SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MAURIZIO PRATELLI

Sur certains espaces de martingales localement de carré intégrable

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 10 (1976), p. 401-413

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__401_0>

Mars 1975

SUR CERTAINS ESPACES DE MARTINGALES LOCALEMENT DE CARRE INTEGRABLE.

Maurizio PRATELLI

Un espace bien connu en théorie des martingales est l'espace $\mathfrak{H}^p$ constitué par les martingales locales M satisfaisant à la condition $[M,M]_\infty^{1/2} \in L^p$.

Grâce aux inégalités de Burkholder, on sait que si p et q sont deux exposants conjugués $(1 < p < +\infty)$, le dual de $\mathfrak{H}^p$ est égal à $\mathfrak{H}^q$.

On sait aussi que le dual de $\mathfrak{H}^1$ est l'espace $\mathfrak{BMO}$.

Dans cet article, on étudie l'espace $\mathfrak{h}^p$ constitué par les martingales M , localement de carré intégrable, satisfaisant à la condition $<M,M>_\infty^{1/2} \in L^p$.

On démontre notamment, pour les espaces $\mathfrak{h}^p$, des résultats de dualité analogues aux résultats rappelés ci-dessus à propos des espaces $\mathfrak{H}^p$.

0. NOTATIONS. - Les notions fondamentales de la théorie générale des processus (voir, p. ex., [4]) , ainsi que celles de la théorie des intégrales stochastiques (voir [5]), sont supposées connues par la suite. Les notations sont celles de [5] L'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est muni d'une famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in R_+}$ satisfaisant aux conditions habituelles. Toutes les martingales (locales) sont supposées continues à droite. La notation $\mathfrak{M}^2$ désigne l'espace des martingales de carré intégrable et nulles pour $t=0$.

Si M est une telle martingale, on note $<M,M>$ le seul processus croissant prévisible tel que $M^2 - <M,M>$ soit une martingale. (v. [3], p.80) . Pour tout temps d'arrêt T , on a

$$E[(M_\infty - M_T)^2 \mid \mathcal{F}_T] = E[<M,M>_\infty - <M,M>_T \mid \mathcal{F}_T] .$$

On dit qu'un processus X possède <u>localement</u> une propriété donnée, s'il existe une suite croissante (T_n) de temps d'arrêt, tendant vers l'infini, telle que, pour tout n , le processus arrêté X^{T_n} possède la propriété en question.

On désigne par $\mathfrak{M}^2_{loc}$ l'espace des martingales localement de carré intégrable. Pour une telle martingale M , le processus $<M,M>$ est défini par la condition

$$<M,M>^T = <M^T,M^T>$$

(pour tout temps d'arrêt T tel que M^T soit dans $\mathfrak{M}^2$) . Il peut être caractérisé comme le seul processus croissant prévisible A , tel que $M^2 - A$ soit une martingale locale.

1. - <u>DEUX INEGALITES CONCERNANT LES PROCESSUS CROISSANTS</u>.

Soit B un processus croissant optionnel, et soit A son <u>compensateur</u> prévisible, c'est-à-dire, soit A le processus croissant prévisible tel que l'on ait

$$E[A_\infty - A_T \mid \mathcal{F}_T] = E[B_\infty - B_T \mid \mathcal{F}_T]$$

pour tout temps d'arrêt T , et

$$E[A_\infty - A_{T-} \mid \mathcal{F}_{T-}] = E[B_\infty - B_{T-} \mid \mathcal{F}_{T-}]$$

pour tout temps d'arrêt T prévisible.

Dans ces conditions, on a les inégalités suivantes, dont la première est démontrée dans [2] , Lemme 2 .

PROPOSITION 1.1. - <u>Pour toute fonction réelle positive</u> F , <u>définie dans</u> $\mathbb{R}_+$, <u>nulle en</u> 0 , <u>convexe, à croissance modérée</u> (<u>c'est-à-dire satisfaisant à la condition</u> $F(2t) \leq cF(t)$, <u>où c est une constante réelle positive</u>), <u>on a</u>

$$E[F(A_\infty)] \leq c_F E[F(B_\infty)] ,$$

<u>où</u> c_F <u>est une constante réelle positive, ne dépendant que de</u> F .

