

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

KARL SIGMUND

Propriétés générales et exceptionnelles des états statistiques des systèmes dynamiques stables

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 294-304

[<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__294_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__294_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Propriétés générales et exceptionnelles des états statistiques de systèmes dynamiques stables

par Karl Sigmund (Göttingen)

I. Introduction

Les systèmes considérés en physique classique sont donnés par l'espace X des états, des fonctions $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ appelés observables, et un groupe T_t ($t \in \mathbb{R}$) de transformations de X gouvernant l'évolution du système.

En physique statistique ce cadre est modifié:

(a) Au lieu de X on considère l'espace $M(X)$ des probabilités sur X . Les éléments de $M(X)$ sont appelés les états statistiques: ils représentent ce que nous savons de la configuration du système. Les éléments de X , qu'on appelle états purs, forment un sous-ensemble de $M(X)$, celui des mesures ponctuelles. L'évolution de $M(X)$ est celle induite par T_t . On considère donc des systèmes ayant une dynamique déterministe et des configurations stochastiques.

(b) Le measurement d'une observable macroscopique f dans un état pur x (ou dans un état statistique μ) n'est pas un processus instantané, mais demande un certain temps T . Ce que l'on mesure n'est donc pas $f(x)$ (ou $\int f d\mu$), mais une moyenne temporelle $\frac{1}{T} \int_0^T f(T_t x) dt$ (ou $\frac{1}{T} \int_0^T (\int f dT_t \mu) dt$). On remplace ces quantités par leurs limites (pour $T \rightarrow \infty$), espérant qu'elles existent. Ceci veut dire qu'on considère les moyennes $\mu_T = \frac{1}{T} \int_0^T T_t \mu dt$, pour $\mu \in M(X)$, et leurs limites, qui, si elles existent, sont invariantes sous T_t . On appelle ces états invariants des états d'équilibre.

On s'intéresse donc aux descriptions des états d'équilibre et à l'évolution asymptotique des moyennes temporelles μ_T . Dans cet article, on se concentrera sur quelques classes de transformations structurellement stables et essaiera de décrire la situation générique.

Pour simplifier, on considérera au lieu du groupe de transformations $\{T_t: t \in \mathbb{R}\}$ le groupe $\{T^n: n \in \mathbb{Z}\}$. La moyenne temporelle $\frac{1}{T} \int_0^T T_t \mu dt$ sera donc remplacée par $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T^n \mu$.

II. Préliminaires

Soit X un espace compact avec une métrique d . Dénotons par $C(X)$ l'espace des fonctions continues sur X , par $B(X)$ l'espace des sous-ensembles boréliens, et par $M(X)$ l'espace des probabilités boréliennes sur X . Munissons $M(X)$ de la topologie faible: μ_n converge vers μ si et seulement si

$\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$ pour tout $f \in C(X)$. Alors $M(X)$ est compact et admet une métrique p (la métrique de Prohorov) définie par

$$p(\mu, \nu) = \inf \{ \varepsilon > 0 : \mu(A) \leq \nu(A^\varepsilon) + \varepsilon \text{ et } \nu(A) \leq \mu(A^\varepsilon) + \varepsilon \text{ pour tout } A \in B(X) \},$$

où $A^\varepsilon = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$. Pour $x \in X$ soit $\pi(x)$ la mesure ponctuelle définie par $\pi(x)(A) = 1$ si $x \in A$, $= 0$ si $x \notin A$. L'application $x \rightarrow \pi(x)$ est un homéomorphisme de X dans $M(X)$. $M(X)$ est convexe et les mesures ponctuelles sont exactement les points extrémaux de $M(X)$. Il s'ensuit que les combinaisons convexes de mesures ponctuelles (c'est à dire les mesures à support fini) sont denses dans $M(X)$.

Soit T un homéomorphisme de X sur soi-même. T induit un homéomorphisme de $M(X)$ sur soi-même, que l'on denote encore par T , défini par $T\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$ pour $A \in B(X)$. On a $T\pi(x) = \pi(Tx)$ pour $x \in X$.

Pour $\mu \in M(X)$ posons $\mu^N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T^n \mu$ et désignons par $V(\mu)$ l'ensemble des points d'accumulation de μ^N . Il est facile à voir que $V(\mu)$ est non-vide, fermé et connexe et que tout élément de $V(\mu)$ est T -invariant.

