Paul-André Meyer

Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood-Paley. Exposé III : les inégalités générales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 10 (1976), p. 164-174

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__164_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1974/75

DEMONSTRATION PROBABILISTE DE CERTAINES INEGALITES DE LITTLEWOOD-PALEY

(P.A. Meyer)

EXPOSE III : LES INEGALITES GENERALES

Nous reprenons ici les notations et les hypothèses du paragraphe II de l'exposé précédent : semi-groupe markovien (P_t) sur E, mesure invariante ξ , semi-groupe adjoint (P_t^*) ; prolongement à $\hat{E}^+=E\times\mathbb{R}_+$ d'une fonction f sur E par la formule

(1) $$f(x,t) = Q_t(x,f)$$

où (Q_t) est le semi-groupe de Cauchy associé à (P_t) ($Q_t=\int_0^\infty P_s\mu_t(ds)$, formule (7) de l'exposé I). Processus $(B_t)=(Y_t,Z_t)$, martingale $M_t=f(B_{t\wedge T_0})$. Nous avons vu dans l'exposé II, que

- Si (P_t) admet un opérateur carré du champ, il existe une fonction mesurable positive g sur $E\times\mathbb{R}_+$ telle que

(2) $$\langle M,M\rangle_t = 2\int_0^{t\wedge T_0} g(B_s)ds$$

- Dans tous les cas, la projection de la martingale M sur la martingale Z est continue , et égale à

(3) $$M_t^{\rightarrow} = \int_0^{t\wedge T_0} D_{\rightarrow}f(Y_s,Z_s)dZ_s$$

de sorte que l'on a <u>dans tous les cas</u>, en posant $g^{\rightarrow}(x,t)= (D_t f(x,t))^2$

(4) $$\langle M^c,M^c\rangle_t \geqq 2\int_0^{t\wedge T_0} g^{\rightarrow}(B_s)ds .$$

Nous introduisons maintenant les mêmes fonctions de LITTLEWOOD-PALEY que dans l'exposé I :

(5^1) $$G_f(x) = [\int_0^\infty tg(x,t)dt]^{1/2}$$

(5^2) $$K_f(x) = [\int_0^\infty t(Q_t^*(x,\sqrt{g(.,t)})^2dt]^{1/2}$$

(5^3) $$H_f(x) = [\int_0^\infty tQ_t^*(x,g(.,t))dt]^{1/2}$$

et les trois fonctions $G_f^{\rightarrow},H_f^{\rightarrow}, K_f^{\rightarrow}$ obtenues en remplaçant partout g par $g^{\rightarrow}$. Nous allons adapter les méthodes de l'exposé I et prouver pour ces fonctions des inégalités de LITTLEWOOD-PALEY .

Malheureusement, il y a un grand nombre d'inégalités, et il est plus difficile d'en saisir l'ensemble que dans le cas classique. Il y a quatre types d'hypothèses qui interviennent :

- (P_t) admet un opérateur carré du champ.
- (P_t) est symétrique.
- (P_t) est un semi-groupe de convolution symétrique.
- (P_t) est une diffusion (Nous prenons cela au sens suivant : toutes les martingales pour les mesures P^μ sont continues . Cette propriété est bien connue pour le mouvement brownien et le processus de la chaleur ; ici, ce sera une définition).

RELATIONS ENTRE LES FONCTIONS DE L-P.

PROPOSITION 1. Dans tous les cas, on a[1]

(6) $$K_f \leqq H_f \quad , \quad \vec{K_f} \leqq \vec{H_f}$$

(7) $$\|H_f\|_p \leqq c_p\|G_f\|_p \quad , \quad \|\vec{H_f}\|_p \leqq c_p\|\vec{G_f}\|_p \qquad \text{pour } p\geqq 2$$

(8) $$\|K_f\|_p \leqq c_p\|G_f\|_p \quad , \quad \|\vec{K_f}\|_p \leqq c_p\|\vec{G_f}\|_p \qquad \text{pour } p\geqq 1$$

Dans le cas des semi-groupes symétriques, on a en sens inverse

(9) $$\vec{G_f} \leqq 2\vec{K_f}$$

et, si le semi-groupe est de convolution symétrique

(10) $$G_f \leqq 2K_f \text{ .}$$

DEMONSTRATION. (6) est une application de l'inégalité de Schwarz : $(Q_t^*(\sqrt{g_t}))^2 \leqq Q_t^*(g_t)$.