PROPOSITION 1.2. - <u>Pour toute fonction réelle positive</u> F , <u>définie dans</u> $\mathbb{R}_+$, <u>nulle en</u> 0 , <u>croissante et concave, on a</u>

$$E[F(B_\infty)] \leq 2E[F(A_\infty)] .$$

<u>Démonstration</u>. - Désignons par f la dérivée gauche de F et par μ la mesure positive sur $]0,+\infty[$ déterminée par la condition :

$$\mu([a,b[) = f(a) - f(b) \quad \text{pour} \quad 0 < a < b < +\infty .$$

Pour toute v.a. positive Z , on a alors (v. [1], th. 20.1, p.38-39):

$$E[F(Z)] = f(+\infty)\,E[Z] + \int E[Z \wedge t]\,d\mu(t) .$$

Il suffit donc de prouver l'inégalité

$$E[B_\infty \wedge t] \leq 2E[A_\infty \wedge t]$$

pour tout nombre réel t positif. A cet effet, t étant fixé, désignons par T le temps d'arrêt prévisible ainsi défini :

$$T = \inf\{s : A_s \geq t\} .$$

On a alors

$$B_\infty \wedge t \leq B_{T-} + t\, I_{\{T<+\infty\}} ,$$

$$E[B_{T-}] = E[A_{T-}] \leq E[A_\infty \wedge t] ,$$

$$E[t\, I_{\{T<+\infty\}}] \leq t\, \mathbb{P}\{A_\infty \geq t\} \leq E[A_\infty \wedge t] ,$$

d'où l'on déduit immédiatement l'inégalité à démontrer.

Nous n'utiliserons dans la suite que le corollaire suivant (dont la démonstration est évidente) :

COROLLAIRE 1.3. - <u>Pour tout élément</u> M de $\mathfrak{M}^2_{loc}$ <u>et pour tout nombre réel</u> p <u>strictement positif, on a</u>

$$E[\,[M,M]^p_\infty] \leq 2\, E[<M,M>^p_\infty] \quad \text{si} \quad p \leq 1 ,$$
$$E[<M,M>^p_\infty] \leq c_p\, E[\,[M,M]^p_\infty\,] \quad \text{si} \quad p \geq 1 .$$

2. - LES ESPACES $\mathfrak{h}^p$ ET bmo .

On dit qu'une martingale M appartient à **bmo** si elle appartient à $\mathfrak{M}^2$ et s'il existe une constante réelle positive c telle que l'on ait, pour tout temps d'arrêt T :

$$E[\,(M_\infty - M_T)^2 \mid \mathcal{F}_T] \leq c^2 \quad \text{p.s.} \quad .$$

La borne inférieure de tous les nombres c possédant cette propriété est appelée la norme de M dans **bmo** et notée $\|M\|_{<\infty>}$.

Le théorème suivant montre qu'il n'est pas possible d'associer à toute martingale locale M un processus croissant prévisible $<M,M>$ de telle façon que $M^2 - <M,M>$ soit une martingale locale. Ce résultat a été trouvé indépendamment par YOEURP dans la préparation de sa thèse : on le démontre ici, car il ne figure pas dans la litérature.

THEOREME 2.1. - *Soit* M *une martingale locale, et supposons qu'il existe un processus croissant* A *prévisible, continu à droite (pas forcément intégrable), avec* $A_0 = 0$ *et tel que* $M^2 - A$ *soit une martingale locale. Alors* M *appartient à* $\mathfrak{M}^2_{loc}$ *et* A *est indistinguable du processus* $<M,M>$.

Démonstration. - On voit facilement que, pour tout temps d'arrêt T réduisant les martingales locales M et $M^2 - A$, la v.a. $A_T^{1/2}$ est intégrable. Cela prouve que le processus $A^{1/2}$ est localement intégrable.