Soit $M_T(X)$ l'ensemble des probabilités T -invariantes. $M_T(X)$ est non-vide, compact et convexe. Si $T \neq \text{Id}$, $M_T(X)$ est rare dans $M(X)$. Il est bien connu que les points extrémaux de $M_T(X)$ sont exactement les mesures ergodiques, c'est à dire les $\mu \in M_T(X)$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^{-k}A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

pour $A, B \in B(X)$. On vérifie facilement que deux mesures ergodiques sont mutuellement singulières.

Si $\nu \in M(X)$ est absolument continue par rapport à $\mu \in M_T(X)$, et si μ est ergodique, alors $\nu^N \rightarrow \mu$. Si, par surcroît, μ est même fortement mélangeante, c'est à dire si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

pour $A, B \in \mathcal{B}(X)$, alors on a même $T^n \nu \rightarrow \mu$.

Si $M_T(X)$ consiste en un seul élément μ_0 , on dit que T est uniquement ergodique. Dans ce cas μ_0 est évidemment ergodique et l'on a $\mu^N \rightarrow \mu_0$ pour tout $\mu \in M(X)$.

Mais il arrive souvent que T ne soit pas uniquement ergodique. Quelles sont, dans ce cas, les propriétés des mesures invariantes, et quel est le comportement des moyennes temporelles ? Nous allons essayer de donner une réponse partielle en décrivant les propriétés 'typiques' des éléments de $M_T(X)$, et le comportement 'typique' des moyennes temporelles μ^N .

Mais que veut dire typique ? Si l'on connaissait une mesure 'raisonnable' sur $M(X)$, ou sur $M_T(X)$, on dirait que c'est une propriété valide presque partout, par rapport à cette mesure. Mais on n'en connaît pas. Cependant, $M(X)$ et $M_T(X)$ sont compacts et métriques, donc des espaces de Baire. Il est donc raisonnable de dire qu'une propriété est typique si elle est générique, c'est à dire si elle est valide pour un ensemble ouvert dense, ou pour une intersection dénombrable de tels ensembles, donc pour un G_δ dense. De même, une propriété sera considérée comme exceptionnelle si elle n'est valide que pour un ensemble maigre, c'est à dire un ensemble contenu dans une union dénombrable de fermés rares.

III. Un exemple

Soit $X = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ le tore à deux dimensions et T la transformation définie par la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$, qui transforme $(x_1, x_2) \in X$ dans $(2x_1 + x_2 \pmod{1}, x_1 + x_2 \pmod{1})$. T est un homéomorphisme de X sur soi-même. On sait que les points périodiques de T sont exactement les points à coordonnées rationnelles. Donc les points périodiques sont denses. Remarquons aussi que T est topologiquement transitif (il existe des orbites denses dans X) et même topologiquement mélangeant, c'est à dire telle que pour deux ouverts $U, V \subset X$ il existe un N avec $T^n U \cap V \neq \emptyset$ pour tout $n > N$.

Soit λ la mesure de Lebesgue sur X . Alors $\lambda \in M_T(X)$. Il y a bien d'autres mesures T -invariantes sur X . En particulier, soit $x \in X$ tel que $T^p x = x$. Alors la mesure $\frac{1}{p} (\pi(x) + \pi(Tx) + \dots + \pi(T^{p-1}x))$ est dans $M_T(X)$. C'est une mesure invariante con-

centrée sur une orbite périodique. Appelons une telle mesure une mesure o.p.. Ces mesures sont évidemment ergodiques. $M_T(X)$ est un espace convexe à dimension infinie. Il est naturel de

Demandons donc quelles sont les propriétés typiques des éléments de $M(X)$ et de $M_T(X)$. Le résultat suivant est d'une grande utilité pour la recherche de ces propriétés génériques.

Th.1: Les mesures o.p. sont denses dans $M_T(X)$.

Remarquons que pour démontrer ce théorème, on a besoin de la propriété de spécification (voir section V). Il ne suffit certainement pas que les points périodiques soient denses dans X .

Du théorème 1 s'ensuit que les mesures ergodiques sont denses. Puisque ces mesures sont les points extrémaux d'un convexe, elles forment aussi un G_δ . Donc

Th.2: Génériquement, les mesures invariantes sont ergodiques.