L'inégalité (9) est aussi une inégalité de convexité : posons $\delta_t = D_{\rightarrow} f_t$. Alors $Q_t\delta_s=\delta_{t+s}$, donc $|\delta_{t+s}|\leqq Q_t|\delta_s|$, et comme le semi-groupe est symétrique, cela s'écrit aussi $Q_t^*(\sqrt{\vec{g_s}}\,)\geqq\sqrt{\vec{g}_{t+s}}$. Prenant t=s, il vient

$$(\vec{K_f})^2 \geqq \int_0^\infty t\vec{g}(.,2t)dt \;=\; 4(\vec{G_f})^2$$

Dans le cas des semi-groupes de convolution symétrique, c'est la fonction $\sqrt{g}$ toute entière qui est sousharmonique (exposé II, formules (23) à (25)), d'où (10) par le même raisonnement.

Passons à (7). Sur l'espace des fonctions mesurables bornées a(x,t) sur $E\times\mathbb{R}_+$, introduisons l'opérateur linéaire L ainsi défini

$$La(x,t) = Q_t^*(x,a(.,t))$$

1. Une inégalité concernant H,K ou G, sans $\rightarrow$, suppose implicitement que (P_t) admet un opérateur carré du champ, tandis que les inégalités avec $\rightarrow$ ne le supposent pas.

Soit λ la mesure tdt sur $\mathbb{R}_+$; munissons l'espace de la norme $L^{p/2}(L^1(\lambda))$ (rappelons qu'ici, on suppose $p \geqq 2$)

$$\|a\|_{p/2,1} = [\, \int \xi(dx)(\int_0^{\infty} t|a(x,t)|dt)^{p/2}]^{2/p}$$

$L^{p/2}(L^1)$ est en dualité avec $L^{q'}(L^{\infty})$, où $q' = \frac{2}{2-p}$ est l'exposant conjugué de $p/2$. Nous en désignerons par B la boule unité, formée des fonctions $b(x,t)$ telles que

$$\|b\|_{q',\infty} = \|b^{\circ}\|_{L^{q'}(\xi)} \leqq 1 \ , \quad \text{où} \quad b^{\circ}(x) = \sup_t |b(x,t)|$$

Nous allons montrer que $\|La\|_{p/2,1} \leqq c_p\|a\|_{p,1}$ - et cela nous donnera (7) en prenant $a(x,t)=g(x,t)$. Pour voir cela, nous pouvons supposer a positive, donc La positive, et alors - en désignant par B_+ la partie positive de B

$$\|a\| = \sup_{b \in B_+} \int \xi(dx)\int_0^{\infty} ta(x,t)b(x,t)dt$$

donc

$$\|La\| = \sup_b \int \xi(dx)\int tQ_t^*(x,a_t)b(x,t)dt = \sup_b \int \xi(dx)\int ta(x,t)Q_t(x,b_t)dt$$

$$\leqq \sup_b \int \xi(dx)\int ta(x,t)Q_t(x,b^{\circ})dt$$

$$= \sup_b \int \xi(dx)\int ta(x,t)b^{\circ}(x,t)dt$$

où b° désigne comme d'habitude aussi le prolongement harmonique de la fonction b° définie sur le bord, à $E\times\mathbb{R}_+$. Nous allons voir dans un instant (lemme 1) que

$$\| \sup_t b^{\circ}(.,t)\|_{L^{q'}} \leqq c\|b^{\circ}\|_{L^{q'}} \quad (\text{ noter que } 1<q'\leqq+\infty)$$

ce qui se lit aussi $\|b^{\circ}\|_{q',\infty} \leqq c\|b^{\circ}\|_{L^{q'}} = c\|b\|_{q',\infty} \leqq c$ puisque $b \in B_+$.