Si, pour tout entier n , on pose $S_n = \inf\{s : A_s \geq n\}$, on obtient une suite croissante (S_n) de temps d'arrêt prévisibles tendant vers l'infini. Tout S_n est de la forme $S_n = \sup_m S_{n,m}$, avec $S_{n,m} < S_n$ sur l'ensemble $\{S_n > 0\}$, où $(S_{n,m})$ est une suite double de temps d'arrêt que l'on pourra supposer croissante par rapport à chacun des indices.

Si alors (R_n) est une suite, croissant vers l'infini, de temps d'arrêt réduisant la martingale locale $M^2 - A$, il en est de même de la suite (T_n) définie par $T_n = R_n \wedge S_{n,n}$. Puisque la martingale $(M^2 - A)^{T_n}$ est uniformément intégrable et que la v.a. A_{T_n} est bornée (par la constante n) , la martingale M^{T_n} est de carré intégrable. Il est alors évident que les processus A et $<M,M>$ sont indistinguables.

Pour tout nombre réel $p \geq 1$, et pour tout élément M de $\mathfrak{M}^2_{loc}$, on pose

$$\|M\|_{<p>} = \|<M,M>_\infty^{1/2}\|_{L^p} .$$

On désigne par $\mathfrak{h}^p$ l'espace constitué par les éléments M de $\mathfrak{M}^2_{loc}$ pour lesquels le nombre ci-dessus est fini. Les espaces $\mathfrak{h}^p$ ainsi définis sont des espaces de Banach. Nous nous bornerons ici à démontrer cette assertion pour $p \leq 2$, car pour $p > 2$ elle résultera des Théorèmes du § 4 .

THEOREME 2.2. - *L'espace* $\mathfrak{h}^p$ *(pour* $1 \leq p \leq 2$) *est un espace de Banach par rapport à la norme* $\|\cdot\|_{<p>}$ *définie ci-dessus. En outre, de toute suite* (M^n) *convergente vers* M *dans* $\mathfrak{h}^p$, *on peut extraire une sous-suite qui converge vers* M *dans* $\mathfrak{M}^2_{loc}$

Démonstration. - Soit (M^n) une suite de Cauchy dans $\mathfrak{h}^p$. Grâce au Corollaire 1.3, (M^n) est de Cauchy dans $\mathcal{S}^p$, de sorte qu'elle converge, dans ce dernier espace, vers un élément M . Quitte à remplacer (M^n) par une suite extraite, on pourra supposer que l'on ait

$$\sum_n \|M^n - M^{n+1}\|_{<p>}^{p/2} < +\infty .$$

Pour tout entier j , désignons par S_j le temps d'arrêt prévisible défini par

$$S_j = \inf\{t : <M^n - M^{n+1}, M^n - M^{n+1}>_t \ \geq j \ \text{ pour un } n \text{ au moins}\}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_j < +\infty\} &\leq \sum_n \mathbb{P}\{<M^n - M^{n+1}, M^n - M^{n+1}>_\infty \ \geq j\} \\ &\leq j^{-p/2} \sum_n \|M^n - M^{n+1}\|_{<p>}^{p} \quad , \end{aligned}$$

de sorte que la suite (S_j) croît vers l'infini p.s. .

En raisonnant comme dans le Théorème 2.1., on peut construire une suite croissante (T_j) de temps d'arrêt, tendant vers l'infini, telle que l'on ait

$$<M^n - M^{n+1}, M^n - M^{n+1}>_{T_j} \ \leq j \quad \text{pour tout } n \quad .$$

On a en outre

$$\begin{aligned} \sum_n \|(M^n - M^{n+1})^{T_j}\|_{<2>} &= \sum_n E[<M^n - M^{n+1}, M^n - M^{n+1}>_{T_j}]^{1/2} \\ &\leq j^{(\frac{1}{2} - \frac{p}{4})} \sum_n \|M^n - M^{n+1}\|_{<p>}^{p/2} < +\infty . \end{aligned}$$

La série $\sum_n (M^n - M^{n+1})^{T_j}$ converge donc dans $\mathfrak{M}^2$ et admet comme somme M^{T_j} . Cela prouve que M appartient à $\mathfrak{M}^2_{loc}$.