Les mesures o.p. sont peu intéressantes en elles-mêmes, pour plusieurs raisons. Elles ont des atomes, c'est à dire des points à masse strictement positive. Elles ne chargent pas tous les ouverts. Et elles ne sont pas fortement mélangeantes (sauf si elles se réduisent à des mesures ponctuelles). En tout ceci, elles se distinguent de la mesure λ . Quelle est la situation typique? On obtient:

Th.3: Génériquement, les mesures invariantes sont non-atomiques et chargent les ouverts.

Th.4: Génériquement, les mesures invariantes ne sont pas fortement mélangeantes.

Entre le mélange fort et l'ergodicité il y a la notion importante de mélange faible. $\mu \in M_T(X)$ est faiblement mélangeante si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\mu(T^{-n}A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0$$

pour $A, B \in \mathcal{B}(X)$.

Th.5: Génériquement, les mesures invariantes sont faiblement mélangeantes.

A tout $\mu \in M_T(X)$ est associé un nombre $h_\mu(T)$, l'entropie de μ , de la façon suivante. Soit $\alpha = \{A_1, \dots, A_n\}$ une partition finie de X en boréliens. On définit:

$$H_\mu(\alpha) = - \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \log \mu(A_i) \quad (\text{avec } 0 \cdot \log 0 = 0).$$

Soit $\alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \dots \vee T^{-N+1}\alpha$ la partition dont les éléments sont de la forme $A_{i_0} \cap T^{-1}A_{i_1} \cap \dots \cap T^{-N+1}A_{i_{N-1}}$. On montre que

$\lim \frac{1}{N} H_{\mu}(\alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \dots \vee T^{-N+1}\alpha)$
 existe. On dénote cette limite par $H_{\mu}(\alpha, T)$. Enfin on pose
 $h_{\mu}(T) = \sup \{H_{\mu}(\alpha, T) : \alpha \text{ est une partition finie en boréliens}\}.$

On a toujours $h_{\mu}(T) \geq 0$. Si μ est une mesure o.p. alors $h_{\mu}(T) = 0$. D'autre part, $h_{\lambda}(T)$ est strictement positif: $h_{\lambda}(T)$ est égal au logarithme de la valeur absolue maximale des valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (qui servait à définir T). On obtient:

Th.6: Génériquement, les mesures invariantes ont entropie nulle.

Soit T_i un homéomorphisme de l'espace compact métrique X_i sur soi-même, et soit $\mu_i \in M_{T_i}(X_i)$ ($i=1,2$). Alors μ_1 et μ_2 sont dits isomorphes s'il existe des $\bar{X}_i \in B(X_i)$ avec $\mu_i(\bar{X}_i) = 1$ et une bijection bimesurable $\phi : \bar{X}_1 \rightarrow \bar{X}_2$ qui transforme μ_1 en μ_2 et qui rend le diagramme suivant commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \bar{X}_1 & \xrightarrow{T_1} & \bar{X}_1 \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \bar{X}_2 & \xrightarrow{T_2} & \bar{X}_2 \end{array}$$

Dans ce cas, on a $h_{\mu_1}(T_1) = h_{\mu_2}(T_2)$.

Soit $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, s\}$ un espace fini à topologie discrète et $\mathcal{J}^{\mathbb{Z}}$ l'espace produit dont les éléments sont les suites bilatérales $x = (x_i)$ ($-\infty < i < +\infty$) à éléments dans $\mathcal{J}$. Soit σ le shift défini par $(\sigma x)_i = x_{i+1}$ pour $x \in \mathcal{J}^{\mathbb{Z}}$. σ est un homéomorphisme de l'espace compact métrique $\mathcal{J}^{\mathbb{Z}}$ sur soi-même.

Soit $\bar{p} = (p_1, \dots, p_s)$ un vecteur de probabilité, c'est à dire une mesure sur $\mathcal{J}$. La mesure produit sur $\mathcal{J}^{\mathbb{Z}}$ est appelée mesure de Bernoulli au sens strict. Elle est invariante, c'est à dire dans $M_{\sigma}(\mathcal{J}^{\mathbb{Z}})$. Elle est fortement mélangeante et son entropie est $-\sum p_i \log p_i$.

Cette définition de la mesure de Bernoulli se laisse généraliser. $\mu \in M_T(X)$ est dite mesure de Bernoulli s'il existe une mesure de Bernoulli au sens strict qui lui est isomorphe.