On a alors

$$\int \xi(dx)\int ta(x,t)b^{\circ}(x,t) = \langle a,b^{\circ}\rangle \leqq \|a\|_{p/2,1}\|b^{\circ}\|_{q',\infty} \leqq c\|a\|_{p/2,1}$$

d'où en passant au sup $\|La\| \leqq c\|a\|$, ce qu'on cherchait.

Pour établir (8), on procède de même, mais en munissant l'espace de la norme de $L^p(L^2(\lambda))$

$$\|a\|_{p,2} = [\, \int \xi(dx)(\int t|a(x,t)|^2dt)^{1/2}]^{1/p}$$

Comme dans la démonstration précédente, il suffit de démontrer que $\|La\|_{p,2} \leqq c_p\|a\|_{p/2}$ pour $1<p<\infty$, et d'appliquer cela à $a(x,t)=\sqrt{g(x,t)}$. Or cette inégalité est déjà connue pour $p \geqq 2$, car c'est l'inégalité déjà vue pour les normes $\| \ \|_{p/2,1}$, appliquée à la fonction $a^2(x,t)$. Pour passer de l'autre côté de 2, on remarque que le dual de $L^p(L^2)$ est $L^q(L^2)$, où q est l'exposant conjugué de p, et que le transposé de L est l'opérateur analogue L^* relatif à Q_t^* . Le résultat précédent dit alors (comme $q\geqq 2$) que L^* est borné, et on a le même résultat pour L par dualité.

Etablissons maintenant (avec des notations un peu différentes) le lemme qui a été utilisé dans la démonstration. Il provient de STEIN [2] (bibl. exposé I), et il présente de l'intérêt par lui même.

LEMME . <u>Soit</u> f <u>une fonction sur</u> E, f(x,t) <u>son prolongement harmonique</u>, <u>et</u> $f^*(x) = \sup_t |f(x,t)|$. <u>Alors</u>

(11) $$\|f^*\|_p \leqq c_p\|f\|_p \qquad (1<p\leqq\infty)$$

DEMONSTRATION. On peut supposer f positive, et écrire

$$Q_tf = a\int_0^\infty te^{-t^2/4s}\, s^{-3/2}P_sf\, ds$$
$$= a\int_0^\infty te^{-t^2/4s}s^{-3/2}\left(\frac{d}{ds}\int_0^s P_ufdu\right) ds$$

soit $C_sf = \frac{1}{s}\int_0^s P_ufdu$. Le lemme ergodique maximal nous dit d'abord que $C_s(f)$ est borné si $s\to\infty$, donc on peut intégrer par parties

$$Q_tf = at\int_0^\infty sC_sf\, \frac{d}{ds}(s^{-3/2}e^{-t^2/4s})ds$$

Le lemme ergodique maximal nous dit ensuite que $\sup_s C_sf = f^\times$ est tel que $\|f^\times\|_p \leqq c_p\|f\|_p$. Il nous reste donc seulement à voir si

$$t\int_0^\infty s\left|\frac{d}{ds}(s^{-3/2}e^{-t^2/4s})\right|ds$$

est uniformément borné en t . Posant $s=ut^2$ on voit apparaître

$$t\int_0^\infty ut^2.t^{-2}\left|\frac{d}{du}[(ut^2)^{-3/2}e^{-1/4u}]\right| t^2du = \int_0^\infty u\left|\frac{d}{du}(u^{-3/2}e^{-1/4u})\right|du$$

quantité finie, indépendante de t. Le lemme est établi.

INEGALITES DE L-P : MAJORATION, $p\geqq 2$

Nous procédons comme dans l'exposé I : majoration des fonctions de L-P , en séparant les cas $p\geqq 2$ et $p\leqq 2$ (celui-ci moins complet que dans le cas classique) ; égalité dans L^2 (cas symétrique seulement), puis minoration des fonctions de L-P par dualité.

