

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL WEIL

Surlois d'entrée

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 486-493

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__486_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SURLOIS D'ENTREE

par Michel WEIL

1. INTRODUCTION.-

D'habitude on construit un processus markovien de fonction de transition (P_t) à partir d'une loi d'entrée $(\lambda_t)_{t \geq 0}$. Nous voulons suivant T. LEVIATAN [2], faire une chose semblable mais à partir d'une surloi d'entrée $(\mu_s)_{s \geq 0}$ c'est-à-dire une famille de mesures finies telle que

$$\mu_{s+t} \geq \mu_s P_t \quad s \geq 0, t \geq 0.$$

Naturellement on ne retrouve pas les processus markoviens classiques mais les processus de HELMS [1], processus auxquels on injecte de la masse au fur et à mesure, et dont l'évolution est markovienne.

2. THEOREME DE T. LEVIATAN.

L'espace des états des processus est un espace localement compact à base dénombrable E , muni de sa tribu borélienne $\mathcal{E}$. A E nous adjoindrons deux points :

- le point delta : ∂ qui sera soit un point isolé si E est compact, soit le point à l'infini dans le cas contraire.
- le point atled : δ , point isolé différent de ∂ .

Nous poserons

$$\tilde{E} = E \cup \{\delta\} \cup \{\partial\}$$

$$E_\delta = E \cup \{\delta\},$$

et les tribus boréliennes correspondantes seront notées $\tilde{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E}_\delta$.

Sur E nous nous donnons un semi-groupe sous markovien $(P_t)_{t \geq 0}$, rendu markovien au moyen du point ∂ et de la manière usuelle.

Introduisons les définitions :

SURLOI D'ENTREE.- C'est une famille $(\mu_t)_{t \geq 0}$ de mesures finies sur E_δ et telle que

$$\mu_{s+t} \geq \mu_s P_t \quad s \geq 0, t \geq 0.$$

PROCESSUS A CREATION ET ANNIHILATION (ou de HELMS).- C'est un processus stochastique $(Y_t, \mathcal{G}_t, t \geq 0)$ sur un espace de mesure σ -finie $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{G}}, \tilde{P})$, à valeurs dans $\tilde{E}$ et tel que

1 a) ∂ est un point cimetière :

$$Y_t(w) = \partial \Rightarrow Y_s(w) = \partial \text{ pour } s \geq t, w \in \tilde{\Omega}.$$

1 b) ∂ est un point de maternité :

$$Y_t(w) = \partial \Rightarrow Y_s(w) = \partial \text{ pour } s \leq t, w \in \tilde{\Omega}.$$

2) L'évolution des processus est (P_t) -markovienne : pour toute fonction $\tilde{\mathcal{E}}$ -borélienne, nulle sur $\{\partial\}$ on a

$$\tilde{E}[f \circ Y_{s+t} | \mathcal{G}_t] = P_s f \circ Y_t \quad \tilde{P}\text{-p.s. sur } \{Y_t \in E_\partial\}.$$

Remarquons que si l'on a un tel processus alors forcément la famille de mesures sur $\mathcal{E}_\partial : A \mapsto \mu_s(A) = \tilde{P}\{Y_s \in A\}$, $s \geq 0$, est une surloi d'entrée. En effet

$$\begin{aligned} \mu_{s+t}(\cdot) &= \tilde{P}\{Y_{s+t} \in \cdot\} \geq \tilde{P}\{Y_s \in E_\partial, Y_{s+t} \in \cdot\} \\ &= \int_{\{Y_s \in E_\partial\}} \tilde{P}\{Y_{s+t} \in \cdot \mid Y_s \in E_\partial\} d\tilde{P} \\ &= \mu_s P_t(\cdot). \end{aligned}$$

Inversement on a le très beau théorème de T. LEVIATAN :

THEOREME.- Soient $(P_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe sous markovien sur E et $(\mu_t)_{t \geq 0}$ une surloi d'entrée pour (P_t) . Alors il existe un processus à création et à annihilation $(X_t, \mathcal{F}_t^o, t \geq 0)$ sur un espace de mesure σ -finie $(\Omega, \mathcal{F}^o, \tilde{P})$ dont la fonction de transition est $(P_t)_{t \geq 0}$ et tel que

$$\tilde{E}[f \circ X_t] = \mu_t f$$

pour toute fonction borélienne sur $\tilde{E}$, nulle sur $\{\partial\}$.