Mais la série $\sum_n (M^n - M^{n+1})^{T_j}$ admet M^{T_j} comme somme aussi dans l'espace $\mathfrak{h}^p$, et l'on a :

$$\|M^{T_j}\|_{<p>} \leq \sum_n \|(M^n - M^{n+1})^{T_j}\|_{<p>} \leq \sum_n \|M^n - M^{n+1}\|_{<p>} < +\infty .$$

Il en résulte, en faisant tendre j vers l'infini :

$$\|M\|_{<p>} \leq \sum_n \|M^n - M^{n+1}\|_{<p>} ,$$

de sorte que M appartient à $\mathfrak{h}^p$.

De la même façon, on prouve l'inégalité

$$\|M - M^n\|_{<p>} \leq \sum_{k\geq n} \|M^k - M^{k+1}\|_{<p>} ,$$

et on a donc la convergence de (M^n) vers M dans $\mathfrak{h}^p$.

La proposition suivante montre que toute martingale "prévisiblement bornée dans L^p " appartient à $\mathfrak{h}^p$.

PROPOSITION 2.3. - Soient M une martingale et A un processus croissant optionnel, tels que l'on ait

$$|M_s| \leq A_{s-} \quad \text{pour tout} \quad s \;,\; A_\infty \in L^p \quad (1 \leq p \leq 2) .$$

La martingale M appartient alors à $\mathfrak{h}^p$, et on a

$$\|M\|^p_{<p>} \leq 2\, E[A^p_\infty] .$$

Démonstration. - On peut se ramener (par arrêt) au cas où A_∞ appartient à L^2 . Soit t un nombre réel positif et posons $T = \inf\{s : A^2_s > t\}$. On a alors :

$$<M,M>_\infty \wedge t \leq <M,M>_T + t\, I_{\{T<+\infty\}} ,$$

$$E[<M,M>_T] = E[M^2_T] \leq E[A^2_{T-}] \leq E[A^2_\infty \wedge t] ,$$

$$E[t\, I_{\{T<+\infty\}}] = t\,\mathbb{P}\{A^2_\infty > t\} \leq E[A^2_\infty \wedge t] .$$

Il en résulte

$$E[<M,M>_\infty \wedge t] \leq 2\, E[A^2_\infty \wedge t] ,$$

d'où la conclusion (voir la dém. de 1.2) .

3. - LE DUAL DE $\mathfrak{h}^1$ EST bmo .

Le raisonnement qui prouve que le dual de l'espace $\mathfrak{h}^1$ s'identifie à bmo est tout à fait semblable à celui qui démontre l'assertion analogue concernant les espaces $\mathfrak{H}^1$ et $\mathfrak{BMO}$ (voir [6]) : ici on se bornera à indiquer les modifications qu'il faut apporter aux démonstrations qui figurent dans [6] .

L'analogue du Lemme 2, page 140, est le suivant :

THEOREME 3.1. - Pour tout élément M de $\mathfrak{h}^1$ et pour tout élément N de bmo , on a :

$$E[\int_0^\infty |d\langle M,N\rangle_s|] \le \sqrt{2}\, \|M\|_{\langle 1 \rangle} \|N\|_{\langle \infty \rangle} .$$

Démonstration. - Si $\|N\|_{\langle\infty\rangle} = c$, on a, pour tout temps d'arrêt T :

$$E[\langle N,N\rangle_\infty - \langle N,N\rangle_T \,|\, \mathcal{F}_T] \le c^2 .$$

Si T est prévisible, en approchant T par une suite croissante (T_n) qui "annonce" T et en rappelant que $\bigvee_n \mathcal{F}_{T_n} = \mathcal{F}_{T-}$, on trouve :

$$E[\langle N,N\rangle_\infty - \langle N,N\rangle_{T-} \,|\, \mathcal{F}_{T-}] \le c^2 .$$

En d'autres termes, la projection prévisible du processus $(\langle N,N\rangle_\infty - \langle N,N\rangle_{s-})$ est bornée par c^2 .

