Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Paul-André Meyer

Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood-Paley. Exposé IV : semi-groupes de convolution symétriques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 10 (1976), p. 175-183
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__175_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1974/75

DEMONSTRATION PROBABILISTE DE CERTAINES INEGALITES DE LITTLEWOOD-PALEY

(P.A. Meyer)

EXPOSE IV : SEMI-GROUPES DE CONVOLUTION SYMETRIQUES

Les principales applications de cet exposé concernent la situation indiquée dans le titre. Néanmoins, les méthodes probabilistes ont l'avantage, sur les méthodes analytiques, de n'exiger que des structures pauvres, et peu de différentiabilité. Il serait donc regrettable d'aller tout de suite se placer sur $\mathbb{R}^n$! Le premier paragraphe reprend donc la méthode qui nous a servi, dans l'exposé I, à montrer que les transformations de RIESZ opèrent dans L^p, en lui donnant toute la généralité possible. Après quoi, nous passons aux semi-groupes de convolution symétriques et aux problèmes de multiplicateurs.

I. UN THEOREME DE MAJORATION DANS L^p

Nous reprenons les hypothèses de l'appendice de l'exposé II : E est LCD (localement compact à base dénombrable), (P_t) un semi-groupe markovien symétrique par rapport à la mesure ξ , qui est une mesure de Radon sur E (la symétrie entraîne l'invariance, puisque $P_t1=1$). De plus, (P_t) possède un opérateur carré du champ Γ. Enfin, nous supposerons que (P_t) n'admet pas de fonction invariante de carré intégrable . Cette hypothèse est gênante, car elle exclut d'emblée le cas où ξ est bornée (la fonction 1 étant invariante). Elle n'est heureusement pas essentielle : si elle n'est pas satisfaite, il faudra simplement restreindre les inégalités à des fonctions f "sans partie invariante".

Nous désignons par $\underline{\underline{H}}$ un sous-espace de $\underline{\underline{D}}_{L^2}(A)$, par L une application linéaire de $\underline{\underline{H}}$ dans L^2. Nous dirons que L est admissible si les conditions 1) et 2) ci-dessous sont satisfaites.

A1) $\underline{\underline{H}}$ est stable par Q_t $(t>0)$ et $Q_tLf=LQ_tf$ ξ-p.p. pour $f\in\underline{\underline{H}}$

A2) $(Lf)^2 \leqq (Bf)^2+ \Gamma(f,f)$ ξ-p.p. pour $f\in\underline{\underline{H}}$

Quelques commentaires . D'abord, nous aurions pu multiplier le second membre de A2 par une constante , mais il aurait fallu la traîner partout . Nous préférons donc laisser au lecteur cette extension immédiate, et laisser au mot "admissible" son sens restreint. Il faut noter que, si l'on travaillait sur des fonctions <u>complexes</u>, Γ serait une forme hermitienne , et A2 devrait être remplacée par

A2') $\qquad |Lf|^2 \leqq |Bf|^2 + \Gamma(f,f) \quad$ pour $f \in \underline{\underline{H}}$

Mais si L est réelle et satisfait à A2, son prolongement naturel à $\underline{\underline{H}}+i\underline{\underline{H}}$ satisfait à A2', et il n'y a donc pas lieu de s'inquiéter de cette nuance (qui interviendra plus loin, lorsque nous rencontrerons des transformations de Fourier).

Ensuite, désignons par Δ l'espace $\underline{\underline{D}}_{L^2}(B)$ muni de la norme $\|f\|_\Delta = (\|f\|_2^2+\|Bf\|_2^2)^{1/2}$, pour laquelle il est complet (c'est simplement le fait qu'un générateur infinitésimal, tel que B, est un opérateur fermé). On peut montrer que Δ est l'espace de Dirichlet usuel. Il résulte de A2), et de la formule (46) de l'exposé II (appendice) que L est continu pour la topologie de Δ.

Voici le résultat principal de cet exposé - les autres en seront surtout des commentaires. La démonstration reprend exactement celle de l'exposé I sur la transformation de RIESZ, mais - sauf dans le cas des diffusions, qui ne nous intéresse pas spécialement - nous n'atteignons que les valeurs de $p \geqq 2$.