DEMONSTRATION.- La démonstration de T. Léviatan consiste en gros à suivre la preuve classique de construction de processus de Markov. Elle introduit un système projectif un peu plus compliqué et qui probabilistiquement, s'interprète très bien.

On désignera par $\mathfrak{J}$ l'ensemble de suites :

$$\mathfrak{J} = \{(t_1, \dots, t_n) : 0 < t_1 < \dots < t_n < \infty, n \geq 1, t_i \in \mathbb{R}_+, 1 \leq i \leq n\}.$$

Notations : si $\tau = (t_1, \dots, t_n) \in \mathfrak{J}$ on posera $\tau_k = (t_k, \dots, t_n)$. On notera $\tilde{E}^\tau$ (resp. $\tilde{\mathcal{E}}^\tau$) l'espace produit $E_1 \times \dots \times E_n$ (resp. la tribu produit).

On commencera par munir $(\tilde{E}^\tau, \tilde{\mathcal{E}}^\tau)$ d'une certaine mesure P_τ et l'on vérifiera ensuite que le système de mesure $(P_\tau)_{\tau \in \mathfrak{J}}$ est projectif.

Pour notre propos il y a quatre sortes de rectangles privilégiés dans $\tilde{\mathcal{E}}^\tau$:

1) Les rectangles qui "vivent" ou qui "ont vécu", i.e. de la forme

$$A_1 \times \dots \times A_n \quad A_i \in \mathcal{E}_\partial \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ils seront créés suivant la loi μ_{t_1} et évolueront ensuite suivant (P_t) , d'où leurs mesures :

$$(1) \quad P_\tau(A_1 \times \dots \times A_n) = \int_{A_1} \dots \int_{A_n} \mu_{t_1}(dy_1) P_{t_2-t_1}(y_1, dy_2) \dots P_{t_n-t_{n-1}}(y_{n-1}, dy_n).$$

2) Les rectangles qui ne "vivent" qu'à partir de l'instant t_k i.e. :

$$\{6\}_1 \times \dots \times \{6\}_{k-1} \times A_k \times \dots \times A_n \quad \text{où } A_i \in \mathcal{E}_\partial \quad \text{si } k \leq i \leq n.$$

La mesure de ces rectangles, vaudra $P_{\tau_k}\{A_k \times \dots \times A_n\}$ moins, "ce" qui aura vécu avant t_k :

$$(2) \quad P_\tau\{\{6\}_1 \times \dots \times \{6\}_{k-1} \times A_k \times \dots \times A_n\} = P_{\tau_k}\{A_k \times \dots \times A_n\} - P_{\tau_{k-1}}\{E_\partial \times A_k \times \dots \times A_n\}$$

3) Les rectangles qui "n'ont pas encore vécu". Pour des raisons analogues à celles de (2) on leur attribuera la valeur :

$$(3) \quad P_\tau\{\{6\}_1 \times \dots \times \{6\}_n\} = \lim_{t \uparrow \infty} \mu_t(E_\partial) - \mu_{t_n}\{E_\partial\}.$$

(Cette limite existe vu la propriété des surlois).