Si H,K sont prévisibles, on a l'inégalité de KUNITA-WATANABE :

$$E[\int_0^\infty |H_s|\,|K_s|\,|d\langle M,N\rangle_s|] \le (E[\int_0^\infty H_s^2\, d\langle M,M\rangle_s])^{1/2} (E[\int_0^\infty K_s^2\, d\langle N,N\rangle_s])^{1/2} .$$

(voir [5], Prop. 3, page 77) . Posons maintenant

$$H_s^2 = \frac{d\sqrt{\langle M,M\rangle_s}}{d\langle M,M\rangle_s} = \frac{1}{\sqrt{\langle M,M\rangle_s} + \sqrt{\langle M,M\rangle_{s-}}} \quad , \quad K_s^2 = 2\sqrt{\langle M,M\rangle_s} .$$

Puisque $|H_s|\,|K_s| \ge 1$ p.s. , on a l'inégalité

$$\begin{aligned} E[\int_0^\infty |d\langle M,N\rangle_s|] &\le E[\int_0^\infty H_s^2\, d\langle M,M\rangle_s]^{1/2} E[\int_0^\infty K_s^2\, d\langle N,N\rangle_s]^{1/2} . \\ &= \|M\|_{\langle 1\rangle}^{1/2} E[\int_0^\infty K_s^2\, d\langle N,N\rangle_s]^{1/2} . \end{aligned}$$

On a d'autre part (en intégrant par parties) :

$$E[\int_0^\infty \sqrt{\langle M,M\rangle_s}\, d\langle N,N\rangle_s] = E[\int_0^\infty (\langle N,N\rangle_\infty - \langle N,N\rangle_{s-})\, d\sqrt{\langle M,M\rangle_s}] .$$

Puisque $d\sqrt{<M,M>_s}$ est une mesure "prévisible", le processus $(<N,N>_\infty - <N,N>_{s-})$ peut être remplacé par sa projection prévisible, qui est bornée par $\|N\|^2_{<\infty>}$. Cela achève la démonstration.

L'analogue du théorème final de [6] (page 141) est le théorème suivant :

THEOREME 3.2. - <u>Soit</u> $M \in \mathfrak{M}^2$. <u>On a alors</u>

$$\|M\|_{<\infty>} \leq \sup_L E[M_\infty L_\infty] \quad \underline{\text{pour}} \quad L \in \mathfrak{M}^2 \ , \ \|L\|_{<1>} \leq 1 \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - Même dans ce cas, la démonstration n'est qu'une modification du cas optionnel. Supposons en effet que le deuxième membre soit ≤ 1 . Soient T un temps d'arrêt et A un élément de la tribu $\mathcal{F}_T$. Posons $Z = <M,M>_\infty - <M,M>_T$, $D = I_A I_{\{t>T\}}$, $Y = D.M$ (intégrale stochastique). On a alors

$$Y = (M - M^T) I_A \ , \quad <Y,M>_\infty = <Y,Y>_\infty = I_A . Z. \quad .$$

Il en résulte

$$\|Y\|_{<1>} = E[I_A . \sqrt{Z}] \quad ,$$

et par conséquent

$$E[I_A Z] = E[<Y,M>_\infty] \leq E[I_A \sqrt{Z}] \leq E[Z I_A]^{1/2} \ \mathbb{P}(A)^{1/2} \quad .$$

L'ensemble A étant arbitraire, cela prouve la relation conditionnelle :

$$E[Z | \mathcal{F}_T] = E[<M,M>_\infty - <M,M>_T | \mathcal{F}_T] \leq 1 \ .$$

Le théorème est ainsi établi.

4. - <u>LE DUAL DE</u> $\mathfrak{h}^p$ <u>EST</u> $\mathfrak{h}^q$.

