M^c, N^c \rangle = 0$ et que les sauts de M et de N soient disjoints. La démonstration du théorème précédent montre que, pour que M et N soient fortement orthogonales, il faut et il suffit que l'on ait $\langle M^c, N^c \rangle = 0$ et que les sauts de M et de N soient "fortement disjoints", c'est-à-dire qu'ils soient contenus dans deux ensembles disjoints, dont chacun soit une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles ou totalement inaccessibles. On peut aussi remarquer que, pour que M et N soient fortement orthogonales, il suffit que $[M,N] = 0$ et que $[H.M,N] = 0$ lorsque H est l'indicatrice d'un intervalle stochastique de la forme $[\![T]\!]$ (voir la remarque 1).

COROLLAIRE 1. <u>Si</u> $\mathcal{G}$ <u>est une partie quelconque de</u> $\mathcal{M}^2$, <u>son orthogonal fort est fortement stable</u>.

<u>Démonstration</u> : L'orthogonal forte de $\mathcal{G}$ est évidemment fermé. Soit M fortement orthogonal à tout élément A de $\mathcal{G}$, et soit H optionnel borné : pour tout K optionnel borné, on a alors $[H.M,K.A] = 0$, et l'on peut conclure que $[L.(H.M),K.A] = 0$ pour K et L optionnels bornés, c'est-à-dire que $H.M$ est fortement orthogonal à A .

Le théorème de projection suivant est l'analogue, pour les sous-espaces fortement stables, du théorème de projection de Kunita-Watanabe (voir [5] ou [1]) .

THEOREME 2. <u>Soit</u> $\mathcal{H}$ <u>un sous-espace fortement stable de</u> $\mathcal{M}^2$, <u>et soit</u> $\mathcal{H}^{\perp}$ <u>son orthogonal ordinaire</u> (<u>au sens de</u> L^2) : $\mathcal{H}^{\perp}$ <u>est alors fortement stable et fortement orthogonal à</u> $\mathcal{H}$.

<u>Démonstration</u> : Il resulte immédiatement de la définition de l'intégrale stochastique que l'égalité $E[(H.M)_{\infty}\ N_{\infty}] = E[M_{\infty}\ (H.N)_{\infty}]$ a lieu pour tout couple M,N d'éléments de $\mathcal{M}^2$ et pour tout H optionnel borné.

Si maintenant $M \in \mathcal{H}$ et $N \in \mathcal{H}^{\perp}$, $H.M$ est encore dans $\mathcal{H}$ et l'on a $E[(H.M)_{\infty}\ N_{\infty}] = E[M_{\infty}\ (H.N)_{\infty}] = 0$, de sorte que $H.N \in \mathcal{H}^{\perp}$. Cela prouve que $\mathcal{H}^{\perp}$ est fortement stable. Si en particulier H est l'indicatrice de l'intervalle stochastique $[\![0,T]\!]$ (resp. $[\![T]\!]$), l'égalité précédente donne $E[M_T\ N_T] = 0$ (resp. $E[\Delta M_T\ \Delta N_T] = 0$), ce qui prouve que $[M,N] = 0$.

Si H,K sont optionnels bornés, $H.M \in \mathcal{H}$ et $K.N \in \mathcal{H}^{\perp}$: on a alors $[H.M,K.N] = 0$ et l'on peut conclure que M et N sont fortement orthogonaux.

Le corollaire suivant, dont la démonstration est presque évidente, donne une caractérisation du sous-espace fortement stable engendré par une partie quelconque de $\mathcal{M}^2$.

COROLLAIRE 2. <u>Si</u> $\mathcal{G}$ <u>est une partie de</u> $\mathcal{M}^2$, <u>le sous-espace fortement stable engendré par</u> $\mathcal{G}$ <u>est le biorthogonal de</u> $\mathcal{G}$, <u>l'orthogonalité étant prise au sens fort</u>.

Remarque 4 : On sait que, pour tout élément M de $\mathcal{M}^2$, le sous-espace $\mathcal{H}$ constitué par les processus de la forme $H.M$, où H est un processus prévisible tel que $\int_0^{+\infty} H_s^2 \, d[M,M]_s$ soit intégrable, est stable, de sorte que tout élément de N de $\mathcal{M}^2$ admet une décomposition de la forme $N = H.M + L$, avec H prévisible et L orthogonale (au sens de [1]) à M .

Malheureusement une décomposition analogue, avec H optionnel et L fortement orthogonale à M , n'a pas lieu en général. Il suffit pour cela de remarquer que, si dans la définition de $\mathcal{H}$ on remplace le mot "prévisible" par le mot "optionnel", on n'obtient pas un sous-espace fortement stable, sauf cas particuliers (par exemple, le cas où M est quasi-continue à gauche).

BIBLIOGRAPHIE

[1] MEYER P.A. — Intégrales stochastiques I. Séminaire de Probabilités de Strasbourg I, Lecture Notes in M., vol. 39, Springer-Verlag, Heidelberg (1967).

[2] DOLEANS-DADE C., MEYER P.A. — Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Séminaire de Probabilités de Strasbourg IV, p. 77-107. Lecture Notes in M., vol. 124, Springer-Verlag, Heidelberg (1970).

[3] MEYER P.A. — Intégrales stochastiques de processus optionnels par rapport aux martingales locales. A paraître sur C.R.Acad. Sc. Paris.

[4] DELLACHERIE C., MEYER P.A. — Probabilités et Potentiels (nouvelle version refondue). A paraître.

[5] KUNITA H., WATANABE S. — On square integrable martingales. Nagoya M.J., vol. 30, p. 209-245 (1967).

ISTITUTO di MATEMATICA

56100 PISA (ITALIE).