Th.7: Les mesures de Bernoulli sont denses dans $M_T(X)$.

En particulier, les mesures fortement mélangeantes et les mesures à entropie positive forment des ensembles maigres, mais denses dans $M_T(X)$.

Considérons maintenant les moyennes temporelles μ^N et l'ensemble $V(\mu)$ de leurs points d'accumulation, pour $\mu \in M(X)$.

Th.8: Soit V un ensemble non vide, fermé et connexe de $M_T(X)$. Alors l'ensemble des $\mu \in M(X)$ telles que $V(\mu) = V$ est dense dans $M(X)$, et l'ensemble des $x \in X$ tels que $V(\pi(x)) = V$ est dense dans X .

Ceci montre que pour beaucoup de mesures μ , les moyennes temporelles μ^N ne convergent pas. On peut préciser ceci. Disons que la mesure $\mu \in M(X)$ est à oscillation maximale si $V(\mu) = M_T(X)$ et si pour tout $\nu \in M(X)$ il existe une suite $n_k \uparrow \infty$ telle que $T^{n_k} \mu \rightarrow \nu$. Disons que le point $x \in X$ est à oscillation maximale si $V(\pi(x)) = M_T(X)$ et si pour tout $y \in X$ il existe une suite $n_k \uparrow \infty$ telle que $T^{n_k} x \rightarrow y$.

Th.9: Génériquement, les points de X et les mesures sur X sont à oscillation maximale.

IV. Transformations structurellement stables

Les théorèmes précédents sont valides pour tous les automorphismes de tores à n dimensions définis par des matrices de $SL(n, \mathbb{Z})$ qui sont hyperboliques, c'est à dire dont les valeurs propres ne sont pas sur le cercle unité. Ces résultats ne dépendent pas de la structure linéaire de telles transformations. En effet, pour tout difféomorphisme T de cette forme, il existe un voisinage C^2 tel que tout difféomorphisme T' dans ce voisinage est topologiquement conjugué à T . Ceci veut dire que si les applications T et T' et leurs dérivées d'ordre premier et second sont suffisamment voisines, il existe un homéomorphisme ϕ du tore X sur-soi-même tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & X \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ X & \xrightarrow{T'} & X \end{array}$$

On dit dans ce cas que T est structurellement stable. Donc les

théorèmes 1 à 9 sont valides pour un ensemble ouvert (dans la topologie C^2) de difféomorphismes du tore.

Une classe importante de transformations structurellement stables sont les difféomorphismes d'Anosov, dont les automorphismes hyperboliques du tore sont des exemples.

Soit X une variété riemannienne compacte, $T:X \rightarrow X$ un difféomorphisme de classe C^2 et T^* la différentielle de T . On dit que T est un difféomorphisme d'Anosov s'il existe des constantes $c > 0$, $0 < l < 1$ et deux champs tangents continus C_x et D_x ($x \in X$) invariants sous T^* , tels que $C_x \oplus D_x$ soit l'espace tangent en x et que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$

- (a) $\|(T^n)^* v\| \leq c l^n \|v\|$ pour $v \in C_x$
- (b) $\|(T^{-n})^* v\| \leq c l^n \|v\|$ pour $v \in D_x$.

($\|\cdot\|$ désigne une métrique riemannienne). On dit que T est dilatant sur D_x et contractant sur C_x .

Dans le cas d'un automorphisme hyperbolique du tore donné par une matrice A , C_x est parallèle au vecteur propre de A qui correspond à la valeur propre à l'intérieur du cercle unité, et D_x est parallèle à l'autre vecteur propre.

Une classe de difféomorphismes bien plus large encore a été introduite par Smale dans [12]. Soit Ω l'ensemble des points non-errants de T , c'est à dire des points x tels que pour tout voisinage U de x il existe un $n \neq 0$ tel que $T^n U \cap U \neq \emptyset$. Ω est un ensemble non vide, fermé et invariant qui contient les points périodiques. On dit que T satisfait l'axiome A si

- (1) les points périodiques sont denses dans Ω ,
- (2) l'espace tangent de X , restreint à Ω , peut être décomposé en somme continue de deux champs de vecteurs C_x et D_x , invariants par T^* , tels que T soit contractant sur C_x et dilatant sur D_x .