P.A. MEYER a récemment démontré l'inégalité suivante (version renforcée de l'inégalité de KUNITA - WATANABE) :

$$\int_0^\infty |H_s|\ |K_s|\ |d\langle M,N\rangle_s| \le \sqrt{\int_0^\infty H_s^2\, d\langle M,M\rangle_s}\ \sqrt{\int_0^\infty K_s^2\, d\langle N,N\rangle_s} \quad \text{p.p.}\ ,$$

valable pour tout couple H,K de processus prévisibles et pour tout couple M,N d'éléments de $\mathfrak{M}^2_{loc}$. On en déduit, si p,q sont deux exposants conjugués $(1<p<\infty)$:

$$E[\int_0^\infty |d\langle M,N\rangle_s|\ ] \le \|M\|_{\langle p\rangle}\ \|N\|_{\langle q\rangle}\ .$$

Grâce à cette inégalité, la forme bilinéaire $(M,N)\mapsto E[\langle M,N\rangle_\infty]$ met en dualité séparante les espaces $\mathfrak{h}^p$ et $\mathfrak{h}^q$.

Soit maintenant Φ une forme linéaire continue sur $\mathfrak{h}^p$ $(1<p\le 2)$, et soit $\|\Phi\|$ sa norme en tant que forme linéaire sur $\mathfrak{h}^p$. La restriction de Φ à $\mathfrak{M}^2$ étant une forme linéaire continue sur $\mathfrak{M}^2$, il existe un élément M de $\mathfrak{M}^2$ tel que l'on ait

$$\Phi(N) = E[N_\infty M_\infty] = E[\langle N,M\rangle_\infty] \quad \text{pour tout}\quad N\in\mathfrak{M}^2\ .$$

On a aussi :

$$|E[\langle N,M\rangle_\infty]\ | \le \|\Phi\|\ \|N\|_{\langle p\rangle}\ .$$

Le théorème suivant montre que Φ peut être identifié à un élément de $\mathfrak{h}^q$.

THEOREME 4.1. - <u>Soit</u> $M\in\mathfrak{M}^2$. <u>On a alors</u> :

$$\|M\|_{\langle q\rangle} \le \frac{q}{2}\ \sup_N E[\langle M,N\rangle_\infty] \quad \underline{\text{pour}}\quad N\in\mathfrak{M}^2 \quad \underline{\text{et}}\quad \|N\|_{\langle p\rangle}\le 1\ .$$

<u>Démonstration</u>. - Supposons d'abord $\|M\|_{\langle 2q-2\rangle} < +\infty$, et posons $N = H.M$, où :

$$H_s = \frac{\langle M,M\rangle_s^{\frac{q}{2}-1}}{a}\ ,\qquad a = E[\langle M,M\rangle_\infty^{q/2}]^{1-\frac{1}{q}}\ .$$

On a alors

$$\langle N,N\rangle_\infty = \int_0^\infty H_s^2\, d\langle M,M\rangle_s = \frac{1}{a^2}\int_0^\infty \langle M,M\rangle_s^{q-2}\, d\langle M,M\rangle_s \le \frac{1}{a^2}\langle M,M\rangle_\infty^{q-1}\ ,$$

et par conséquent $N \in \mathfrak{M}^2$, $\|N\|_{<p>} \leq 1$.

En utilisant l'inégalité établie dans [7], page 76, on trouve :

$$\|M\|_{<q>} = \frac{1}{a} E[\int_0^\infty d<M,M>_s^{q/2}] \leq \frac{q}{2a} E[\int_0^\infty <M,M>_s^{\frac{q}{2}-1} d<M,M>_s]$$

$$= \frac{q}{2} E[\int_0^\infty H_s \, d<M,M>_s] = \frac{q}{2} E[\int_0^\infty d<M,N>_s] = \frac{q}{2} E[<M,N>_\infty] .$$

Passons maintenant au cas général. Soit (T_n) une suite croissante de temps d'arrêt, tendant vers l'infini et telle que, pour tout n , M^{T_n} appartienne à $\mathfrak{h}^{2q-2}$. On a alors, pour tout n :

$$\|M^{T_n}\|_{<q>} \leq \frac{q}{2} \sup_N E[<M^{T_n},N>_\infty] \leq \frac{q}{2} \sup_N E[<M,N>_\infty]$$

(la borne supérieure étant prise sur les éléments N de $\mathfrak{M}^2$ satisfaisant à la condition $\|N\|_{<p>} \leq 1$) .