THEOREME 1. <u>Soit</u> L <u>un opérateur admissible</u>. <u>On a pour</u> $2 \leqq p < \infty$

(1) $$\|Lf\|_p \leqq c_p \|Bf\|_p \quad (f \in \underline{\underline{H}}) \quad .$$

Ici c_p ne dépend <u>que de</u> p (ni de L, ni du semi-groupe).

DEMONSTRATION. Nous posons $Bf=u\in L^2$, $Lf=r\in L^2$. Nous avons

(2) $$Q_t f = f + \int_0^t Q_s u \, ds$$

Mais puisque $f \in \underline{\underline{D}}_{L^2}(A)$, nous avons $Bf=u \in \underline{\underline{D}}_{L^2}(B)$. Posons $Bu=v$; alors $BQ_t u = Q_t v$ et, le semi-groupe (Q_t) étant fortement continu sur L^2, l'application $t \mapsto Q_t v$ est continue dans L^2 , donc $t \mapsto Q_t u$ est continue dans Δ. L'intégrale de (2), qui a priori était une intégrale forte dans L^2 , est donc une intégrale forte dans Δ. D'autre part, nous avons $u = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(Q_t f - f)$ dans L^2 , et aussi $Bu = \lim \frac{1}{t}(Q_t Bf - Bf)$ dans L^2, donc $u = \lim \frac{1}{t}(Q_t f - f)$ dans Δ ; comme $Q_t f - f$ appartient à $\underline{\underline{H}}$, u appartient à l'adhérence $\overline{\underline{\underline{H}}}$ de $\underline{\underline{H}}$ dans Δ , et de même $Q_s u$. L se prolongeant par continuité à $\overline{\underline{\underline{H}}}$, nous appliquons L aux deux membres de (2) pour obtenir

(3) $$Q_t r = Q_t Lf = LQ_t f = Lf + \int_0^t LQ_s u \, ds$$

Dérivons dans L^2 et appliquons A2. Il vient

(4) $$(D_tQ_tr)^2 = (LQ_tu)^2 \leqq (BQ_tu)^2 + \Gamma(Q_tu,Q_tu) = (D_tQ_tu)^2+\Gamma(Q_tu,Q_tu)$$

Appliquant Q_t $(=Q_t^*)$ et intégrant par rapport à tdt, nous obtenons l'inégalité cruciale

(5) $$H_r^{\rightarrow} \leqq H_u \quad \xi\text{-p.p.}$$

et par conséquent $\|r\|_p \leqq c_p\|H_r^{\rightarrow}\|_p \leqq c_p\|H_u\|_p \leqq c_p'\|u\|_p$ pour $p \geqq 2$.

Notons tout de suite une variante :

VARIANTE. <u>Si</u> A2 <u>est remplacée par</u>

(6) $$(Lf)^2 \leqq f^2 + (Bf)^2 + \Gamma(f,f) \quad \xi\text{-}\underline{\text{p.p.}}$$

<u>alors on a</u> $\|Lf\|_p \leqq c_p(\|f\|_p+\|Bf\|_p)$ <u>pour</u> $f\in\underline{\underline{H}}$, $p\geqq 2$.

DEMONSTRATION. Au second membre de (4) apparaît le terme supplémentaire $(Q_tu)^2 = (Q_tBf)^2 = (D_tQ_tf)^2$, et (5) est remplacée par

$$(H_r^{\rightarrow})^2 \leqq (H_u)^2 + (H_f^{\rightarrow})^2$$

On conclut alors de la même manière.

Nous donnons une démonstration directe très simple (inspirée de STEIN) du théorème suivant. Mais cette démonstration modifie les constantes. Si on s'intéresse à celles-ci, il faut utiliser une forme vectorielle des inégalités de L-P, qui n'est pas difficile à établir (appendice de l'exposé III).