4) Enfin il existe des rectangles "aberrants", où l'on vit avant de naître, et leur mesure sera très simple :

$$(4) \quad P_\tau\{\dots \times A_k \times \{6\} \times \dots\} = 0 \quad \text{où } A_k \in \mathcal{E}_\partial \text{ pour un } k.$$

On vérifie grâce aux propriétés des surlois d'entrée que P_τ est une fonction positive sur ces rectangles. D'autre part cette fonction s'étend facilement à tous les rectangles élémentaires de $\tilde{\mathcal{E}}^\tau$, elle est σ -additive.

(5) Par le théorème de prolongement de Carathéodory P_τ s'étendra, alors, en une mesure σ -additive sur la tribu $\tilde{\mathcal{E}}^\tau$.

Il faut alors vérifier que le système $(\tilde{\mathcal{E}}^\tau, \tilde{\mathcal{E}}^\tau, P_\tau)_{\tau \in \mathfrak{J}}$ est projectif. Soit donc $\tau = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathfrak{J}$ et $(A_1 \times \dots \times A_n)$ un rectangle de $\tilde{\mathcal{E}}^\tau$. Supposons $A_j = \tilde{E}$ (où j est un entier fixé) et vérifions que le rectangle obtenu en supprimant A_j a même mesure que le rectangle original. Trois cas sont à considérer suivant que A_j est au début, au milieu, ou à la fin ; et dans chacun de ces cas il suffit d'envisager les quatre sortes de rectangles vus plus haut.

cas a : $j = 1, A_1 = \tilde{E}$.

Si $A_i \subset E_\partial$, $i \geq 2$, on a en utilisant (2), et en notant $\tau_2 = (t_2, \dots, t_n)$:

$$\begin{aligned}
P_{\tau} \{ \tilde{E} \times A_2 \times \dots \times A_n \} &= P_{\tau} \{ E_{\partial} \times A_2 \times \dots \times A_n \} + P_{\tau} \{ \{6\} \times A_2 \times \dots \times A_n \} \\
&= P_{\tau} \{ E_{\partial} \times A_2 \times \dots \times A_n \} + P_{\tau_2} \{ A_2 \times \dots \times A_n \} - P_{\tau} \{ E_{\partial} \times A_2 \times \dots \times A_n \} \\
&= P_{\tau_2} \{ A_2 \times \dots \times A_n \} .
\end{aligned}$$

S'il existe un $i \geq 2$ tel que $A_i = \{\partial\}$ on aboutit à la même conclusion en utilisant les équations (3) et (4) .

cas b : $1 < j < n$: c'est soit le cas classique de la construction des processus de Markov , soit un cas tout à fait trivial .

cas c : $j = n$, $A_n = \tilde{E}$.

Alors ou bien $A_{n-1} \subset E_{\partial}$ et le résultat est évident : soit grâce aux équations (2) , (3) et (4) , soit de la manière classique grâce à la propriété de semi-groupe de (P_t) ,

ou bien $A_{n-1} = \{6\}$ et dans ce cas :

$$P_{\tau} \{ A_1 \times \dots \times \{6\} \times \tilde{E} \} = P_{\tau} \{ A_1 \times \dots \times \{6\} \times E_{\partial} \} + P_{\tau} \{ A_1 \times \dots \times \{6\} \times \{6\} \} .$$

Deux choses peuvent se produire : ou tous les A_i valent $\{6\}$, $1 \leq i \leq n-1$ et par (2) et (3) on aura

$$\begin{aligned}
P_{\tau} \{ A_1 \times \dots \times \{6\} \times \tilde{E} \} &= P_{\tau_n} \{ E_{\partial} \} - P_{\tau_{n-1}} \{ E_{\partial} \times E_{\partial} \} + \lim_{t \uparrow \infty} \mu_t(E_{\partial}) - \mu_{t_n}(E_{\partial}) \\
&= \mu_{t_n}(E_{\partial}) - \mu_{t_{n-1}}(E_{\partial}) + \lim_{t \uparrow \infty} \mu_t(E_{\partial}) - \mu_{t_n}(E_{\partial}) \\
&= P_{(t_1, \dots, t_{n-1})} \{ A_1 \times \dots \times \{6\} \} ;
\end{aligned}$$

ou bien il y a un $i < n-1$ tel que $A_i \subset E_{\partial}$ et alors

$$P_{\tau} \{ A_1 \times \dots \times \{6\} \times \tilde{E} \} = 0 = P_{(t_1, \dots, t_{n-1})} \{ A_1 \times \dots \times A_i \times \dots \times \{6\} \} .$$