En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit l'inégalité désirée.

Enfin, le fait que le dual de $\mathfrak{h}^q$ $(2 < q < +\infty)$ s'identifie à $\mathfrak{h}^p$ est une conséquence du théorème suivant :

THEOREME 4.2. - Soit $q \geq 2$. L'espace de Banach $\mathfrak{h}^q$ est alors uniformément convexe (donc réflexif : voir [8], p. 127) .

<u>Démonstration</u>. - Rappelons qu'un espace de Banach X est dit uniformément convexe si , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour tout couple x,y d'éléments de X , les relations $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\|x-y\| \geq \varepsilon$ entraînent $\|x+y\| \leq 2(1-\delta)$.

En partant des inégalités suivantes (valables pour x,y réels positifs et $p \geq 1$) :

$$(x+y)^p \leq 2^{p-1} (x^p + y^p) , \qquad (x+y)^p \geq x^p + y^p$$

et de l'identité

$$<M+N, M+N> + <M-N, M-N> = 2(<M,M> + <N,N>) ,$$

on obtient, pour $q \geq 2$:

$$<M+N, M+N>^{\frac{q}{2}} + <M-N, M-N>^{\frac{q}{2}} \leq (<M+N, M+N> + <M-N, M-N>)^{\frac{q}{2}}$$

$$\leq 2^{q-1}(<M,M>^{\frac{q}{2}} + <N,N>^{\frac{q}{2}}) \quad ,$$

$$<M+N, M+N>^{\frac{q}{2}} \leq 2^{q-1}(<M,M>^{\frac{q}{2}} + <N,N>^{\frac{q}{2}}) - <M-N, M-N>^{\frac{q}{2}} \quad :$$

Soit maintenant $\|M\|_{<q>} = \|N\|_{<q>} = 1$ et $\|M-N\|_{<q>} \geq \varepsilon$. On a alors :

$$\|M+N\|_{<q>} \leq (2^q - \varepsilon^q)^{\frac{1}{q}} = 2(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q})^{\frac{1}{q}} \quad ,$$

de sorte que la condition de convexité uniforme est satisfaite avec

$$\delta = 1 - (1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q})^{\frac{1}{q}} \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BURKHOLDER D.L. — Distribution function inequalities for martingales. Annals of Probability, Vol. 1, n° 1, pp. 19 - 42 (1973) .

[2] CHOU C.S. — Les méthodes de Garsia en théorie des martingales ; extension au cas continu. A paraître.

[3] DOLEANS-DADE C. et P.A. MEYER — Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Séminaire de Probabilités IV, pp. 77 - 107. Lectures Notes in M. 124 . Springer, Berlin (1970) .

[4] MEYER P.A. — Guide détaillé de la théorie générale des processus. Séminaire de Probabilités II, pp. 140 - 170 . Lecture Notes in M. 51. Springer, Berlin (1968) .

[5] MEYER P.A. — Intégrales stochastiques I et II . Séminaire de Probabilités I, pp. 72 - 117. Lectures Notes in M. 39 . Springer, Berlin (1967) .

[6] MEYER P.A. Le dual de H^1 est BMO (cas continu). Séminaire de Probabilités VII, pp. 136 - 145. Lecture Notes in M. 321 Springer - Berlin (1973).

[7] MEYER P.A. Martingales and stochastic integrals. Lecture Notes in M. 284 Springer, Berlin (1972).

[8] YOSIDA K. Functional Analisis. Springer, Berlin (1971).

ISTITUTO di MATEMATICA
Universita di Pisa

56100 PISA

Italie

INSTITUT de RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
Laboratoire Associé au C.N.R.S.

Université Louis Pasteur

7, rue René Descartes

67084 STRASBOURG CEDEX