Ici encore, adoptons une terminologie brève : nous dirons qu'une suite (L_n) d'opérateurs admissibles sur $\underline{\underline{H}}$ est une <u>suite admissible</u> si l'on a

(7) $$\Sigma_n (L_nf)^2 \leqq (Bf)^2 + \Gamma(f,f) \quad \xi\text{-}\underline{\text{p.p. pour}}\ f\in\underline{\underline{H}} .$$

THEOREME 1'. <u>Si</u> (L_n) <u>est une suite admissible, on a pour</u> $2\leqq p<\infty$

(8) $$\| (\Sigma_n(L_nf)^2)^{1/2}\|_p \leqq c_p\|Bf\|_p \quad \underline{\text{pour}}\ f\in\underline{\underline{H}} .$$

DEMONSTRATION. Il suffit de considérer le cas où $L_n=0$ pour $n\geqq N$ assez grand. Soit (r_n) le système des fonctions de RADEMACHER sur l'espace auxiliaire $T=[0,1]$; nous appliquons le théorème 1 à $L_t = r_1(t)L_1+\ldots+r_N(t)L_N$, ce qui nous donne

$$\|r_1(t)L_1f+\ldots+r_N(t)L_Nf\|_p \leqq c_p\|Bf\|_p$$

et nous intégrons en t, puis appliquons le lemme de KHINTCHINE (voir STEIN, Singular integrals... p.104 et p.276 , [1] de la bibl. de l'exposé I). Cela donne le résultat cherché.

II. APPLICATION AUX SEMI-GROUPES DE CONVOLUTION

Nous supposons maintenant que (P_t) est un semi-groupe de convolution symétrique sur $\mathbb{R}^n$, et nous utilisons toutes les notations de l'exposé II. p.7-11. Nous allons construire des opérateurs de convolution admissibles de la manière suivante. Nous dirons qu'une <u>distribution</u> Λ est <u>admissible</u> si l'on a

(9) $$(\Lambda f)^2 \leqq (B_o f)^2 + \Gamma_o(f,f) \qquad \text{pour } f\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$$

Nous introduirons de même - en vue du théorème analogue à 2' - les <u>suites admissibles</u> (Λ_n), pour lesquelles le premier membre de (9) est remplacé par $\Sigma_n (\Lambda_n f)^2$.

Nous avons vérifié dans l'exposé II, p.10, sur la formule de KHINTCHINE-LEVY, que si des $f_n\in C_b^2$ convergent vers 0 ainsi que leurs dérivées d'ordre 1 et 2 tout en restant bornées dans $\underline{\underline{C}}_b^2$, alors $A_o f_n$, $B_o f_n$ (donc aussi $\Gamma_o(f_n,f_n) = \frac{1}{2}A_o f_n^2 - f_n(0)A_o f_n$ tend vers 0. On en déduit que $\underline{\underline{C}}_c^2$ est dense dans $\underline{\underline{C}}_b^2$ pour la topologie associée à la forme quadratique positive au second membre de (9), et que Λ se prolonge de manière unique en une forme linéaire sur $\underline{\underline{C}}_b^2$ satisfaisant à (9). Nous posons alors pour $f\in\underline{\underline{C}}_b^2$

(10) $$Lf(x) = \text{"}\int f(x+y)\Lambda(dy)\text{"} = \Lambda(f(x+.))$$

Quelle est la transformée de Fourier de Λ ? Pour abréger les notations, notons e_u la fonction $x \mapsto e^{iux}$, et posons

$$\lambda(u) = \Lambda(e_u)$$

Il est facile de vérifier que λ est la transformée de Fourier de Λ au sens des distributions, et l'on a $(Lf)\hat{}(u) = \lambda(-u)\hat{f}(u)$ si $f\in\underline{\underline{S}}$. Nous avons aussi d'après (9)

$$|\lambda(u)|^2 \leqq |B(e_u)|^2 + \Gamma_o(e_u,e_u) = 2\psi(u)$$

En effet, d'après l'exposé II, p.8

(11) $$2\Gamma_o(e_u,e_v) = \psi(u)+\psi(-v)-\psi(u-v)$$ - et ici $\psi(v)=\psi(-v)$.

Donc $|\lambda(u)|=O(1+|u|)$, et le bon espace à introduire est le suivant : <u>nous désignerons par $\underline{\underline{H}}$ l'espace des fonctions</u> f , <u>telles que</u> $(1+|u|^2)^n\hat{f}$ <u>appartienne à</u> L^2 <u>pour tout</u> n . Comme $(1+|u|^2)^n \hat{f}(u)$ appartient alors à L^1 pour tout n, on voit que f admet des dérivées de tous les ordres continues, et tendant vers 0 à l'infini. L'espace $\underline{\underline{H}}$ est stable par les Q_t, par B, par A, par les opérateurs admissibles L ci-dessus, et tous ces opérateurs commutent sur $\underline{\underline{H}}$.