Ceci prouve que le système $(\tilde{E}^{\tau}, \tilde{E}^{\tau}, P_{\tau}, \tau \in \mathfrak{J})$ est projectif . Il reste à montrer que la limite projective des mesures (P_{τ}) existe et a les bonnes propriétés .

EXISTENCE DE LA LIMITE PROJECTIVE.- Si l'on suppose que

(6) $\lim_{t \uparrow \infty} \mu_t(E_{\partial}) < \infty$, alors les P_{τ} sont des mesures finies sur un compact

et l'existence de la limite mesure projective sur $\tilde{E}^{\mathbb{R}^+}$, notée $\tilde{P}$, est bien connue .

Lorsque l'hypothèse (6) n'est pas vérifiée , on procède ainsi : soit $c \geq 0$ et $(\mu_t^c)_{t \geq 0}$ la nouvelle surloi d'entrée

$$\mu_t^c = \begin{cases} \mu_c & \text{si } t \leq c \\ \mu_c P_{t-c} & \text{si } t > c \end{cases} .$$

(Elle correspond à une création de masse seulement jusqu'à l'instant c) .

Cette surloi vérifie précisément (6) : en effet

$$\lim_{t \uparrow \infty} \mu_t^c(E_\partial) = \lim_{t \uparrow \infty} \mu_c P_{t-c}(E_\partial) \leq \mu_c(E_\partial) < \infty.$$

Notons alors par P_τ^c les mesures introduites en (5) et correspondant à la surloi d'entrée (μ_t^c) . La limite projective $\lim_{\tau \leftarrow} P_\tau^c = \tilde{P}^c$ existe sur $\mathcal{U}_1 = \tilde{E}^{\mathbb{R}^+}$. Or

PROPOSITION 1.- Les mesures $\tilde{P}^c$ sont des fonctions croissantes de c .

PREUVE de la proposition : C'est d'abord vrai pour les mesures de la surloi (μ_t^c) : si $t > 0$ et $0 < c_1 < c_2$ on a

$$\begin{aligned} t \leq c_1 & \quad \mu_t^{c_1} = \mu_t = \mu_t^{c_2} \\ c_1 < t \leq c_2 & \quad \mu_t^{c_1} = \mu_{c_1} P_{t-c_1} \leq \mu_t = \mu_t^{c_2} \\ c_2 < t & \quad \mu_t^{c_1} = \mu_{c_1} P_{t-c_1} = \mu_{c_1} P_{c_2-c_1} P_{t-c_2} \leq \mu_{c_2} P_{t-c_2} = \mu_t^{c_2}. \end{aligned}$$

C'est ensuite vrai pour les mesures P_τ^c : cela résulte de ce qui précède immédiatement et des équations de construction (1), (2), (3) et (4).

Vérifions le par exemple sur l'équation (2). Avec les notations de (2) et en remplaçant μ par μ^c on a

$$P_\tau^c \{ \partial \times \dots \times \partial \times A_k \times \dots \times A_n \} = P_{\tau_k}^c \{ A_k \times \dots \times A_n \} - P_{\tau_{k-1}}^c \{ E_\partial \times A_k \times \dots \times A_n \}.$$

Un simple calcul, utilisant (1), montre que le 2^e membre vaut

$$\int \dots \int_{A_k A_n} \left(\mu_{t_k}^c - \mu_{t_{k-1}}^c P_{t_k - t_{k-1}} \right) (dy_k) P_{t_{k+1} - t_k}(y_k, dy_{k+1}) \dots P_{t_n - t_{n-1}}(y_{n-1}, dy_n)$$

qui est une fonction croissante de c d'après le lemme :

LEMME.- Pour s et t fixés, $s \leq t$, la mesure positive sur $(E_\partial, \mathcal{E}_\partial)$

$$v^c \equiv \mu_t^c - \mu_s^c P_{t-s}$$

est une fonction croissante de c .