Sur toute variété compacte, il existe des difféomorphismes structurellement stables satisfaisant à l'axiome A. (Il n'en est pas de même pour les difféomorphismes d'Anosov.) On conjecture que tout difféomorphisme structurellement stable satisfait à l'axiome A.

Si T satisfait à l'axiome A, Ω peut être décomposé de manière unique en nombre fini d'ensembles fermés, disjoints

et T -invariants Ω^j tels que $T: \Omega^j \rightarrow \Omega^j$ soit topologiquement transitif ($1 \leq j \leq s$). Chaque Ω^j à son tour peut être décomposé d'une manière unique en un nombre fini d'ensembles fermés et disjoints Ω_k^j ($1 \leq k \leq m_j$) tels que T envoie Ω_k^j sur Ω_{k+1}^j (et $\Omega_{m_j}^j$ sur Ω_1^j) et que $T^{m_j}: \Omega_1^j \rightarrow \Omega_1^j$ soit topologiquement mélangeant ([12] et [2]).

Ω_1^j peut se réduire à un point : dans ce cas Ω^j est une orbite périodique isolée dans Ω . Sinon, Ω_1^j est infini. Posons $T^{m_j} = S$, $\Omega_1^j = Y$, et appelons les systèmes dynamiques $S: Y \rightarrow Y$ des systèmes basiques. On peut montrer que les théorèmes 1 à 9 sont valides pour les systèmes basiques ([6], [7], [10]). L'information correspondante pour $T: X \rightarrow X$ en est facile à tirer. En effet, $M_T(X)$ est juste $M_T(\Omega)$, puisque toute mesure invariante sur X est concentrée sur la partie non-errante. Tout élément de $M_T(\Omega)$ est une combinaison convexe $a_1 \mu_1 + \dots + a_s \mu_s$, avec $\mu_j \in M_T(\Omega^j)$. Enfin, il y a un homéomorphisme évident entre $M_S(Y)$ et $M_T(\Omega^j)$: à $\mu \in M_S(Y)$ correspond $\bar{\mu} = \frac{1}{m_j} (\mu + T\mu + \dots + T^{m_j-1}\mu) \in M_T(\Omega^j)$.

Revenons maintenant au cas d'un groupe de transformations à un paramètre réel. Toutes les notions utilisées dans ce qui précède ont un analogue continu. Les théorèmes 1, 2, 3, 8 et 9 ont été étendus au cas de flots différentiables satisfaisant (l'analogue de) l'axiome A ([8] et [10]). (Les résultats correspondant aux théorèmes 4 et 6 semblent facile à démontrer, ceux des théorèmes 5 et 7 peut-être moins). En particulier, 1, 2, 3, 8 et 9 sont valides pour les flots géodésiques sur des variétés compactes à courbure négative. Ce sont là des systèmes dynamiques déjà assez 'mécaniques'. Ainsi, Kolmogoroff a remarqué que l'on peut définir une surface fermée W (dans l'espace euclidien à 3 dimensions) et placer près de W un nombre fini de centres d'attraction et de répulsion tels que sous l'action de ce potentiel, le mouvement d'un point matériel sur W soit équivalent à un flot géodésique sur une surface à courbure négative (voir [4]). Ceci laisse espérer que l'on peut aborder les problèmes correspondants pour des modèles

vraiment 'physiques' de la mécanique statistique, comme le modèle de Bohr ou le modèle de Boltzmann-Gibbs.

V. Quelques remarques sur les démonstrations

Pour démontrer les théorèmes 1 à 9, on se sert avant tout d'une propriété topologique qui a été introduite par Bowen dans [2]. On dit que l'homéomorphisme T de l'espace compact métrique X sur soi-même satisfait la propriété de spécification si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $M(\epsilon) > 0$ tel que si x_1 et x_2 sont des points de X et a_1, a_2, b_1, b_2 , et p des entiers satisfaisant