Pour ce qui est de la première inégalité, il n'y a <u>pas un mot</u> à changer à la démonstration de l'exposé I, p.10.

INEGALITE I. <u>Si</u> $2\leqq p<\infty$, <u>et si</u> (P_t) <u>admet un opérateur carré du champ</u>, <u>on a</u>

(12) $$\|H_f\|_p \leqq c_p\|f\|_p$$

<u>et</u> $\|\vec{H}_f\|_p\leqq c_p\|f\|_p$ <u>même sans opérateur carré du champ</u>.

INEGALITES DE L-P : MAJORATION, $p\leqq 2$

Ici, les inégalités sont incomplètes, sauf dans le cas des diffusions (martingales continues). Peut être qu'une étude plus approfondie de la formule du changement de variables donnerait quelque chose ? Dans l'exposé IV, heureusement, nous arriverons à nous passer des inégalités manquantes.

INEGALITE II. Si $1<p\leqq 2$ on a

(13) $$\|K_f^{\rightarrow}\|_p \leqq c_p\|f\|_p \quad \text{(inégalité analogue pour } G_f^{\rightarrow} \text{)}$$

si (P_t) admet un opérateur carré du champ et est une diffusion, on a

(14) $$\|K_f\|_p \leqq c_p\|f\|_p \quad \text{(inégalité analogue pour } G_f \text{)}$$

DEMONSTRATION. Compte tenu de (8), nous pouvons démontrer les inégalités analogues, mais relatives à $G_f^{\rightarrow}$ ou G_f , qui sont un peu plus fortes. Cela fait une variante intéressante de la démonstration de l'exposé I, qui était relative à K_f .

Nous désignons par h la fonction positive $p(p-1)f^{p-2}g^{\rightarrow}$ dans le cas général, la fonction $p(p-1)f^{p-2}g$ dans le cas des diffusions, et par $I(x)$, $J(x)$ les fonctions sur E $\int_0^\infty ah(x,a)da$, $\int_0^\infty aQ_a^*(x,h_a)da$ respectivement, et nous prouvons , comme dans le lemme 2^0, p.11 de l'exposé I

(15) $$\|f\|_p^p \geqq \int I(x)\xi(dx) = \int_E J(x)\xi(dx)$$

Nous appliquons la formule d'ITO à la fonction deux fois différentiable $F(u)=(u+\varepsilon)^p$ sur $\mathbb{R}_+$, et à la martingale (M_t) - comme dans l'exposé I, on peut se ramener au cas où f est positive. Il vient

$$F(M_t)=F(M_0) + \int_0^t F'(M_{s-})dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(M_s)d\langle M^c,M^c\rangle_s$$
$$+ \Sigma_{s\leqq t}(F(M_s)-F(M_{s-})-F'(M_{s-})(M_s-M_{s-}))$$

Dans le cas des diffusions, le terme Σ_s est nul, et $d\langle M^c,M^c\rangle_s = 2g(B_s)ds$. Dans le cas général, le terme Σ_s est positif (car F est convexe) et la formule (3) nous dit que M^c est la somme de $M_t^{\rightarrow}$ et d'une martingale orthogonale à Z, donc $d\langle M^c,M^c\rangle_s \geq 2g^{\rightarrow}(B_s)ds$. Prenant une espérance, puis faisant tendre ε vers 0, puis intégrant par rapport à ξ_N, puis faisant tendre N vers $+\infty$, nous obtenons l'inégalité cherchée comme dans l'exposé I.

Plaçons nous par exemple dans le cas des diffusions, et démontrons (14). La démonstration - due à STEIN - est un peu plus simple que dans l'exposé I : nous écrivons que $g=cf^{2-p}h$, donc

$$G_f^2(x)= \int_0^\infty tg(x,t)dt \;\leqq c(f^*(x))^{2-p}I(x)$$

après quoi nous appliquons (11), (15) et l'inégalité de Hölder comme dans l'exposé I. Il n'y a aucun mystère.