PREUVE du lemme.- D'abord remarquons que

$$(7) \quad v^c \equiv \mu_t^c - \mu_s^c P_{t-s} = \begin{cases} 0 & \text{si } c < s \leq t \\ \mu_c P_{t-c} - \mu_s P_{t-s} & \text{si } s \leq c < t \\ \mu_t - \mu_s P_{t-s} & \text{si } s \leq t \leq c \end{cases}$$

Soit alors $c_1 < c_2$ et montrons le lemme d'après les positions de c_1, c_2, s, t sur la droite réelle.

1) Lorsque $c_1 \leq s \leq t$ la mesure v^{c_1} est nulle donc automatiquement $v^{c_1} \leq v^{c_2}$.

2) Pour $s \leq t \leq c_1 < c_2$ les deux mesures ν^{c_1} et ν^{c_2} sont égales .

3) Si $s \leq c_1 < c_2 \leq t$ on a $\mu_{c_1} \leq \mu_{c_2}$, puis $\mu_{c_1} P_{t-c_2} \leq \mu_{c_2} P_{t-c_2}$,

d'où $\mu_{c_1} P_{t-c_2} P_{c_2-c_1} \leq \mu_{c_2} P_{t-c_2}$ puisque $P_{c_2-c_1}$ est markovien , donc

$$(8) \quad \mu_{c_1} P_{t-c_1} \leq \mu_{c_2} P_{t-c_2} .$$

Or par l'équation (7) :

$$\nu^{c_1} = \mu_{c_1} P_{t-c_1} - \mu_s P_{t-s} \quad \text{et} \quad \nu^{c_2} = \mu_{c_2} P_{t-c_2} - \mu_s P_{t-s} .$$

Cela prouve, grâce à (8), que $\nu^{c_1} \leq \nu^{c_2}$.

4) Enfin si $s \leq c_1 \leq t \leq c_2$ on a , par l'équation (7)

$$\nu^{c_2} = \mu_t - \mu_s P_{t-s}$$

$$\nu^{c_1} = \mu_c P_{t-c_1} - \mu_s P_{t-s}$$

et la propriété caractéristique des surlois (μ_s) entraîne la conclusion .

De ce qui précède on conclut facilement la preuve de la proposition 1 .

Par conséquent la mesure

$$\tilde{P} = \lim_{\substack{c \uparrow \infty \\ c \in \mathbb{R}_+}} \tilde{P}^c$$

est bien définie sur $\Omega_1 = \tilde{E}^{\mathbb{R}_+}$, et on vérifie facilement que c'est effectivement la limite projective du système $(P_\tau, \tilde{E}^\tau, \tilde{\mathcal{E}}^\tau, \tau \in \mathcal{J})$.

Enfin l'on pose

$$\Omega = \{ \omega \in \Omega_1 : \omega(t) = \partial \Rightarrow \omega(s) = \partial \text{ } s \geq t \text{ et } \omega(r) = 6 \Rightarrow \omega(h) = 6 \text{ } h \leq r \}$$

$$X_t = \text{application coordonnée d'indice } t \text{ de } \Omega$$

$$\mathcal{F}_t^0 = \mathcal{I}(X_s, s \leq t)$$

$$\mathcal{F}^0 = \mathcal{I}(X_s, s \geq 0)$$

et il reste à prouver les propriétés annoncées :