$$(a) \quad a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2$$

$$(b) \quad a_2 - b_1 > M(\epsilon)$$

$$(c) \quad p - (b_2 - a_1) > M(\epsilon)$$

il existe un $z \in X$ tel que $T^p z = z$ et

$$d(T^j x_1, T^j z) < \epsilon \quad \text{pour } a_1 \leq j \leq b_1$$

$$d(T^j x_2, T^j z) < \epsilon \quad \text{pour } a_2 \leq j \leq b_2.$$

Ceci veut dire que deux pièces d'orbite quelconques $\{T^j x_1 : a_1 \leq j \leq b_1\}$ et $\{T^j x_2 : a_2 \leq j \leq b_2\}$ peuvent être approchées, à ϵ près, par une orbite périodique $\{T^j z\}$, pourvu que les temps $a_2 - b_1$ (pour aller de la première pièce d'orbite à la seconde) et $p - (b_2 - a_1)$ (pour retourner de la seconde pièce d'orbite à la première) soient supérieurs à $M(\epsilon)$. L'uniformité de cette condition - $M(\epsilon)$ ne dépend ni des x_i , ni des longueurs $b_i - a_i$ des pièces d'orbite - la semble rendre très sévère: mais elle est satisfaite pour bien de transformations. En premier lieu, les systèmes basiques $S:Y \rightarrow Y$ remplissent la condition de spécification, comme l'a montré Bowen dans [2]. Il en est de même pour les shifts, et pour de nombreux exemples de sous-shifts (c'est à dire des restrictions d'un shift à un sous-ensemble fermé et invariant). Cette condition est aussi remplie pour bien de transformations non-invertibles, par exemple pour les expansions $x \rightarrow sx \pmod{1}$ de l'intervalle unité ($s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$). Mentionnons enfin que la propriété de spécification est naturelle: elle est conservée par les homomorphismes et les produits de systèmes dynamiques. De plus

si $T:X \rightarrow X$ remplit cette condition, il en est de même de $T:M(X) \rightarrow M(X)$ (voir [9] et [1]).

La condition de spécification suffit pour démontrer les théorèmes 1,2,3,4,8 et 9. Il semble possible qu'elle le soit aussi pour les théorèmes 5,6 et 7.

Jusqu'à présent on a besoin de la condition d'expansivité pour démontrer le théorème 6 : cette condition est remplie s'il existe une constante δ telle que $d(T^n x_1, T^n x_2) < \delta$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ implique $x_1 = x_2$. Ruelle a montré dans [5] que spécification et expansivité suffisent pour la démonstration.

Quant aux théorèmes 5 et 7, on se sert de la théorie des partitions de Markoff, due à Sinai et Bowen. Cette théorie affirme que les systèmes basiques $S:Y \rightarrow Y$ se laissent représenter comme images homomorphes de certains sous-shifts de type particulier (voir [3]). On peut montrer que toute mesure o.p., pour ces sous-shifts, se laisse approcher par des mesures données par des chaînes de Markoff apériodiques et irréductibles [7]. Ornstein a montré que de telles mesures sont des mesures de Bernoulli, et que les images homomorphes de mesures de Bernoulli sont encore des mesures de Bernoulli ([4]). Le théorème 7 en découle facilement. Il s'ensuit que les mesures faiblement mélangeantes sont denses. Comme d'autre part elles forment un G_δ , le théorème 5 en résulte.

Bibliographie

- 1 W.BAUER et K.SIGMUND, Topological dynamics of transformations induced on the space of probability measures, to appear in Monatshefte für Math.
- 2 R.BOWEN, Periodic points and invariant measures for Axiom A diffeomorphisms, Transactions AMS 154 (1971) 377-397
- 3 R.BOWEN Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms, Amer.J.Math 92 (1970) 725-747
- 4 D.ORNSTEIN, Some new results in the Kolmogorov-Sinai theory on entropy and ergodic theory, Bulletin AMS 77 (1971) 878-890

- 5 D.RUELLE, Statistical mechanics on compact sets with Z'
action satisfying expansiveness and specification,
Bulletin AMS 78 (1972) 988-991
- 6 K.SIGMUND, Generic properties of invariant measures for
Axiom A diffeomorphisms, Inventiones math.11(1970)
99-109
- 7 --- , Mixing measures for Axiom A diffeomorphisms,
Proceedings AMS 36 (1972) 497-504
- 8 --- , On the space of invariant measures for hyper-
bolic flows, Amer. J.Math 94 (1972) 31-37
- 9 --- , On dynamical systems with the specification
property, to appear in Transactions AMS
- 10 --- , On the time evolution of statistical states
for hyperbolic flows, to appear
- 12 S.SMALE, Differentiable dynamical systems, Bulletin AMS
73 (1967) 747-817.