L'EGALITE DANS L^2

Nous rencontrons ici une petite difficulté. Supposons par exemple que la mesure ξ soit bornée, de sorte que la fonction 1 appartient à L^p. La martingale M correspondante étant constante, toutes les fonctions de LITTLEWOOD-PALEY de 1 sont nulles, et on ne saurait minorer $\|f\|_p$ au moyen de leurs normes.

Soit $f\in L^p$ $(1<p<\infty)$. On sait d'après le théorème ergodique que $\frac{1}{t}\int_0^t P_s f ds$ converge p.p. et dans L^p vers une fonction invariante f_∞ (la convergence est même dominée dans L^p). Il résulte alors de la démonstration du premier lemme de cet exposé que $Q_t f$, qui est une moyenne des moyennes de Cesaro de (P_t), converge aussi vers f_∞ p.p. et dans L^p . Il est sous-entendu dans toutes les minorations qui suivent que les fonctions f considérées sont telles que $f_\infty=0$. Dans le cas du mouvement brownien sur $\mathbb{R}^n$, par exemple, c'est le cas de toutes les fonctions de L^p : on a en effet $f_\infty=0$ pour $f\in\underline{\underline{S}}$, et $\underline{\underline{S}}$ est dense dans L^p.
Cette restriction étant faite, nous montrons

(16) $\|f\|_2^2 = 2\|G_f\|_2^2$ (démonstration identique à celle de l'exposé I, p.10)

et surtout, dans le cas symétrique (sans opérateur carré du champ)

(17) $\|f\|_2^2 = 4\|G_f^{\rightarrow}\|_2^2$

Pour prouver cela, nous suivons STEIN, en introduisant la décomposition spectrale associée au générateur A dans L^2

$$-A = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda \quad (E_{0-}=0 \text{ , mais il peut y avoir un saut en } 0 \text{)}$$

d'où pour les deux semi-groupes

$$P_t = \int_0^\infty e^{-t\lambda}\, dE_\lambda \quad , \quad Q_t = \int_0^\infty e^{-t\sqrt{\lambda}}\, dE_\lambda$$

$$D_t Q_t = -\int_0^\infty e^{-t\sqrt{\lambda}}\sqrt{\lambda}\, dE_\lambda$$

Si $f\in L^2$, on a alors

$$\|G_f^{\rightarrow}\|_2^2 = \int_0^\infty t dt\ \|D_t Q_t f\|_2^2 = \int_0^\infty t dt \int_0^\infty e^{-2t\sqrt{\lambda}}\lambda\, d\langle E_\lambda f,f\rangle$$

On intervertit les intégrations

$$\int_0^\infty d\langle E_\lambda f,f\rangle \int_0^\infty t\sqrt{\lambda}\ e^{-2t\sqrt{\lambda}}\ \sqrt{\lambda}dt$$

Cette dernière intégrale vaut 0 si $\lambda=0$, 1/4 si $\lambda>0$. Il reste donc $\frac{1}{4}\int_{0+}^\infty d\langle E_\lambda f,f\rangle$, ce qui est $\frac{1}{4}\|f\|_2^2$ si $f_\infty=0$.

DIGRESSION SUR L'EGALITE DANS L^2

Le point fondamental est ici "l'équipartition" de $\|G_f\|_2^2$ en un terme horizontal $\|G_f^{\rightarrow}\|_2^2$ et un terme vertical $\|G_f^{\uparrow}\|_2^2$. Peut on comprendre cela un peu mieux que par l'emploi de la décomposition spectrale ? Nous allons esquisser ici une démonstration directe (utilisant l'existence d'un opérateur carré du champ) qui éclaire parfaitement le rôle joué par la symétrie.