Prenant n=0 dans la définition de $\underline{\underline{H}}$, on voit que toute $f \in \underline{\underline{H}}$ appartient à L^2. On peut donc écrire, pour $f,g \in \underline{\underline{H}}$

(12) $$\langle Lf, g\rangle_\xi = \langle f, L^*g\rangle_\xi$$

où L^* est l'opérateur de convolution associé à la distribution $\Lambda^\vee$, symétrique de Λ par rapport à 0. $\Lambda^\vee$ est aussi admissible (remplacer dans (9) f par $f^\vee$, et utiliser la symétrie du semi-groupe). Cela va nous permettre d'étendre le théorème 1 à l'intervalle $]1,\infty[$ tout entier (on aura un résultat analogue pour le théorème 1', mais nous ne le démontrerons pas en détail : on passe de 2 à 2' comme de 1 à 1').

THEOREME 2. <u>On a pour</u> $1<p<\infty$, <u>si</u> Λ <u>est une distribution admissible</u>

(13) $$\|Lf\|_p \leq c_p\|Bf\|_p \quad (f\in\underline{\underline{H}}) .$$

THEOREME 2'. <u>De même, si</u> $(\Lambda\ )$ <u>est une suite admissible, on a</u>

(14) $$\|(\Sigma_n (L_nf)^2)^{1/2}\|_p \leq c_p\|Bf\|_p \quad (f\in\underline{\underline{H}}).$$

DEMONSTRATION DE 2 . Le résultat découle du théorème 1 si $p\geq 2$. Supposons donc $p<2$, et soit q l'exposant conjugué de p. Soit (V_λ) la résolvante de (Q_t), qui laisse $\underline{\underline{H}}$ invariant. Soient $f\in\underline{\underline{H}}$, $j\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$, et posons

$$h = V_\lambda(-j) \ , \quad g=j-\lambda V_\lambda j = Bh \qquad (h \text{ et } g \text{ sont dans } \underline{\underline{H}})$$

Nous avons

$$\langle Lf,g\rangle = \langle Lf,Bh\rangle = \langle BLf,h\rangle = \langle LBf,h\rangle = \langle Bf,L^*h\rangle$$

Comme L^* est admissible et $q\geq 2$, nous avons

$$|\langle Lf,g\rangle| \leq \|Bf\|_p\|L^*h\|_q \leq c_q\|Bf\|_p\|Bh\|_q = c_q\|Bf\|_p\|g\|_q$$

Faisons tendre λ vers 0. Nous avons vu dans l'exposé II que $\lambda V_\lambda j$ tend vers j dans L^2 et dans L^q . Donc le premier membre tend vers $|\langle Lf,j\rangle|$, tandis que $\|g\|_q$ tend vers $\|j\|_q$. Ainsi

$$|\langle Lf,j\rangle| \leq c_q\|Bf\|_p\|j\|_q \text{ pour } j\in\underline{\underline{C}}_c^\infty \quad \text{, le résultat cherché.}$$

REMARQUE. Le théorème 2 entraîne le résultat suivant, qui est le plus fréquemment utilisé en analyse : compte tenu de la relation $B^2=-A$, si Λ_1 et Λ_2 sont deux distributions admissibles, on a pour $f\in\underline{\underline{H}}$

$$\|L_1L_2f\|_p \leq c_p\|BL_2f\|_p = c_p\|L_2Bf\|_p \leq c_p^2\|Af\|_p$$

En particulier, les opérateurs $L_1L_2U_\lambda$ sont bornés dans L^p.

Nous démontrons maintenant un résultat plaisant d'équivalence de normes. On peut conjecturer qu'il est vrai pour des semi-groupes symétriques bien plus généraux que les semi-groupes de convolution.