La mesure $\tilde{P}$ restreinte à Ω est σ -finie : En effet, notons [6] la trajectoire $s \mapsto \{6\}$; on a d'une part

$$\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{X_i \in E_\partial\} \cup [6]$$

et d'autre part

$$\tilde{P}\{X_i \in E_\partial\} = \mu_i(E_\partial) < \infty$$

$$\tilde{P}\{[6]\} = \lim_{c \uparrow \infty} \tilde{P}^c\{[6]\} \leq \lim_{c \uparrow \infty} \lim_{i \uparrow \infty} \tilde{P}^c\{X_i = 6\}$$

$$\leq \lim_{c \uparrow \infty} \lim_{n \uparrow \infty} \left\{ \lim_{t \uparrow \infty} \mu_t^c(E_\partial) - \mu_n^c(E_\partial) \right\} = 0 .$$

Quant à la propriété de Markov elle résulte directement de la construction en (1), de la mesure $\tilde{P}$.

Ceci termine la preuve du théorème de T. Léviatan.

3. RELATIONS AVEC LES TRAVAUX DE HELMS.

Dans [1] Helms s'était donné un semi-groupe (P_t) markovien sur $E_\partial \times \mathcal{E}_\partial$ et une mesure de création $\Phi_x(ds, dy)$ sur $\mathfrak{M}_+ \otimes \mathcal{E}_\partial$ (où $\mathfrak{M}_+$ est la tribu borélienne sur $\mathbb{R}_+$) telle que

- 1) l'application $x \rightarrow \Phi_x$ de E dans $\mathbb{R}_+$ est $\mathcal{E}_\partial$ -mesurable.
- 2) si $A \in \mathcal{E}_\partial$ alors $\Phi_x([0, t[\times A) < \infty$ pour tout $t > 0$.
- 3) $\Phi_x(\{0\} \times A) = 0$.

La deuxième condition est pour éviter une explosion prématurée et $\Phi_x(ds, dy)$ représente la masse créée, à partir de $x \in E$, dans le temps ds au volume dy .

Posons avec Helms :

$$\mu_t^x(A) \equiv P_t(x, A) + \int_0^t \int_{E_\partial} P_{t-s}(y, A) \Phi_x(ds, dy) \quad A \in \mathcal{E}_\partial$$

(la notation μ_t^x n'a pas de relation avec la notation μ_t^c du § précédent).

Alors il est facile de voir que

- 1) $\{\mu_t^*(\cdot)\}_t$ est un semi-groupe sur-markovien sur $E_\partial \times \mathcal{E}_\partial$.
- 2) pour x fixé $(\mu_t^x)_{t \geq 0}$ est une surloi d'entrée pour le semi-groupe

$(P_t)_{t \geq 0}$. En effet d'une part les mesures sont finies :

$$\mu_t^x(E_\partial) = P_t(x, E_\partial) + \Phi_x([0, t[\times E_\partial) < \infty,$$

et d'autre part, si f est une fonction borélienne bornée sur E_∂ , on a

$$\mu_t^x f = P_t f^x + \int_0^t \int_{E_\partial} P_{t-r} f(y) \Phi_x(dr, dy)$$

d'où

$$\begin{aligned} \mu_s^x P_{t-s}(\cdot) &= P_s P_{t-s}(x, \cdot) + \int_0^s \int_{E_\partial} P_{s-r} P_{t-s}(y, \cdot) \Phi_x(dr, dy) \\ &\leq P_t(x, \cdot) + \int_0^t \int_{E_\partial} P_{t-r}(y, \cdot) \Phi_x(ds, dy) \\ &= \mu_t^x(\cdot). \end{aligned}$$

Le théorème de T. LEVIATAN entraîne alors l'existence d'une famille de processus créateurs et annihilateurs associée à (P_t) et à la création Φ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L.L. HELMS (1967) . Markov processes with creation of mass.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 7, 225-234 .
- [2] T. LEVIATAN (1973) . On Markov processes with random starting time.
The annals of Probability 1973 vol 1 n° 2 , 223-230 .