Nous avons $\|G_f\|_2^2 = \|G_f^{\rightarrow}\|_2^2 + \|G_f^{\uparrow}\|_2^2$ avec (exposé II, th.4)

$\|G_f^{\rightarrow}\|_2^2 = \int \xi(dx)\int t(D_{\rightarrow}f(x,t))^2 dt$

$\|G_f^{\uparrow}\|_2^2 = \int \xi(dx)\int t\Gamma_x(f_t,f_t)dt$

Pourquoi ces termes sont ils égaux ? Simplement parce qu'on a, pour tout $t>0$

(18) $$\int \xi(dx)(D_{\rightarrow}f(x,t))^2 = \int \xi(dx)\Gamma_x(f_t,f_t)$$

En effet, $D_t f(.,t) = Bf_t$, et $f_t = Q_t f$ appartient, pour $t>0$, à $\underline{\underline{D}}_{L^2}(A)$ (appendice de l'exposé II). La formule se ramène donc à

$$\int \xi(dx)(Bh(x))^2 = \int \xi(dx)\Gamma_{\bullet}(h,h) \qquad \text{si } h\in\underline{\underline{D}}_{L^2}(A)$$

et ceci n'est rien d'autre que la formule (46) de l'appendice de l' exposé II, où la symétrie intervient à la dernière ligne pour dire que $<\xi,(Bh)^2> = <Bh,Bh> = <B^2h,h>$.

LES MINORATIONS

INEGALITE III. <u>Dans le cas symétrique</u>, <u>on a pour tout</u> p, $1<p<\infty$ (s'il n'y a pas de fonction invariante dans $L^2(\xi)$)

(19) $$c_p\|f\|_p \leqq \|G_f^{\rightarrow}\|_p \quad (\|K_f^{\rightarrow}\|_p, \|H_f^{\rightarrow}\|_p , \|P_f^{\rightarrow}\|_p) \quad \underline{\text{pour}}\ f\in L^2$$

La dernière fonction est une fonction parabolique (exposé I, (8^3)). Rappelons que STEIN montre que $\|P_f^{\rightarrow}\|_p \leqq c_p\|f\|_p$ dans le cas symétrique, résultat plus difficile que tous ceux que nous présentons ici.

DEMONSTRATION. Dans le cas symétrique, on a $G_f^{\rightarrow} \leqq 2K_f^{\rightarrow} \leqq 2H_f^{\rightarrow}$ (6) et (9) et $G_f^{\rightarrow} \leqq cP_f^{\rightarrow}$ (exposé I, formule (26)). Il suffit donc de démontrer la première inégalité. D'autre part, on a $\|G_f^{\rightarrow}\|_p \leqq c_p\|f\|_p$, d'après les inégalités rappelées ci-dessus et (12), (13). On procède alors comme dans l'exposé I, p.4, étape 4.

INEGALITES COMPLEMENTAIRES : CAS NON SYMETRIQUE

Simplement pour être complets, nous indiquons une ou deux inégalités qui ne présentent sans doute pas d'intérêt, et nous recommandons de les omettre.

On peut se servir de l'égalité dans L^2 $\|f\|_2^2 = c\|G_f\|_2^2 = c\|H_f\|_2^2$ pour démontrer par dualité que pour $f \in L^2$

(20) $$c_p \|f\|_p \leqq \|H_f\|_p \quad 1<p\leqq 2$$

la polarisation est un peu délicate, et nous n'insisterons pas. Dans le cas des diffusions, on sait aussi dire quelque chose , pour $p\geqq 2$, par la méthode qui a servi dans la démonstration de (14). Esquissons cela On pose comme dans la démonstration de (14)

$$h = p(p-1)f^{p-2}g \quad , \ I(x)=\int_0^\infty ah(x,a)da \quad , \ J(x)=\int_0^\infty aQ_a^*(x,h_a)da$$

et on montre au moyen de la formule d'ITO que $\|f\|_p^p = \int I(x)\xi(dx) = \int J(x)\xi(dx)$ (comme $p\geqq 2$, $t\mapsto t^p$ est deux fois dérivable, et il n'est pas nécessaire de mettre d'$\varepsilon>0$. L'égalité vient du fait que la martingale est continue, et que $f_\infty=0$). On a alors