THEOREME 3. On a pour $1<p<\infty$, et $f\in\underline{\underline{H}}$

(15) $$c_p\|\sqrt{\Gamma(f,f)}\|_p \leqq \|Bf\|_p \leqq c'_p\|\sqrt{\Gamma(f,f)}\|_p$$

DEMONSTRATION. Dans l'exposé II, p.9, nous avons construit une suite d'opérateurs admissibles H_n tels que pour $f\in\underline{\underline{S}}$ $\Gamma(f,f)=\Sigma_n(H_nf)^2$ (formule (22)), après quoi cette formule a été étendue, p.10, à $\underline{\underline{C}}_b^2$, donc à $\underline{\underline{H}}$. La suite (H_n) est évidemment admissible, et la moitié gauche de (15) résulte alors du théorème 2'.

Pour prouver la moitié droite, nous partons de la formule (45), page II.20 : si $f\in\underline{\underline{H}}$, $\langle Bf,Bf\rangle = -\langle Af,f\rangle = \int\Gamma(f,f)\xi$, que nous polarisons en

(16) si $f\in\underline{\underline{H}}$, $h\in\underline{\underline{H}}$, $\langle Bf,Bh\rangle = \int\Gamma(f,h)\xi$

Soit maintenant $j\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$. Comme dans la démonstration du th.2, posons $h=V_\lambda(-j)$, $g=Bh = j-\lambda V_\lambda j$. Nous avons pour $f\in\underline{\underline{H}}$

$$|\langle Bf,g\rangle|=|\langle Bf,Bh\rangle| = |\int\Gamma(f,h)\xi| \leq \int\sqrt{\Gamma(f,f)}\sqrt{\Gamma(h,h)}\xi$$

$$\leqq \|\sqrt{\Gamma(f,f)}\|_p\|\sqrt{\Gamma(h,h)}\|_q \leqq c'_q\|\sqrt{\Gamma(f,f)}\|_p\|Bh\|_q = c_q\|\sqrt{\ }\|_p\|g\|_q$$

où l'on a appliqué la moitié gauche de (15). Après quoi, faisant tendre λ vers 0, on peut remplacer g par j comme dans la démonstration du théorème 2, et conclure, $j\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$ étant arbitraire.

REMARQUE. La moitié droite de (15) est sûrement fausse pour les semi-groupes de convolution non symétriques (pour le semi-groupe de translation sur $\mathbb{R}$, Γ est identiquement nul). Mais se pourrait il que la moitié gauche reste vraie ?

Nous pouvons appliquer le théorème 3 à un théorème de commutateurs.

THEOREME 4. Soit k une fonction de $\underline{\underline{C}}_b^2$, et soit K l'opérateur linéaire sur $\underline{\underline{H}}$

(17) $$Kf = A(fk)-kAf$$

On a alors, pour $1<p<\infty$

(18) $$\|Kf\|_p \leqq c_p(\|f\|_p+\|Bf\|_p)$$

DEMONSTRATION. Il suffit de montrer que $|Kf|\leq C(|f|+\sqrt{\Gamma(f,f)})$, et d'appliquer le théorème 3 - on ne peut pas appliquer une variante du théorème 2 , car K n'est pas un opérateur de convolution ! Or c'est évident, car $Kf = f.Ak + 2\Gamma(f,k)$ est dominé par $|Ak||f|+2\sqrt{\Gamma(f,f)}\sqrt{\Gamma(k,k)}$, et les deux fonctions Ak et $\sqrt{\Gamma(k,k)}$ sont bornées.

Il est bien connu que les contractions opèrent dans les espaces de Dirichlet. Nous allons établir un résultat analogue (mais seulement pour les semi-groupes <u>de convolution</u> symétriques, hélas) pour les espaces $\underline{\underline{D}}_{L^p}(B)$ - on note ainsi le domaine du générateur infinitésimal du semi-groupe (Q_t) opérant sur L^p, avec la norme $(\|f\|_p^p+\|Bf\|_p^p)^{1/p}$, de sorte que $\underline{\underline{D}}_{L^2}(B)$ est l'espace de Dirichlet usuel. Ici on a $1<p<\infty$.