$$\|f\|_p^p = \int I(x)\xi(dx) = c\int\xi(dx)\int af_a^{p-2}g_a da \leqq c\int\xi(dx)(f^*(x))^{p-2}G_f^2(x)$$
$$\leqq c\|f^{*(p-2)}\|_{p/p-2}\|G_f^2\|_{p/2} \quad \text{(Hölder)}$$

et on conclut grâce à la formule (11) que

(21) $$\|f\|_p \leqq c_p\|G_f\|_p \quad (\text{ diffusions, } p\geqq 2)$$

INEGALITES COMPLEMENTAIRES : SEMI-GROUPES DE CONVOLUTION

Supposons pour commencer que le semi-groupe (P_t) soit <u>normal</u> , i.e. commute avec le semi-groupe adjoint (P_t^*) - c'est le cas des semi-groupes de convolution sur $\mathbb{R}^n$. Introduisons la fonction de L-P horizontale

(22) $$M_f(x) = \left[\int_0^\infty t(Q_t^*(x,D_tf(.,t))^2dt \right]^{1/2}$$

qui est encore un peu plus petite que la fonction $K_f^{\to}$, puis qu'il n'y a pas de signe $|\ |$ à l'intérieur du $Q_t^*(\ )$. Nous avons d'après la théorie générale (6),(12) et (13)), pour $1<p<\infty$

(23) $$\|M_f\|_p \leqq \|K_f^{\to}\|_p \leqq c_p\|f\|_p$$

Nous établissons une inégalité dans l'autre sens. Nous avons

$$\|[\int_0^\infty t(Q_t^*D_tQ_tf+Q_tD_tQ_t^*f)^2dt]^{1/2}\|_p$$
$$\leqq \|[\int_0^\infty t(Q_t^*D_tQ_tf)^2dt]^{1/2}+[\int_0^\infty t(Q_tD_tQ_t^*f)^2dt]^{1/2}\|_p$$
$$\leqq \|\ldots\|_p+\|\ldots\|_p = \|M_f\|_p + \|M_f^*\|_p$$

où M_f^* est la fonction analogue, relative au semi-groupe (Q_t^*). D'autre part, le premier membre n'est rien d'autre que la fonction parabolique horizontale $P_f^{\rightarrow}$ relative au semi-groupe de convolution symétrique $Q_tQ_t^*$. Si celui-ci n'admet pas de fonction invariante de carré intégrable, (19) nous dit que $\|f\|_p \leqq c_p\|P_f^{\rightarrow}\|_p$, et l'on a finalement pour $f\epsilon L^2$

(24) $$c_p\|M_f\|_p \leqq \|f\|_p \leqq c_p'(\|M_f\|_p+\|M_f^*\|_p)$$

En particulier , dans le cas des semi-groupes de convolution on a $M_f^* = (M_{f^\vee})^\vee$, où $^\vee$ est l'opération de symétrie par rapport à 0 (exposé II, formule (19)). On peut donc remplacer la symétrie du semi-groupe par une majoration portant sur la fonction f et sa symétrique $f^\vee$. Dans une rédaction antérieure, j'avais cru pouvoir en déduire des conséquences intéressantes, mais il n'en reste rien.

RECAPITULATION

La situation étant assez compliquée, nous voulons extraire de ce qui précède au moins un énoncé facile à retenir.

THEOREME. Supposons que (P_t) soit symétrique, et n'admette pas de fonctions invariantes de carré intégrable. Alors

(25) $$c_p\|G_f^{\rightarrow}\|_p \leqq \|f\|_p \leqq c_p'\|G_f^{\rightarrow}\|_p \qquad (f\epsilon L^2\ ,\ 1<p<\infty)$$

Si de plus (P_t) admet un opérateur carré du champ, on a

(26) $$c_p\|H_f\|_p \leqq \|f\|_p \leqq c_p'\|H_f\|_p \qquad (f\epsilon L^2,\ \ 2\leqq p<\infty)$$

Nous n'avons pas tout à fait établi les moitiés de gauche des inégalités pour $f\epsilon L^2$: nous avons travaillé tout du long avec des fonctions f bornées. Sans donner les détails, j'affirmerai simplement que tout marche bien, et que l'on peut soit transposer la démonstration au cas où $f\epsilon L^2$(ou $f\epsilon L^p$), soit - encore mieux - passer à la limite à partir du cas borné, en appliquant le lemme de Fatou.

L'hypothèse sur l'inexistence de fonctions invariantes de carré intégrable n'est pas essentielle . Si elle n'est pas satisfaite, il faut seulement restreindre les inégalités de droite aux $f\epsilon L^2$ dont la partie invariante est nulle.

Enfin, pour les diffusions symétriques, (26) s'étend à l'intervalle $]1,2[$, avec K_f au lieu de H_f .

REMARQUE. La fonction $G_f^{\rightarrow}$ est la fonction de L-P parabolique relative au semi-groupe (Q_t) . Les inégalités (25) sont donc un cas particulier des inégalités de STEIN [2] (cf. bibliogr. de l'exposé I), qui semblent échapper à la théorie des martingales. Finalement, l'apport de ces exposés se réduit donc à (26).

APPENDICE : LE CAS VECTORIEL

Soit (f_n) une suite de fonctions sur E ; nous désignons par f la suite (f_n), et nous convenons de poser

(27) $$\|f\|_p = \|(\Sigma_n f_n^2)^{1/2}\|_p$$

Il s'agit d'une norme dans l'espace $L^p(\ell^2)$. De même, associant à chaque f_n son prolongement harmonique, et les fonctions $g_n(x,t)$ et $g_n^{\rightarrow}(x,t)$ correspondantes, nous posons

(28) $$g(x,t) = \Sigma_n g_n(x,t) \quad , \quad g^{\rightarrow}(x,t) = \Sigma_n g_n^{\rightarrow}(x,t)$$

et nous définissons alors des fonctions de LITTLEWOOD-PALEY que nous notons $G_f, H_f, K_f, G_f^{\rightarrow}$, etc. Par exemple

(29) $$H_f(x) = [\int_0^{\infty} tQ_t^*(x,g(.,t))dt]^{1/2}$$

On a des notions parallèles pour les martingales : notons (M_t) une suite de martingales de carré intégrable $(M_t^1, M_t^2 \ldots)$ et convenons de poser

(30) $$\|M_\infty\|_p = \|(\Sigma (M_\infty^n)^2)^{1/2}\|_p \ , \quad \langle M,M\rangle_t = \Sigma_n \langle M^n,M^n\rangle_t$$

De sorte que, lorsque les v.a. $\|M_t\|^2 = \Sigma_n (M_t^n)^2$ sont intégrables, le processus croissant prévisible $\langle M,M\rangle$ est celui qui apparaît dans la décomposition de la sousmartingale $\|M_t\|^2$. Il n'y a aucune difficulté à étendre à cette situation les inégalités de martingales dont nous nous sommes servis. Par exemple,

$$\|M_\infty\|_p \geqq c_p \|\langle M,M\rangle_\infty^{1/2}\|_p \quad \text{si } p \geqq 2$$

est une simple inégalité relative à la sousmartingale réelle $\|M_t\|^2$ et au processus croissant prévisible associé $\langle M,M\rangle$, pour l'exposant p/2 $\geqq 1$ (voir par exemple le séminaire II, p.166 - mais ce n'est pas la meilleure démonstration !). De même, la formule

$$E[\|M_t\|^p] \geqq E[\|M_0\|^p] + E[p(p-1)\int_0^t \|M_s\|^{p-2} d\langle M^c, M^c\rangle_s \ ] \quad (p>1)$$

se démontre aisément par passage à la limite à partir du cas des suites finies, où la formule d'ITO est encore applicable.