THEOREME 5. <u>Si</u> φ <u>est une fonction lipschitzienne de rapport</u> 1 <u>sur</u> $\mathbb{R}$[1], <u>telle que</u> $\varphi(0)=0$, <u>et si</u> f <u>appartient à</u> $\underline{\underline{C}}_c^\infty \cap \underline{\underline{D}}_{L^p}(B)$, <u>on a</u> $\varphi\circ f \in \underline{\underline{D}}_{L^p}(B)$ <u>et</u>

$$(19) \qquad \| B(\varphi\circ f)\|_p \leqq c_p \|Bf\|_p$$

DEMONSTRATION. Nous remarquons d'abord que si f appartient à $\underline{\underline{C}}_c^\infty$, Bf appartient à L^2 et à L^∞, donc à tout L^p intermédiaire. On n'a donc besoin de spécifier que f appartient à $\underline{\underline{D}}_{L^p}(B)$ que pour p<2.

Considérons une suite de fonctions indéfiniment dérivables φ_n , lipschitziennes de rapport 1, nulles en 0, convergeant simplement vers φ - une telle suite se construit par régularisation, en retranchant de plus, à chaque fois, la valeur à l'origine. Les fonctions $\varphi_n\circ f$ appartiennent alors à C_c^∞ . Posons pour abréger $\varphi_n\circ f=F_n$, $BF_n=G_n$, $\varphi\circ f=G$.

Comment calcule t'on $2\Gamma_0(f,f)$? C'est $A_0((f-f(0))^2) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int P_t(0,dy)(f(y)-f(0))^2$. Comme φ_n est lipschitzienne de rapport 1, on en déduit que $\Gamma_0(F_n,F_n) \leqq \Gamma_0(f,f)$, puis, par translation, la même inégalité partout.

Nous avons alors, d'après la moitié gauche de (15), $\|\sqrt{\Gamma(F_n,F_n)}\|_p \leqq c_p\|Bf\|_p$, puis d'après la moitié droite de (15) $\|BF_n\|_p \leqq c_p'\|Bf\|_p$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer ques les $BF_n=G_n$ convergent faiblement dans L^p vers une fonction $G\in L^p$. La relation

$$Q_tF_n = F_n + \int_0^t Q_sG_n\, ds$$

passe alors à la limite faible pour donner $Q_tF=F+\int_0^t Q_sG\, ds$, donc $F\in\underline{\underline{D}}_{L^p}$ et BF=G. On conclut en remarquant que $\|.\|_p$ est une fonction semi-continue inférieurement pour la convergence faible.

Un passage à la limite simple permet d'étendre (19) à l'<u>adhérence</u> de $\underline{\underline{C}}_c^\infty \cap \underline{\underline{D}}_{L^p}$ dans $\underline{\underline{D}}_{L^p}$, mais je ne sais pas dire quand cette adhérence est $\underline{\underline{D}}_{L^p}$ tout entier.

1. On pourrait considérer des fonctions lipschitziennes de n variables. Nous laisserons cela de côté.

Pour finir, nous allons transformer le théorème 2 en un énoncé concernant les multiplicateurs de Fourier. Il faut remarquer que ce n'est pas un théorème d'un type usuel : aucune condition de régularité n'est imposée à λ (transformée de Fourier de Λ) ou à ψ . La structure différentiable de $\mathbb{R}^n$ semble oubliée (bien qu'en fait nous l'ayons utilisée dans les démonstrations !), et la condition A2 s'écrit de manière intrinsèque en termes de transformation de Fourier sous la forme suivante : pour toute partie finie I de $\mathbb{R}^n$, la forme hermitienne suivante, où u et v parcourent I

$$(20)\quad \frac{1}{2}\Sigma(\psi(u)+\psi(-v)-\psi(u-v))x_u\bar{x}_v + \Sigma\sqrt{\psi}(u)\sqrt{\psi}(-v)x_u\bar{x}_v - \Sigma\,\lambda(u)\bar{\lambda}(v)x_u\bar{x}_v$$

est positive sur $\mathbb{C}^I$(nous avons oublié à dessein que $\psi(v)=\psi(-v)$).

THEOREME 6. <u>Si</u> Λ <u>est admissible</u>, $\lambda/\sqrt{\psi}$ <u>est un multiplicateur de</u> $\mathcal{F}L^p$, $1<p<\infty$ (avec une norme en tant que multiplicateur qui dépend seulement de p).

DEMONSTRATION. Soit $\underline{\underline{S}}_0$ l'espace formé des $g\in\underline{\underline{S}}$ dont la transformée de Fourier est à support compact disjoint de 0. On peut montrer que $\underline{\underline{S}}_0$ est dense dans tous les L^p ($1<p<\infty$). Pour $g\in\underline{\underline{S}}_0$, définissons f par la formule

$$\hat{f}(u) = \frac{\hat{g}(u)}{\sqrt{\psi(u)}}$$

C'est une fonction bornée à support compact, donc f appartient à $\underline{\underline{C}}_b^2$ et nous pouvons définir Lf, et vérifier que Bf=g. Alors le théorème 2 nous donne que, pour $g\in\underline{\underline{S}}_0$, $\|Lf\|_p \leq c_p\|g\|_p$. Comme $(Lf)\hat{}= \lambda\hat{g}/\sqrt{\psi}$, $\lambda/\sqrt{\psi}$ est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^p$.

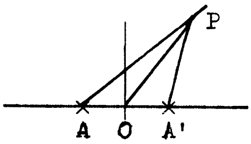
EXEMPLE. Pour construire des distributions admissibles, il suffit de choisir des distributions de la forme $f\mapsto \Gamma_0(f,g)$, où $g\in\underline{\underline{C}}_b^2$ est telle que $\Gamma_0(g,g)\leq 1$. Par exemple, pour $z\in\mathbb{R}^n$, la fonction

$$g_z = \frac{e_z}{\sqrt{\psi(z)}} \quad \text{telle que } \Gamma_0(g_z,g_z)=1$$

nous donne les multiplicateurs suivants - dont les normes ne dépendent que de p, non de z ou de ψ

$$m_z(u) = \frac{\psi(u)+\psi(z)-\psi(u-z)}{\sqrt{\psi(z)}\sqrt{\psi(u)}}$$

(l'expression donnée ici tient compte de la symétrie de ψ). Par exemple, si $\psi(u)=|u|^2$ et z est le vecteur de composantes (1,0,..,0), on retrouve la transformation de Riesz : $m_z(u)=\frac{u_1}{|u|}$. Plus généralement, si au lieu de $|u|^2$ on prend $\psi(u)=|u|^{2\alpha}$ $(0<\alpha\leqq 1)$, on obtient un curieux multiplicateur dipôlaire



$$f(P) = \frac{AP^{2\alpha} - A'P^{2\alpha}}{OP^{\alpha}}$$

Une autre remarque que l'on peut faire sur l'énoncé du théorème 6 . Supposons que l'on ait $(\Lambda f)^2 \leqq \Gamma(f,f)$ pour $f \in \underline{\underline{C}}_c^{\infty}$, i.e. que Λ soit admissible sans la présence au second membre du terme $(Bf)^2$. Si l'on considère un second semi-groupe (P'_t) dont l'opérateur carré du champ est plus grand que Γ , alors Λ reste admissible. Par exemple, si Λ est la dérivée suivant la première coordonnée $(\lambda(u)=iu_1)$, et Γ est l'opérateur carré du champ du mouvement brownien grad^2, la condition ci-dessus est satisfaite, et l'on voit que $u_1/\sqrt{|u|^2+\varphi(u)}$ est un multiplicateur pour toute fonction φ symétrique de type négatif.

Tout cela m'amène à poser le problème suivant : le théorème 6 ne serait il pas vrai aussi pour des semi-groupes de convolution non nécessairement symétriques ? Le seul pas que j'aie pu faire dans cette direction est le suivant : si (P_t) est un semi-groupe de convolution non nécessairement symétrique, si Λ est une distribution admissible par rapport à (P_t), alors pour $2\leqq p<\infty$

(21) $\quad \|Lf\|_p \leqq c_p(\|Bf\|_p+\|Bf^{\vee}\|_p)$ pour $f\in\underline{\underline{C}}_c^{\infty}$

où $f^{\vee}$ désigne, comme d'habitude, la symétrique de f par rapport à O. La démonstration est semblable à celle du th.1, mais utilise l'inégalité de L-P de l'exposé III, p.9 (formule (24)). Si cette conjecture était vraie, on pourrait retrouver, par exemple, les transformées de RIESZ relatives à l'équation de la chaleur (th. de JONES) et bien d'autres multiplicateurs intéressants.